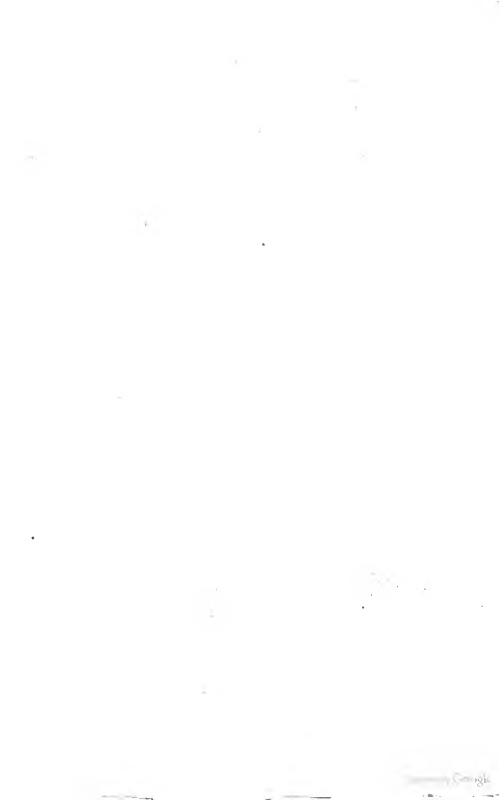
DIZIONARIO

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

VOLUME OTTAVO

DIZIONARIO

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PURE ED APPLICATE

COMPILATO DA UNA SOCIETA'
DI ANTICHI ALLIEVI DELLA SCUOLA POLITECNICA DI PARIGI

SOTTO LA DIREZIONE

DI

A.-S. DE MONTFERRIER

MEMBRO DELL' ANTICA SOCIETÀ REALE ACCADEMICA DELLE SCIENZE
DI PARIGI, DELL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI MARSIGLIA,
DI QUELLA DI METZ EC. EC.

PRIMA VERSIONE ITALIANA

CON NUMEROSE AGGIUNTE E CORREZIONI

DEL D. GIUSEPPE GASBARRI

E

DI GIUSEPPE FRANÇOIS

VOLUME OTTAVO

FIRENZE
PER V. BATELLI E COMPAGNI
1847

DIZIONARIO

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PURE ED APPLICATE

SAC

Sacrobosco (Giovanni da), astronomo, così chiamato dal nome latino del suo luogo natio, in inglese Holywood, nella contea di York, nacque verso il principio del secolo XIII, e si è reso celebre nella storia della scienza come autore del primo trattato di astronomia che l'Europa abbia posseduto indipendentemente dagli antichi. Sacrobosco fece i suoi studj nell'università di Oxford, e si recò quindi a Parigi, ove le sue cognizioni matematiche, straordinarie affatto pel suo tempo, gli acquistarono grande reputazione. Ei vi morì nel 1256. Il libro di questo dotto, al quale deve egli la sua celebrità, e che per quattrocento anni è stato adottato nelle scuole come opera classica, è intitolato: *De Sphaera mundi*, ed è diviso in quattro parti, di cui la prima tratta della sfera e della forma della terra; la seconda de' circoli; la terza del moto annuo della terra, del levare e del tramontare degli astri, del crescere e del diminuire de' giorni e delle notti, e della divisione dei climi; e finalmente la quarta del moto diurno della terra e della causa degli ecclissi. È un compendio dell'*Almagesto* di Tolomeo e dei comenti degli astronomi arabi. Quest'opera, interamente dimenticata come produzione scientifica, non è più considerata che come un oggetto di semplice curiosità. Dopo il poema di Manilio, è la prima opera di astronomia che sia stata impressa dopo l'invenzione della stampa. La prima edizione, Ferrara, 1472, in-4, è rarissima: se ne contano almeno 14 edizioni nel secolo decimoquinto, 22 nel secolo successivo, e 11 nel decimosettimo. L'edizione più recente citata da Lalanda nella sua *Bibliografia astronomica* è del 1699. I più dotti astronomi, Giorgio Purbach, G. Muller (Regiomontano), Elia Vinet, ec. l'hanno arricchita in diversi tempi di note e di comenti, ed è stata tradotta in tutte le lingue. Pare che il primo astronomo che osato abbia di criticare Sacrobosco sia stato Francesco Barocci, patrizio veneto, nella prefazione del suo *Trattato di Cosmografia*, 1570, in-4; egli indica 84 errori in cui è caduto il matematico inglese. Oltre il trattato di sopra citato, si ha di Sacrobosco un altro scritto intitolato: *De anni ratione, sive de computo ecclesiastico*, che fu pubblicato la prima volta da Melantone in seguito al trattato della sfera, nel 1538, Wittemberg, in-8. Leland (*Comm. De Script. Britannis*) cita ancora di Sacrobosco un opuscolo, *De Algorismo*, rimasto manoscritto. Intorno a que-

st' astronomo e all' influenza dal suo libro sulla scienza nei secoli di mezzo, si legga il *Trattato di astronomia* di Lalande, la *Storia dell' astronomia* di Weidler, la *Storia dell' astronomia moderna* di Bailly e quella di Delambre.

SAGITTARIO (*Astron.*). Una delle costellazioni zodiacali, che negli autori si trova spesso rammentata coi nomi di *Arcitenens*, *Sagittarius*, *Phillirides*, *Croton*. Sulle carte celesti viene rappresentata sotto la figura di un centauro con un arco teso in mano, sotto l' Aquila, tra lo Scorpione e il Capricorno. Vogliono i mitologi che questo centauro sia Chirone, figlio di Saturno e di Fillride, che insegnò il primo agli uomini l' arte di montare a cavallo, che fu precettore di Achille, di Giasone e di Esculapio, e che rimase ucciso da una freccia tinta del sangue dell' idra di Lerna. Da questa costellazione ha preso pure il nome il nono segno dello zodiaco, che viene comunemente indicato con questa figura ♐. Il sole entra nel Sagittario verso il 22 di Novembre.

SAINT-VINCENT (Gregorio). *Vedi* Gregorio da San Vincenzio.

SALOMONE DI CAUS. *Vedi* Caus.

SANDERSON. *Vedi* Saunderson.

SANDOLINI (Cherubino), cappuccino di Udine, applicossi alle matematiche, e specialmente all' arte di fabbricare gli orologi solari, e pubblicò su questa ultima scienza un' opera voluminosa con questo titolo singolare: *Taulemma Cherubicum catholicum*, *universalia ac particularia continens principia sive instrumenta ad horas omnes italicas*, *bohemicas*, *gallicas atque babylonicas*, *diurnas atque nocturnas dignoscendas*, *et ad componendum per universum orbem earum multiformia horologia exquisitissimum*, Venezia, 1598, 4 vol. in-fol. divisi in 12 libri. Questo religioso lasciò manoscritte parecchie altre opere.

SANVITALI (Federico), matematico italiano, nato a Parma nel 1704, e morto a Brescia l' 8 Dicembre 1761. Ha scritto: I *Arithmeticae elementa explicata et demonstrata in usum adolescentium*, Brescia, 1750, in-8; II *Compendiaria arithmeticae et geometriae elementa*, ivi, 1756, in-8; III *Elementi di architettura civile*, ivi, 1765, in-4, opera postuma.

SATELLITE (*Astron.*). Nome che si dà ai pianeti secondarj, che fanno la loro rivoluzione intorno ad un pianeta principale, e che l' accompagnano nella rivoluzione che esso fa intorno al sole.

I satelliti descrivono intorno ai loro pianeti principali, come centri, delle ellissi, osservando le stesse leggi a cui obbediscono questi stessi pianeti principali nel loro moto intorno al sole. La luna è il satellite della Terra; Mercurio, Venere e Marte non hanno satelliti; Giove ne ha quattro, Saturno sette e Urano sei.

I quattro satelliti di Giove sono stati scoperti da Galileo nel 1610, poco dopo la sua invenzione del telescopio; le loro orbite sono in piani quasi esattamente coincidenti coll' equatore di Giove o paralleli alle sue fasce. Quest' equatore essendo pochissimo inclinato sull' ecclittica, ne resulta che le orbite dei satelliti ci compariscono come linee quasi rette, lungo le quali sembrano essi oscillare, ora passando avanti a Giove ed ecclissando una piccolissima porzione del suo disco, ora passandogli dietro ed essendo da lui ecclissati. Questi ecclissi, che all' astronomia somministrano un mezzo prezioso per la determinazione delle longitudini terrestri, hanno condotto Roëmer alla importante scoperta del moto progressivo della luce. *Vedi* Luce.

I satelliti di Giove hanno, come la luna, un moto di rotazione intorno a sè stessi, la cui durata è perfettamente eguale a quella della loro rivoluzione intorno al pianeta, al quale per conseguenza presentano sempre la stessa faccia. Tutto quello che si conosce della loro fisica costituzione si riduce al sapere che essi hanno accidentalmente sulla loro superficie o nella loro atmosfera delle macchie oscure di una grande estensione. Noi abbiamo menzionato altrove la relazione

singolarissima scoperta da Laplace, tra i movimenti medj dei tre primi satelliti. *Vedi* LAPLACE.

I sette satelliti di Saturno sono stati scoperti come appresso: il sesto nel 1655 da Huygens; il settimo nel 1671 da Domenico Cassini, che scoprì quindi il quinto nel 1672, e il terzo e il quarto nel 1684; i due primi sono stati veduti la prima volta da Herschel nel 1789. Questi corpi, che l'estrema loro lontananza rende oltremodo difficili a studiare, sono meno noti dei satelliti di Giove. Il più lontano dal pianeta è il solo sul quale siasi potuto scorgere un moto di rotazione, che si effettua nell'intervallo medesimo di tempo della sua rivoluzione periodica; l'analogia d'accordo colla teoria non permette di dubitare che lo stesso debba aver luogo per gli altri sei.

I satelliti di Urano, scoperti da Herschel nel 1788 e 1797, sono anco meno conosciuti di quelli di Saturno, ed è perfino da non pochi astronomi messa in dubbio l'esistenza di quattro di essi; ma i due che sono stati da tutti osservati presentano la singolarità di un moto in senso inverso a quello di tutti gli altri corpi del sistema solare, perchè mentre tutti questi corpi compiono le loro rivoluzioni andando da occidente verso oriente, questi due satelliti, i piani delle cui orbite sono quasi perpendicolari all'eclittica, si muovono da oriente verso occidente.

SATURNO (*Astron.*). Uno dei pianeti del nostro sistema, e il decimo nell'ordine delle distanze dal sole. Viene comunemente indicato col segno ♄.

Questo vasto globo, le cui dimensioni eguagliano quasi quelle di Giove, perchè il suo diametro non ha meno di 31434 leghe di 2000 tese, presenta particolarità notabilissime; oltre essere accompagnato da sette lune o satelliti, è circondato da due anelli solidi, schiacciati e sottilissimi, che hanno ambedue lo stesso centro, cioè quello del pianeta, che si stendono in un medesimo piano e che sono separati l'uno dall'altro da un piccolissimo intervallo in tutto il loro contorno, mentre tra essi e il pianeta esiste un intervallo molto più considerabile. Le seguenti dimensioni di questi corpi straordinarj sono state calcolate dietro le misure micrometriche del professore Struve. Sono esse espresse in leghe di 25 per grado.

	Leghe
Diametro esterno dell'anello esterno	63880
Diametro interno del medesimo	56223
Diametro esterno dell'anello interno	54926
Diametro interno del medesimo	42488
Diametro equatoriale del pianeta	28664
Intervallo tra il pianeta e l'anello interno	6912
Intervallo degli anelli	648
Grossezza degli anelli, al più	36

Il disco di Saturno è ricoperto di macchie o strisce oscure, simili presso a poco a quelle di Giove, ma più larghe e meno distinte. L'anello è un corpo opaco la cui ombra si projette sul corpo del pianeta, come può vedersi nella figura 1 della Tavola XIX. Si è riconosciuto che l'asse di rotazione intorno al quale girano nel tempo stesso con diverse celerità il pianeta e i due anelli è perpendicolare agli anelli, i quali corrispondono per conseguenza alle regioni equatoriali di Saturno. La durata della rotazione del pianeta è di $10^{or}\ 18'$, e quella della rotazione degli anelli è di $10^{or}\ 29'\ 17''$.

Nel corso dell'orbita che Saturno descrive in 30 anni intorno al sole, le di-

verse situazioni che esso prende rapporto alla terra fanno sparire quattro volte l'anello, che in queste epoche presenta la sua grossezza e non comparisce più che come una linea retta sottilissima, che oltrepassa da ambedue le parti il disco del sole, e di cui la finezza è tale che occorre fare uso di telescopj di un potere amplificante straordinario per poterla scorgere.

Il volume di Saturno è 887 volte più grande di quello della terra, e la sua massa vien rappresentata col numero 101, prendendo per unità quella della terra. Da questi valori si deduce che la densità di Saturno, confrontata con quella della terra, è circa 0,11; vale a dire che i materiali costitutivi questo immenso pianeta hanno una densità molto al di sotto di quella dell'acqua e poco superiore a quella del sughero.

Ecco gli elementi di Saturno, riferiti al 1° Gennajo 1801,

Rivoluzione siderale media	10759gior.,2198174
Longitudine media	135° 20′ 6″,5
Inclinazione sull'ecclittica	2 29 35 ,7
Longitudine del perielio	89 9 29 ,8
Longitudine del nodo ascendente	111 56 37 ,4
Semiasse maggiore, preso per unità quello della terra	9,5387861
Eccentricità in parti del semiasse maggiore	0,0561505
Diametro equatoriale, preso per unità quello della terra.	9,987

La massima distanza di Saturno dal sole, valutata in leghe di 2000 tese, è secondo Delambre di 395214317 leghe, e la sua minima distanza di 313291102 leghe: le sue distanze dalla terra variano dalle 313291102 leghe fino alle 435101578 leghe.

SAUNDERSON (Niccolò), dotto matematico inglese, nacque nel 1682 a Thurlston, nella contea di York. Era ancora in fasce, quando la crudele malattia, dalla quale la preziosa scoperta di Jenner ha preservato le moderne generazioni, lo privò interamente della vista. Malgrado la sua disgraziata situazione, il giovine Saunderson non tardò a manifestare grandi disposizioni per lo studio; e i suoi genitori, quantunque in bassa fortuna, si diedero tutte le premure per coltivarle. L'inclinazione sua per le matematiche si manifestò specialmente allorchè uscì dalla scuola di Penniston, ove appreso aveva la lingua greca e latina. Apprese da suo padre le prime regole dell'aritmetica, ed in breve fu in grado di fare lunghi calcoli colla forza della sua memoria, formandosi nuovi metodi per risolvere più prontamente que' piccoli problemi che si danno a' principianti per far prova della loro abilità. I suoi progressi maravigliosi anzi che straordinarj indussero Riccardo West, gran dilettante di matematiche, a dargli delle lezioni di algebra e di geometria, quindi lo ebbe per scolare il dottore Nettleton, e non andò guari che nè l'uno nè l'altro ebbero più alcuna cosa da insegnarli. Allora Saunderson attese a studiar solo, senz'altro soccorso che di un libro e di un lettore. Desideroso di dare ajuto alla propria famiglia che trovavasi in grandi ristrettezze, si condusse nel 1707 all'università di Cambridge, sperando di ottenervi una cattedra di matematiche. Ammesso nel collegio di Christ-Church a professare in qualità di *lecturer*, aprì il suo corso cogli elementi dell'ottica e dell'aritmetica universale di Newton. Le sue lezioni attirarono un concorso grande di dotti e di curiosi: era infatti uno spettacolo straordinario e proprio ad eccitare l'attenzione pubblica quello di un giovane cieco che con una faci-

lità e chiarezza senza esempio esponeva i principj dell'ottica, discorreva della luce e dei colori, spiegava la teoria della visione, gli effetti dei vetri convessi e concavi, il fenomeno dell'arco baleno e gli altri oggetti della vista. Dopo avere pubblicamente insegnato la filosofia newtoniana, Saunderson strinse amicizia coll'illustre autore di essa; conversando con lui ebbe il vantaggio di potersi fare schiarire quella parte delle sue opere che presentano maggiori difficoltà, e fu per di lui mezzo che nel 1711 ottenne la cattedra di matematiche nell'università di Cambridge, che con lustro occupò fino alla sua morte avvenuta in questa città il 19 Aprile 1739. Erasi meritamente acquistata la reputazione d'uno dei primi geometri dell'Inghilterra, e la Società Reale di Londra era stata sollecita ad annoverarlo tra i suoi socj.

Saunderson aveva dettato su tutti i punti delle matematiche per uso de' suoi allievi, ma dapprima nulla avea destinato alla stampa. Soltanto dietro le istanze de'suoi amici compilò in inglese e diede l'ultima mano a' suoi *Elementi d'algebra*, che vennero pubblicati soltanto dopo la sua morte a Cambridge, 1740, 2 vol. in-8: vennero tradotti in francese da de Joncourt, Amsterdam, 1756, 2 vol. in-4, e possono esser tuttora consultati con frutto. Fra gli altri scritti che ha lasciati, si citano con lode dei comenti sui *Principj* di Newton, coi quali non solo ne spiega le parti più difficili, ma sovente amplia il testo. Pubblicati vennero in latino in seguito al suo trattato postumo *Delle Flussioni*, opera stimabile comparsa nel 1756, in-8. Le sue lezioni manoscritte su quasi tutte le parti della filosofia naturale meriterebbero egualmente di esser pubblicate. Fu detto che Saunderson avesse immaginato il primo la scomposizione del cubo in sei piramidi eguali e simili. Il primo volume de' suoi *Elementi d'algebra* contiene la descrizione di una maniera per fare le operazioni dell'aritmetica pel solo senso del tatto. Tale metodo è quello che fu poi denominato *aritmetica palpabile*; Montucla ne fece la descrizione nel tomo I delle *Ricreazioni matematiche*.

SAUVEUR (Giuseppe), geometra celebre del XVII secolo, nacque a la Flèche il 24 Marzo 1653. Questo dotto, cui si deve l'*acustica musicale*, fu muto fino all'età di sette anni; l'organo della voce non gli si sviluppò in seguito che con estrema lentezza, e non l'ebbe mai sciolto appieno, come non ebbe mai perfettamente libero il senso dell'udito. Nacque può dirsi col genio della meccanica; fino dalla puerizia, costruiva dei piccoli mulini, faceva delle fontane, ec. » Era, » dice Fontenelle nel suo elogio, l'ingegnere degli altri fanciulli, come Ciro » divenne il re di quelli coi quali viveva ». Sauveur si recò a Parigi nel 1670 all'oggetto di studiarvi teologia: ma la natura del suo ingegno lo portò allo studio delle matematiche ch'egli imparò pressochè da se solo. Per vivere, diede delle lezioni su tali scienze, e intanto si fece conoscere vantaggiosamente per interessanti ricerche sul calcolo delle probabilità applicato ai giuochi d'azzardo, sui metodi di approssimazione, sulla stazzatura dei vasi, sui quadrati magici, ec. Nel 1686 conferita gli venne la cattedra di matematiche nel collegio reale, e nel 1696 l'Accademia delle Scienze di Parigi lo accolse nel suo seno. I suoi diritti ad un simile onore erano incontestabili; tuttavia nulla di quanto aveva fatto fino allora recherebbe nel tempo presente lustro alla sua memoria, se, incominciando dalla sua ammissione nell'Accademia e ne' venti ultimi anni della sua vita, non si fosse occupato con pari costanza e buon successo a creare un nuovo ramo delle scienze fisico-matematiche, indicato col nome di *acustica musicale*, creazione cui è piuttosto singolare di dovere ad un sordo. Tale scoperta è esposta in diverse memorie inserite nella *Raccolta* dell'Accademia delle Scienze, di cui le principali sono: *Détermination d'un son fixe*, *détails sur les expériences par les battemens*, 1702; — *Application des sons harmoniques à la composition des jeux d'orgue*, 1707; — *Méthode générale pour former les systèmes*

tempérés de musique, *et choix de celui qu'on doit suivre*, 1711; — *Table générale des systèmes tempérés de musique*, 1713; — *Rapport du son des cordes d'instrumens de musique aux flèches des courbes*, *et nouvelle détermination des sons fixes*. Nella notizia biografica di questo dotto, inserita nella *Biografia universale*, si legge un ragguaglio succinto non solo delle scoperte di Sauveur, ma di ciò che dopo di lui è stato fatto sull' acustica musicale. Sauveur morì il 9 Luglio 1716 in età di anni sessantatrè.

SAVERIEN (Alessandro), matematico francese, nato verso il 1720 ad Arles, entrò di venti anni nel corpo degl' ingegneri della marina, e vi si fece ben presto distinguere per le cognizioni sue nelle costruzioni navali. Essendosi messo in urto con Bouguer, provò qualche difficoltà al suo avanzamento, e, stanco di sollecitare inutilmente, rennunziò all' impiego e si diede onninamente alla coltura delle scienze e delle lettere. Morì pressochè sconosciuto a Parigi il 28 Maggio 1805. Ha pubblicato un numero grande di opere, di cui si troverà l' elenco compiuto nei *Secoli* di Desessarts e nella *Francia letteraria* di Ersch. Le principali tra quelle che riguardano la scienza sono le seguenti: I *Nouvelle théorie de la manoeuvre des vaisseaux*, 1745; fu questa la prima opera di Saverien, e quella che cagionò il suo disgusto con Bouguer, perchè si allontanava dai principj posti da quest' ultimo nella sua memoria *sull' alberatura dei vascelli*, coronata dall' Accademia delle Scienze di Parigi (*Vedi* Bouguer): II *Nouvelle théorie de la mâture*, 1747; III *L' art de mesurer sur mer le sillage du vaisseau*, 1750; in questo scritto, dopo aver ricordato tutti i mezzi impiegati dagli antichi e dai moderni per determinare il cammino di una nave, propone due macchine di sua invenzione, che per quanto non adottate non lasciano di essere ingegnose, e delle quali si troverà la descrizione anco nel suo *Dizionario di Marina*. IV *Traité des instrumens propres à observer sur mer*, 1752; vi si trova la descrizione di un settore a semplice riflessione e a canocchiale, che fu tosto adottato dalla marina; V *Dictionnaire universel de mathématiques et de physique*, Parigi, 1753, 2 vol. in-4, con 101 tavole; V *Dictionnaire historique*, *théorique et pratique de marine*, ivi, 1758; 2.ª ediz. 1781, 2 vol. in-8. Devesi a Saverien l'edizione del *Trattato delle flussioni* di Maclaurin, 1749, e quella del *Dizionario di architettura* di Daviler, 1755, con aggiunte.

SCACCHI. Esiste nel giuoco degli scacchi un problema curioso, che ha occupato i matematici, e che l' illustre Eulero non ha trovato indegno della sua attenzione: consiste esso nel far percorrere successivamente al *cavallo* tutte le 64 case della scacchiera, senza passare più di una volta sopra una medesima casa. Il *cavallo*, come ognuu sa, è uno dei pezzi del giuoco, il cui movimento obliquo si eseguisce di tre in tre case, saltando da una casa bianca sopra una nera o viceversa. Noi daremo un' idea della soluzione di questo problema, secondo ciò che ne ha detto Eulero nelle *Memorie dell' Accademia di Berlino*, per l' anno 1759.

Partendo da uno degli angoli della scacchiera, diamo ad ogni casa un numero d' ordine per distinguerla dalle altre: si avrà così:

57	58	59	60	61	62	63	64
49	50	51	52	53	54	55	56
41	42	43	44	45	46	47	48
33	34	35	36	37	38	39	40
25	26	27	28	29	30	31	32
17	18	19	20	21	22	23	24
9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	3	4	5	6	7	8

Ciò posto, se si suppone che il cavallo sia posto sulla casa 1, potrà da questa farsi saltare indifferentemente o sulla casa 11 o sulla 18. Giunto ad una di queste due case, potrà farsi saltare sopra cinque diverse case: infatti, se sia andato alla casa 11, potrà da questa passare sopra qualunque delle cinque case 17, 26, 28, 21, 5; e così successivamente. Ecco uno tra gl' infiniti ordini di case da percorrersi cominciando da 1:

1, 11, 5, 15, 32, 47, 64, 54
60, 50, 35, 41, 26, 9, 3, 13
7, 24, 39, 56, 62, 45, 30, 20
37, 22, 28, 38, 21, 36, 19, 25
10, 4, 14, 8, 23, 40, 55, 61
51, 57, 42, 59, 53, 63, 48, 31
16, 6, 12, 18, 33, 27, 44, 29
46, 52, 58, 43, 49, 34, 17, 2

Se, invece di numerare le case della scacchiera come abbiamo fatto, si numerassero nell' ordine nel quale sono percorse, avremmo l' ordine seguente nel quale il cavallo parte dalla casa 1 per andare in 2, quindi in 3, ec.; cosicchè giungendo alla casa 64 avrà percorso tutte le case:

42	59	44	9	40	21	46	7
61	10	41	58	45	8	39	20
12	43	60	55	22	57	6	47
53	62	11	30	25	28	19	38
32	13	54	27	56	23	48	5
63	52	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	64	15	34	3	50	17	36

È facile il vedere che prendendo un cammino simmetrico a quello qui indicato si può far partire il cavallo da qualunque degli altri angoli.

Se si volesse partire dalla casa segnata 64, camminando nell'ordine inverso dei numeri, si anderebbe a 63, poi a 62, ec. e si giungerebbe in fine alla casa 1. Ma questo cammino non sarebbe di utilità nessuna, quando si trattasse di cominciare da qualunque altra casa; e il problema generale consiste precisamente nel prendere un punto di partenza arbitrario.

Eulero fa osservare che il problema sarebbe risoluto se si trovasse un cammino in cui l'ultima casa segnata 64 fosse distante dalla prima di un salto di cavallo, dimanierachè si potesse saltare dall'ultima casa sulla prima. Poichè, determinato questo cammino, si potrebbe partire da una casa qualunque e seguire l'ordine dei numeri fino a 64, e di quì passare sopra la casa 1 e continuare il cammino fino alla casa da cui siamo partiti.

Un tal cammino, che Eulero chiama *cammino rientrante in sè stesso*, è molto più difficile a trovarsi di quello che di sopra abbiamo dato; ma noi non possiamo che rimandare alla memoria citata di sopra quelli tra i nostri lettori che volessero conoscere il metodo ingegnoso impiegato dall'illustre geometra, tanto per trovare i cammini semplici, quanto per ottenere quelli rientranti in sè stessi.

Ecco un cammino rientrante: esso basta per ottenere la soluzione completa del problema.

42	57	44	9	40	21	46	7
55	10	41	58	45	8	39	20
12	43	56	61	22	59	6	47
63	54	11	30	25	28	19	38
32	13	62	27	60	23	48	5
53	64	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	52	15	34	3	50	17	36

Fissato bene in mente questo cammino, si potrà far partire il cavallo da una casa qualunque. Se si tratta, per esempio, di partire dalla casa 30, si passerà per le case 31, 32, 33, ec. fino a 64, donde passando per 1, 2, 3, ec. si proseguirà il cammino fino alla casa 29.

Vandermonde si è pure occupato di questo problema nelle *Memorie* dell'Accademia delle Scienze di Parigi per l'anno 1771.

SCALA (*Geom.*). Linea retta divisa in parti eguali o disegnali, secondo l'uso al quale vien destinata.

In geografia e in topografia, una *scala* è una linea divisa in parti eguali e posta nella parte inferiore di una carta o di un piano, per servire di misura. Così, quando si vuol trovare sopra una carta la distanza di due punti, se ne prende l'intervallo con un compasso, e applicando questo intervallo sulla scala, si calcola la distanza per mezzo del numero di divisioni che esso contiene. Queste divisioni rappresentano leghe o metri o qualunque altra misura di lunghezza.

Prima di disegnare un piano sulla carta, si comincia sempre dal costruire la scala secondo la quale le parti che si vogliono rappresentare debbono essere situate le une rispetto alle altre, come lo sono sul terreno. Se, per esempio, si volesse che gli oggetti fossero mille volte più piccoli sulla carta di quello che lo sono sul terreno, si costruirebbe una scala di 100 metri o più, secondo il bisogno, prendendo per unità la grandezza reale di un millimetro, che rappresenterebbe sulla scala la grandezza di un metro. Allora due oggetti, la cui distanza sul terreno fosse di 20 metri, dovrebbero essere collocati sul piano a una distanza di venti unità della scala.

Questa scala, il cui uso è frequentissimo, si chiama *Scala delle parti eguali*, che prende poi il nome di *Scala dei decimi*, quando si costruisce in modo da poter trovare le parti decimali dell' unità. Passeremo ora ad esporre la costruzione di quest' ultima.

Scala dei decimi. Si tira una retta indefinita AM (*Tav.* CXVII, *fig.* 1), e su questa retta si porta, partendo dal punto A, dieci volte di seguito una stessa apertura di compasso AB, determinata dalla grandezza relativa che si vuol dare alla scala. Si suddivide AB in dieci parti eguali, che si numerano 1, 2, 3, 4, 5, ec., e da tutti i punti di divisione A, B, C, D, ec., 1, 2, 3, 4, ec. si conducono delle perpendicolari ad AM, facendo tutte queste perpendicolari eguali ad AB. Dopo aver diviso AO, NO, e BN come si è diviso AB, si uniscono per mezzo di rette i punti opposti di divisione, si conducono delle trasversali, la prima delle quali parta da B e cada sul punto *a* della prima divisione di NO, la seconda dal punto 1 e cada sul punto della seconda divisione di NO, e così di seguito fino all' ultima che partirà dal punto 9 e cadrà sul punto O. Si numerano quindi le divisioni come si vede nella figura.

È evidente che il triangolo rettangolo BN*a* è diviso in parti proporzionali, la prima delle quali vale *un decimo* di N*a*, la seconda *due decimi*, ec., cosicchè, se le parti 1, 2, 3, ec. rappresentano metri, e se su questa scala si vogliono prendere per esempio 10 metri e 4 decimi, si prenderà la distanza *c'e*, la quale rappresenterà questa quantità. Parimente, se si trattasse di 16^m,7, si prenderebbe la distanza *cg*.

Quando si è acquistata qualche abitudine, si possono anco suddividere a occhio le distanze 0,1, 0,2, 0,3, ec. e prendere per conseguenza anco i *centesimi*, almeno approssimativamente. Così *df* rappresenterebbe 23^m,55.

Siccome le scale costruite sulla carta si guastano facilmente colle punte del compasso, se ne costruiscono di ottone per uso degli ingegneri: si dicono scale da 1 a 1000, da 1 a 2000, da 1 a 25000, ec. secondochè l' unità della scala è 1000, 2000, 25000, ec. volte più piccola di un metro.

Scala logaritmica. Viene così chiamata una linea retta divisa in parti diseguali, e che rappresenta i logaritmi dei numeri o quelli dei seni e delle tangenti. Questa scala, inventata da Edmondo Gunter, ha fatto nascere l' idea del circolo logaritmico (*Vedi* Aritmometro). Con questa scala si eseguiscono con molta facilità e speditezza le moltiplicazioni e le divisioni.

SCALA ARITMETICA. Si dà questo nome alla progressione geometrica sulla quale si regola il valore relativo delle cifre semplici in un sistema qualunque di numerazione.

Nell' aritmetica attuale si è convenuto di non fare uso che di dieci caratteri, dando ad ognuno di essi un valore dieci volte, cento volte, mille volte, ec. più grande, secondochè occupa il secondo posto, il terzo, il quarto, ec. a sinistra della cifra delle unità (*Vedi* Aritmetica). Così, quando più cifre sono scritte le une accanto alle altre, se si scrive al di sotto la progressione geometrica

$$\ldots\ldots\; 10^5,\; 10^4,\; 10^3,\; 10^2,\; 10^1,\; 10^0$$

facendo corrispondere 10^0 colla cifra delle unità, il valore relativo di ogni cifra è eguale al suo valore assoluto moltiplicato pel termine corrispondente della progressione. Per esempio, 3 nel quarto posto a sinistra vale 3×10^3 o *tremila*; 2 nel terzo posto vale 2×10^2 o *dugento*. Ora, la scelta di dieci caratteri è del tutto arbitraria, ed egualmente bene se ne sarebbero potuti prendere più o meno per formare un sistema di numerazione atto come il nostro a dare la costruzione di tutti i numeri. *Vedi* Numerazione.

Supponiamo infatti che non si abbiano che i cinque caratteri 0, 1, 2, 3, 4, e diamo loro un valore di cinque in cinque volte più grande a misura che occupano posti sempre più lontani alla sinistra della cifra delle unità:

10 rappresenterà il numero *cinque*
100 il numero *venticinque*
1000 il numero *centoventicinque*
ec. ec.

vale a dire che se, dopo avere scritto nel modo di sopra indicato più cifre le une accanto alle altre, si fa loro corrispondere la progressione

$$\ldots\ldots\ (5)^5,\ (5)^4,\ (5)^3,\ (5)^2,\ (5)^1,\ (5)^0,$$

il loro valore relativo sarà eguale al loro valore assoluto moltiplicato pel termine corrispondente della progressione.

Dobbiamo fare osservare che in un tal sistema di numerazione la cifra 5 non esiste, e che adesso noi non ce ne serviamo che per ridurre al nostro sistema decimale le quantità espresse in questo sistema di cinque cifre.

In generale, essendo m il numero delle cifre di un sistema di numerazione, la progressione

$$\ldots\ldots\ m^5,\ m^4,\ m^3,\ m^2,\ m^1,\ m^0$$

è la *scala aritmetica* di questo sistema, ed m è la *base* della scala.

Sulle scale aritmetiche si possono proporre parecchi problemi, dei quali passeremo ad esporre i più importanti.

1. Una quantità A essendo espressa in una scala m, trovare la sua espressione in un' altra scala n.

Sia data l' espressione

$$A = am^p + bm^{p-1} + cm^{p-2} + \ldots\ldots + em^1 + fm^0 \ldots\ldots (1)$$

nella quale a, b, c ..... sono le cifre della scala m.

Indicando con a', b', c', d' ec. le cifre che si tratta di trovare nella scala n, e con q l' esponente dell' ultimo termine della progressione, si avrà

$$A = a'n^q + b'n^{q-1} + c'n^{q-2} + \ldots\ldots + e'n^1 + f'n^0 \ldots\ldots (2)$$

e il problema si troverà ridotto alla determinazione delle cifre a', b', c' ec. per mezzo delle cifre a, b, c, ec.

Ora, se si divide l' espressione (1) per n, il resto di questa divisione sarà necessariamente minore di n; così, indicando il resto con r e il quoziente con t, si avrà

$$am^p + bm^{p-1} + cm^{p-2} + \ldots\ldots = tn + r,$$

r sarà dunque la cifra delle unità di A nella scala n.

Dividendo nuovemente il quoziente t per n, si otterrà un secondo quoziente t_1 e un secondo resto r_1, e si avrà egualmente

$$t=t_1n+r_1.$$

Dividendo parimente t_1 per n, si avrà ancora

$$t_1=t_2n+r_2.$$

Proseguendo nalla stessa maniera fintantochè l' ultimo quoziente sia minore di n e riunendo i resultati, si avrà

$$\begin{aligned} A &= tn+r \\ t &= t_1n+r_1 \\ t_1 &= t_2n+r_2 \\ t_2 &= t_3n+r_3 \\ &\text{ec.} \quad \text{ec.} \\ t_{\mu-1} &= t_\mu n+r_\mu \end{aligned}$$

Sostituendo successivemente questi valori gli uni negli altri, si formerà l'espressione

$$A=t_\mu n^\mu+\ldots\ldots+r_3n^3+r_2n^2+r_1n+r,$$

che è evidentemente l' espressione di A nella scala n, poichè tutte le quantità r, r_1, r_2, r_3 ec. sono più piccole di n, e possono per conseguenza essere rappresentate dalle cifre di questa scala.

Così, per passare da un sistema di numerazione in un altro, bisogna dividere la quantità data per la base del sistema di cui si tratta, e il resto di questa prima divisione sarà la cifra delle unità. Si dividerà quindi il quoziente di questa prima divisione per la stessa base e si otterrà per resto la cifra delle diecine. Una terza divisione farà conoscere le cifre delle centinaja, ec.

Ma, per potere eseguire tutte queste divisioni, bisogna primieramente che la base del sistema cercato sia espressa in cifre del sistema dato, il che è sempre possibile. Infatti, essendo m la base del sistema dato ed n quella del sistema cercato, se n è minore di m, è una cifra del sistema m, se invece ha luogo il contrario, allora m è una cifra del sistema n. In quest' ultimo caso dividendo n per m, il resto della divisione farà conoscere le unità di n espresse nel sistema m; se il quoziente è minore di m, sarà esso la cifra delle diecina, se è maggiore, si continuerà l' operazione come abbiamo indicato di sopra.

Esempio. Essendo data la quantità 435321 espressa nella scala di 6 cifra o *senaria*, si domanda la sua espressione nella scala di otto cifre o *ottonaria*.

La base di quest' ultima essendo maggiore di 6, 6 è una delle sue cifre o dividendo dunque 10 per 6, si ha 2 per resto ed 1 per quoziente; la basa della scala ottonaria, espressa in cifre della scala senaria è per conseguenza 12.

Operando adesso come si è prescritto di sopra, si troverà ciò che segue:

```
435321 { 12
35     { 32540
 113
  52
```

Primo resto 01

32540 { 12 / 2341
45
54
20
Secondo resto 4

2341 { 12 / 154
114
101
Terzo resto 5

154 { 12 / 12
34
Quarto resto. 10

12 { 12 / 1 ultimo quoziente
Quinto resto 0

Il quarto resto 10, che è la base della scala senaria, è espresso dalla cifra 6 della scala ottonaria

Se uno dei resti fosse stato 11, si scorge colla stessa facilità che avrebbe esso corrisposto alla cifra 7.

I resti dunque sono 1, 4, 5, 6, 0, 1, e la quantità 435321 espressa nella scala ottonaria è 106541.

Per verificare questi calcoli, possiamo proporci di passare nuovamente dalla espressione trovata a quella data. Per esempio, in questo caso, la prima scala essendo eguale alla cifra 6 della seconda, si avrà

106541 { 6 / 13620
26
45
14
Primo resto. 01

13620 { 6 / 1755
56
42
40
Secondo resto. 2

1755 { 6 / 247
35
55
Terzo resto 3

247 { 6 / 33
27
Quarto resto 5

33 { 6 / 4 ultimo quoziente
Quinto resto. 3

I resti sono 1, 2, 3, 5, 3, 4, dunque si ha di nuovo

[106541] scala ottonaria = [435321] scala senaria.

2 *Problema*. Essendo data l'espressione di un numero in due scale differenti, e di una delle quali sia ignota la base, trovare questa base.

Sia il numero 4532 nella scala ordinaria o decimale, del quale si abbia l'espressione 16133 in una scala incognita. Se s' indica con x la base cercata, si avrà

$$4532 = 1x^4 + 6x^3 + 1x^2 + 3x^1 + 3x^0,$$

espressione che può mettersi sotto la forma

$$x^4 + 6x^3 + x^2 + 3x + 3 - 4532 = 0,$$

equazione del quarto grado dalla quale dipende il valore di x. Ora, per risolvere questa equazione, che si riduce a

$$x^4 + 6x^3 + x^2 + 3x - 4529 = 0 \; \ldots\ldots \; (a)$$

deve osservarsi che la base cercata x deve essere più piccola di 10, perchè l'espressione 16133 contiene più cifre di 4532, e ciò non ostante deve essere maggiore di 6, poichè 6 è una delle cifre della scala incognita. La base cercata non può dunque essere che 7, 8, o 9. Inoltre il valore di x essendo radice della equazione (a) deve dividere esattamente l'ultimo termine 4529 di questa equazione (*Vedi* Equazione); così, provando l'uno dopo l'altro i numeri 7, 8, e 9, si troverà che il solo divisore esatto è 7, e che per conseguenza si ha $x = 7$. Si consulti quanto abbiamo detto all' articolo Numerazione sui principj della teoria delle *Scale aritmetiche*.

Scala di fronte (*Prosp.*). Retta parallela alla linea orizzontale, e divisa in parti eguali, che rappresentano metri o suddivisioni del metro.

Scala di sfuggita (*Prosp.*). Retta verticale divisa in parti diseguali, che rappresentano metri o suddivisioni del metro. *Vedi* Prospettiva.

SCALE DI PENDENZA (*Geom.*). Dicesi *Geometria delle scale di pendenza* uno dei rami più importanti della geometria descrittiva.

Nella geometria descrittiva, si determina la posizione dei punti nello spazio per mezzo delle loro projezioni sopra due piani che si tagliano; e per maggiore semplicità si suppone che uno di questi piani sia orizzontale e l'altro verticale (*Vedi* Geometria descrittiva). Questo metodo, che è rigoroso e di un' applicazione facile ogni volta che si tratti di superficie la cui generazione possa essere rigorosamente definita, diviene insufficiente quando si vuole applicare a superficie determinate soltanto da condizioni che non possono essere espresse per mezzo dell' analisi. Questa sorta di quesiti presentandosi frequentemente nelle applicazioni, si è dovuto cercare un mezzo per poterli risolvere, e questo mezzo si è trovato nelle *scale di pendenza*. In questa geometria nuova, la posizione dei punti nello spazio è determinata dalla loro projezione orizzontale e dalla loro distanza da un piano orizzontale fisso di posizione e stendentesi al di sopra di tutti i punti che si considerano. Queste distanze, misurate sulle verticali abbassate dai punti su questo piano, sono espresse in numeri. Da ciò è evidente che una linea retta sarà compiutamente determinata, quando si conoscerà la sua projezione orizzontale e le distanze o *coste* di due de' suoi punti. Supponiamo infatti che essendo AB (*Tav.* CXVII, *fig.* 2) la projezione orizzontale di una retta, ed α e β le coste de' suoi punti A e B, si cerchi la costa x di uno qualunque de' suoi punti C.

Nei punti A, B e C alziamo delle perpendicolari al piano orizzontale di projezione. Sia MN l'intersezione del piano orizzontale, rapporto al quale si contano le coste dei punti della retta, e che prende il nome di *piano di confronto*, col piano projettante della retta. Se, a partire dai punti D ed E, si portano delle lunghezze DA′, EB′ eguali ad α a β, la retta A′B′ sarà la retta nello spazio, e se pel punto A′ e nel piano projettante si conduca l'orizzontale A′C″, dai due triangoli simili A′B′B″, A′C′C″ si dedurrà la proporzione

$$A'B'' \text{ o } AB : A'C'' \text{ o } AC :: B'B'' : C'C'',$$

e, indicando AB con a e AC con b, questa proporzione diverrà

$$a : b :: \beta - \alpha : x - \alpha,$$

nella quale tutto è noto fuori di x, e che per conseguenza basterà a determinare questa incognita. Se al contrario x fosse nota e si domandasse la posizione del punto che le corrisponde, la stessa proporzione servirebbe a risolvere il problema, e allora l'incognita sarebbe b.

Un piano rimanendo completamente determinato allorchè è nota la posizione di tre de' suoi punti, ci faremo adesso a cercare come si possano determinare la costa di un punto qualunque di un piano, quando si conoscono le projezioni orizzontali e le coste di tre de' suoi punti.

Siano A, B e C (*Tav.* CXVIII, *fig.* 1) le projezioni di tre punti di un piano, ed α, β e γ le coste di questi tre punti. Si domanda la costa x di un punto qualunque D situato su questo piano. In ciò che segue supporremo, per fissare le idee, $\alpha < \beta < \gamma$.

Uniamo i tre punti A, B e C per mezzo di rette, e sopra AC determiniamo il punto E che ha la medesima costa del punto B. La retta BE sarà orizzontale, e tutte le orizzontali che potranno condursi nel piano dato le saranno parallele, perchè saranno le intersezioni di una serie di piani paralleli con un medesimo piano. Pel punto D conduciamo parallelamente a BE una orizzontale che incontri la retta AB in F. Questo punto trovandosi sulla retta AB, potremo dedurne la proporzione

$$AB : AF :: \beta - \alpha : x - \alpha,$$

dalla quale per conseguenza potrà ottenersi il valore di x. Se dal punto A si abbassa la retta AH perpendicolare sull'orizzontale BE, si avrà pure la proporzione

$$AG : AI :: AB : AF,$$

ossia

$$AG : AI :: \beta - \alpha : x - \alpha,$$

la quale servirà al pari della precedente a determinare il valore di x.

Se adesso si determina il punto L in modo che la differenza tra la costa del punto A e quella del punto L sia di $1^m,00$, portando da L in M la lunghezza AL, il punto M avrà una costa che differirà da quella del punto A di $2^m,00$, poichè nella precedente proporzione il secondo antecedente essendo il doppio del primo, la stessa relazione deve necessariamente esistere tra i conseguenti. Si potrà dunque in tal modo ottenere la posizione di tutti i punti del piano le cui coste differiscono da quella del punto A di un numero esatto di metri. Dividendo la lunghezza AL in dieci parti eguali, si avranno dei punti successivi le cui coste non differiranno che di $0^m,10$. Per ottenere allora la costa di un punto qualunque O del piano, basterà abbassare da questo punto

una perpendicolare sulla retta AH, ed osservare poi la graduazione. Questa retta, che serve così a determinare le coste di tutti i punti di un piano, si dice la *Scala di pendenza* di questo piano. Ogni retta condotta dal punto A potrebbe servire di scala di pendenza, ma è molto più semplice il condurla perpendicolare alla direzione delle orizzontali del piano.

Se il piano fosse verticale, sarebbe determinato dalla sua traccia e dalle coste di due punti di questa traccia. Se fosse orizzontale, basterebbe una sola costa per determinarlo.

Quando una linea curva sarà piana, rimarrà completamente determinata dalla sua projezione orizzontale e dalle coste di tre dei suoi punti; perchè nello spazio rappresenterà essa l' intersezione del cilindro verticale che la projetta col piano che la comprende, intersezione che rimane completamente determinata dalle coste di tre de' suoi punti.

Se s' immagina che una superficie curva sia tagliata da una serie di piani orizzontali equidistanti, e se sopra un medesimo piano orizzontale si projettano tutte le curve d' intersezione, queste curve, che prendono il nome di *curve orizzontali o di livello*, basteranno insieme colle loro coste a determinare completamente la superficie. Supponiamo infatti che si voglia determinare la costa di un punto situato tra due curve orizzontali. Se pel punto si fa passare un piano verticale normale a quella delle curve che gli è più prossima, taglierà esso la superficie secondo una curva che si projetterà sulla traccia orizzontale del piano, traccia che sarà perpendicolare alla projezione della curva alla quale questo piano è normale nello spazio. Se le curve tra le quali è situato il punto della superficie sono assai vicine, si potrà ritenere che la curva di sezione del piano normale si confonda con una retta che passi pel punto e che termini alle due curve: le coste delle sue estremità saranno dunque note. Ciò posto, nulla vi sarà di più facile che di ottenere la costa del punto domandato. Si comprenda allora che alla superficie data vengono sostituite delle porzioni di superficie curve non sviluppabili generate dal moto di una retta che si appoggia costantemente sopra due curve consecutive, colla condizione di conservarsi costantemente perpendicolare ad una di esse.

Compresi bene questi preliminari, vediamo come si possano risolvere i differenti quesiti trattati colla geometria descrittiva.

I. *Essendo data una retta per mezzo della sua projezione e delle coste di due de' suoi punti, trovare la tangente dell' angolo che essa fa coll' orizzonte.*

Se per uno dei punti noti della retta si conduce un' orizzontale, e se dall' altro si abbassa su questa linea una perpendicolare, si formerà un triangolo rettangolo, nel quale uno dei lati dell' angolo retto sarà la lunghezza della projezione della retta, e l' altro, opposto all' angolo del quale si cerca la tangente, sarà eguale alla differenza tra le coste de' due punti. Per conseguenza la tangente dell' angolo formato da una retta col piano orizzontale è eguale alla differenza tra le coste dei due punti noti di questa retta, divisa per la distanza che gli separa.

Se si cercasse di far passare per un punto dato una retta che facesse coll' orizzonte un angolo dato, il problema sarebbe indeterminato, poichè tutte le generatrici di un cono avente per vertice il punto dato e formanti coll' orizzonte l' angolo proposto, sodisfarebbero egualmente al quesito. Nulladimeno questo quesito essendo di un uso frequente, indicheremo come potrebbe determinarsi la costa di un punto di una tal retta. Immaginiamo sul punto una verticale di un numero esatto di metri ed una orizzontale avente una lunghezza tale che il rapporto tra queste due lunghezze sia eguale alla tangente dell' angolo dato.

Unendo le estremità di queste due rette, avremo una delle posizioni della retta nello spazio, e nel suo movimento descriverà essa nello spazio una circonferenza che sarà projettata da una circonferenza avente per raggio la lunghezza dell' orizzontale, e di cui tutti i punti saranno atti a dare la costa cercata.

II. *Determinare il punto d' intersezione di due rette che si tagliano.*

Le projezioni orizzontali di queste due rette dovendo necessariamente tagliarsi in un punto che è la projezione del punto d' intersezione nello spazio, si determinerà la costa di questo punto per mezzo delle nozioni precedenti. Se le due rette fossero in un medesimo piano verticale, le loro projezioni orizzontali si confonderebbero e questo mezzo non sarebbe più di alcun uso. Siano dunque A e B (*Tav.* CXVII, *fig.* 3) i due punti della prima retta le cui coste α e β sono note, e C' e D' i punti della seconda le cui coste sono γ e δ. Se pei punti A e B si conducono delle verticali fino al loro incontro in E ed F colla retta CD, si potranno determinare le coste ε ed η di questi punti, ed a motivo dei triangoli simili B'OF ed OA'E si avrà la proporzione

$$EO : OF :: A'E : B'F ;$$

ma siccome si ha pure

$$EO : OF :: EH : HG ,$$

ove EG è una retta orizzontale; dunque si conclude

$$EH : HG :: A'E : B'F ,$$

donde si trae

$$(EH + HG) = EG = AB : EH :: A'E + B'F : A'E ;$$

e se s' indica con x la distanza $EH = AI$, e con a la lunghezza AB, si otterrà

$$a : x :: (\varepsilon - \alpha) + (\beta - \eta) : \varepsilon - x ,$$

proporzione che basta per determinare x. Conosciuto il punto I, si otterrà facilmente la sua costa.

III. *Essendo dati due piani, trovare la loro intersezione.*

Si determineranno primieramente le scale di pendenza dei due piani, e tanto nell' uno che nell' altro si condurranno delle orizzontali che abbiano una stessa costa. I punti d' intersezione di queste rette appartenendo evidentemente alla intersezione dei due piani basteranno a determinarla. Se uno dei piani fosse orizzontale, l' intersezione sarebbe orizzontale, e basterebbe cercare tra le orizzontali del secondo piano quella che avesse la medesima costa del primo piano.

Se le orizzontali dei due piani fossero parallele, la loro intersezione sarabbe pure una orizzontale parallela a queste. Per determinarla, basterà immaginare un terzo piano che tagli i primi due lungo due rette che si taglieranno in un punto appartenente all' intersezione comune dei due piani.

Per trovare l' intersezione di una retta e di un piano, s'immaginerà per questa retta un piano che taglierà il primo lungo una retta che conterrà il punto cercato, il quale per conseguenza si troverà all' intersezione di questa retta colla retta data (*Tav.* CXXI, *fig.* 4).

IV. *Da un punto dato abbassare una perpendicolare sopra un piano.*

Questa retta avrà evidentemente la sua projezione perpendicolare alle orizzontali del piano e per conseguenza parallela alla scala di pendenza: basterà dunque determinare la costa d' un altro de' suoi punti. Immaginiamo condotto per la retta un piano verticale: esso taglierà il piano dato lungo la linea della

massima pendenza: sia dunque AB la retta e BC la linea della massima pendenza del piano (*Tav.* CXV, *fig.* 7).

Pel punto A conduciamo l'orizzontale AC; a partire dal punto C portiamo su questa retta una lunghezza DC espressa esattamente in metri, ed abbassiamo la verticale DE, la cui lunghezza sarà eguale alla differenza tra le coste dei ponti C ed E. Se ora si prende AF eguale a DE, e se si conduce la verticale FG, sarà questa verticale eguale a DC. Per conseguenza la differenza tra la costa del punto G e quella del punto A sarà eguale alla lunghezza DC.

Sarà allora facilissimo il determinare questa costa senza fare nessuna costruzione. Sia infatti AB la scala di pendenza del piano (*Tav.* CXVII, *fig.* 4) e CD la retta perpendicolare a questo piano, condotta pel punto dato. A partire dal punto H che ha la stessa costa del punto C, si porterà una lunghezza HI di un numero esatto di metri, e dal punto C si porterà la lunghezza CG eguale alla differenza tra le coste di punti H ed I. Allora la differenza tra la costa del punto G e quella del punto C sarà eguale alla lunghezza HI.

La determinazione del punto O nel quale questa retta incontra il piano non presenta difficoltà nessuna.

Per mezzo di ciò che abbiamo detto si potrà per una retta data condurre un piano perpendicolare ad un piano dato.

V. *Condurre per un punto dato un piano perpendicolare ad una retta data.*

La scala di pendenza del piano cercato dovendo esser parallela alla projezione della retta, se per la projezione del punto dato si conduca una perpendicolare alla projezione della retta, questa linea sarà un'orizzontale del piano domandato, e considerando la projezione della retta data come la scala di pendenza di un piano al quale la scala di massima pendenza del piano cercato debba essere perpendicolare, il quesito si ridorrà esattamente al precedente.

VI. *Per un punto dato abbassare una perpendicolare sopra una retta data.*

Pel punto dato si condurrà un piano perpendicolare alla retta data. Si cercherà il suo punto d'intersezione con questa retta, e unendo questo punto e il punto dato con una retta, il problema sarà risoluto.

VII. *Trovare la tangente dell'angolo formato da due rette.*

Conducendo da uno dei punti di una delle rette una perpendicolare sull'altra, si formerà un triangolo rettangolo nel quale il rapporto dei due lati dell'angolo retto sarà eguale alla tangente cercata.

Se si volesse avere l'angolo di una retta e di un piano, si abbasserebbe da uno dei punti della retta una perpendicolare sul piano dato, e dividendo la lunghezza di questa retta per la distanza del suo piede dal punto nel quale la retta incontra il piano, si avrebbe il valore della tangente dell'angolo cercato.

Per trovare l'angolo di due piani, si determinerà primieramente la loro intersezione, si condurrà perpendicolarmente ad essa un piano del quale si cercheranno le intersezioni coi due piani dati, e l'angolo di queste due intersezioni sarà l'angolo cercato.

VIII. *Trovare la più corta distanza tra due rette non situate in un medesimo piano.*

La soluzione di questo quesito si tratterà coi metodi indicati dalla geometria, osservando però di eseguire coi metodi esposti di sopra le differenti costruzioni necessarie per determinare la retta domandata (*Tav.* CXXI, *fig.* 2).

IX. *Descrivere, sopra una superficie curva determinata dalle sue orizzontali e cominciando da un punto preso sopra di essa, una curva la cui tangente faccia sempre lo stesso angolo coll'orizzonte.*

Si considererà la distanza verticale che separa due curve come l'altezza dell'inclinazione della tangente, e se, partendosi dal punto dato, si porta con un

compasso una lunghezza eguale alla base di questa inclinazione, in modo che la sua estremità incontri la curva seguente, questa retta sarà la projezione della curva domandata. Questa soluzione non è rigorosa che quando le curve si suppongono equidistanti e tanto vicine da poter supporre che le parti della superficie occupate dalla base della pendenza siano piane. Perchè poi sia essa possibile bisogna che la base della pendenza sia almeno eguale alla minima distanza tra due curve consecutive. Essa presenta inoltre un'infinità di soluzioni poichè per ogni punto vi saranno due direzioni che vi soddisfaranno.

X. *Trovare l' intersezione di una superficie con un punto dato.*

Essendo determinata la scala di pendenza del piano, si condurranno le orizzontali che hanno le stesse coste delle curve della superficie, e i punti dal loro incontro colle curve apparterranno all' intersezione domandata. Potrà accadere, in forza della forma della superficie, che si abbiano più curve d'intersezione indipendenti le une dall' altre (*Tav.* CXXII, *fig.* 3).

Se venisse proposto di determinare l'intersezione di un cono con un piano, si supporrà il cono retto ed avente il suo asse verticale, ed allora le curve equidistanti che lo determinano sono circonferenze di circoli concentrici, e la determinazione della curva d' intersezione non presenta nessuna specie di difficoltà (*Tav.* CXVIII, *fig.* 2).

XI. *Trovare l' intersezione di due superficie date.*

I punti di questa intersezione saranno evidentemente dati dai punti d' incontro delle curve aventi le stesse coste e faranno parte di una o di più curve secondo le forme delle superficie (*Tav.* CXXII, *fig.* 1).

XII. *Per un punto dato sopra una superficie condurre ad essa un piano tangente.*

Questo piano contenendo tutte le tangenti condotte alla superficie nel punto dato, passerà per la tangente alla curva orizzontale che passa per questo punto, e questa retta sarà una dalle sue orizzontali. Se ora s' immagina pel punto dato un piano verticale perpendicolare a questa orizzontale, taglierà esso la superficie secondo una curva il cui elemento dovrà trovarsi nel piano tangente. Ma questa curva si projetta lungo una retta perpendicolare alla projezione della curva orizzontale che passa pel punto dato, e la costa della sua estremità è la stessa di quella della curva orizzontale successiva, per conseguenza la scala di pendenza del piano richiesto è completamente determinata. Siccome si può considerare tanto la curva orizzontale superiore a quella che passa pel punto dato, quanto quella che le è inferiore, il problema è in generale suscettibile di due soluzioni, che si ridurranno ad una sola quando le curve saranno infinitamente vicine, perchè allora i due elementi della curva normale si confonderanno in direzione e non daranno che una tangente. Se s' immagina che uno dei due piani tangenti giri intorno alla sua orizzontale di contatto, abbandonando l' elemento di contatto in modo da venire a stendersi sull' altro piano, si avrà un' infinità di soluzioni limitate dai due piani primitivi.

XIII. *Per una retta data condurre un piano tangente ad una superficie data.*

Nel punto in cui questo piano tocca la superficie, la sua orizzontale dovrà confondersi colla tangente alla curva orizzontale che passa per questo punto. Se dunque si segnano sulla retta i punti che hanno le stesse coste delle curve orizzontali della superficie, e se per ognuno di questi punti si conduce una tangente alla curva che abbia la stessa costa del punto, una di queste tangenti dovrà essere l' orizzontale cercata. Ma il piano tangente che passa per la retta data e per questa tangente dovrà contenere l' elemento della superficie perpendicolare alla tangente e che passa pel punto di contatto e per conseguenza anco

la tangente alla superficie all'estremità di questo elemento, dunque questa tangente dovrà esser parallela alla prima. Fra tutte le tangenti condotte alle curve orizzontali dai punti della retta data aventi le stesse coste, quella che soddisfarà al quesito sarà tale che l'orizzontale immediatamente inferiore o superiore le sarà parallela. Questa soluzione sarebbe rigorosa se le curve fossero infinitamente vicine, ma siccome sono ad una distanza finita, sarebbe impossibile il soddisfare a questa condizione del parallalismo, quantunque però il problema fosse suscettibile di soluzione. Si esamineranno allora le variazioni dell'angolo che le tangenti condotte alle curve orizzontali fanno colla retta data. Se quest'angolo, dopo aver cresciuto o diminuito in un modo continuo, comincia a decrescere o crescere in un modo continuo, è evidente che vi sarà un massimo o un minimo, e la tangente in questo punto sarà quella da scegliersi. Infatti, se si ristabilisce la continuità della superficie e se si conducono tutte le tangenti per la retta, le variazioni dell'angolo diverranno infinitamente piccole, e non potranno cangiare di segno senza passare per zero. Per conseguenza, nella vicinanza di questo punto, vi saranno due orizzontali parallele (*Tav.* CXXI, *fig.* 3).

Se la retta data fosse orizzontale, sarebbe pure una delle orizzontali del piano cercato, e per conseguenza la tangente alla curva orizzontale che passa pel punto di contatto della superficie col piano dovrebbe esserle parallela. Si condurranno allora a ciascuna curva delle tangenti parallele alla retta data, e per un punto della projezione della retta si condurrà una retta che tagli le projezioni di queste tangenti. Partendosi dal medesimo punto si porteranno sulla retta delle parti proporzionali alle distanze verticali di questa retta dal piano di ognuna delle curve, si distingueranno questi punti di divisione con segni corrispondenti alle curve medesime, e si uniranno per mezzo di rette coi punti d'intersezione delle tangenti alle curve colla retta che passa pel punto di partenza. Quando due di queste rette successive saranno parallele, corrisponderanno a due tangenti il cui piano passerà per la retta data, e per conseguenza alle due tangenti dell'elemento di contatto. Questa condizione del parallelismo non potendo essere adempita che quando le curve sono infinitamente vicine, si esaminerà il cammino dell'angolo di queste rette colla retta data, e quello che darà luogo ad un massimo o ad un minimo, soddisfarà evidentemente al quesito (*Tav.* CXXI, *fig.* 1).

XIV. *Condurre ad una superficie data un piano tangente parallelo ad un piano dato.*

La direzione delle orizzontali del piano cercato è nota perchè debbono queste orizzontali esser parallele a quelle del piano dato; e se ad ogni curva orizzontale si conduca una tangente parallela all'orizzontale del piano dato, una di esse dovrà trovarsi nel piano cercato. Nel piano dato si condurranno due orizzontali la cui distanza verticale sia eguale alla distanza che separa verticalmente due curve consecutive, e si prenderà un'apertura di compasso eguale alla linea che misura la distanza tra le projezioni di queste orizzontali. Si porterà questa distanza tra tutte le orizzontali tangenti alle curve, e, quando vi sarà egualianza, il piano tangente passerà evidentemente per queste due tangenti. Se questo spazio dopo essere stato più grande diviene più piccolo, allora il piano tangente sarà tangente alla curva orizzontale che separa gl'intervalli maggiori dagl'intervalli minori.

XV. *Per un punto dato condurre un cono tangente ad una superficie data, e determinare la curva di contatto.*

Se pel punto dato si fa passare una serie di piani verticali, dei quali si determinerà l'intersezione colla superficie, e se per lo stesso punto si conducono

delle tangenti a queste curve d' intersezione, queste tangenti saranno le generatrici del cono domandato, e i loro punti di contatto apparterranno alla curva di contatto del cono e della superficie.

Col metodo che abbiamo esposto si potranno risolvere tutti i quesiti che potessero venir proposti, e si vedrà che spesso i mezzi che se ne otterranno saranno molto più spediti di quelli della geometria descrittiva ordinaria, anco nel caso in cui si tratti di superficie definite analiticamente. Si consulti il n.° 6 del *Memoriale dell' ufficiale del genio*, e la *Geometria descrittiva* di Leroy.

SCALENO (*Geom.*). Nome derivato dalla greca parola σκαληνος, *zoppo*, che si dà in geometria al triangolo che ha i suoi tre lati diseguali. *Vedi* TRIANGOLO.

SCENOGRAFIA (*Prosp.*). Rappresentazione di un corpo in prospettiva sopra un piano con tutte le sue dimensioni e tale quale comparisce all' occhio. La *Scenografia* è la stessa cosa che la *prospettiva* propriamente detta. Questo nome deriva dalle parole greche σκηνη, *scena* e γραφω, io *descrivo*. *Vedi* PROSPETTIVA.

SCHEAT DI PEGASO (*Astron.*). Nome di una stella di seconda grandezza della costellazione di Pegaso. Si trova nei cataloghi indicata colla lettera β.

SCHEINER (CRISTOFORO), gesuita e dotto astronomo, nacque nel 1575 a Wald, presso Mundelheim in Svevia. Di venti anni entrò nell' ordine di S. Ignazio, e fu incaricato d' insegnare la matematiche a Ingolstadt. In tre lettere dirette a Marco Velser, ch' ei pubblicò nel 5 Gennajo 1612 ad Angosta, racconta che nel mese di Marzo 1611, salito sulla torre della chiesa del suo ordine con uno dei suoi confratelli, per fare alcune osservazioni, gli sembrò di scorgere alcune macchie nerastre sul disco del sole; allora non fece caso di questa singolarità, ma nell' Ottobre successivo essendogli accaduto di vedere di nuovo le stesse macchie, le fece osservare ad alcuni dei suoi confratelli. Ei narra che in tale osservazione erasi valso dell' elioscopio, strumento di cui Weidler gli attribuisce l' invenzione, ma che egli avea soltanto perfezionato sostituendo ai vetri ordinarj dell' oculare vetri colorati. Velser fu sollecito di indirizzare un esemplare di tali lettere a Galileo; ma quel grande uomo gli rispose che avea scoperto le macchie solari diciotto mesi innanzi. Giovanni Fabricio (*Vedi* FABRICIO) le aveva annunziate in un' opera stampata sei mesi prima di quella del p. Scheiner; ma quali si fossero i diritti dei due astronomi a tale scoperta, non hanno potuto recare nessun nocumento a quelli di Galileo, il quale dichiara di aver fatto, in Italia, le stesse osservazioni, quantunque non le avesse pubblicate. Nello stesso anno 1612, il p. Scheiner fece nuove osservazioni sulle macchie solari e sui satelliti di Giove e le trasmise a Velser per stamparle: sono esse riunite alle tre lettera precedenti nell' edizione di Roma, 1613, in-4, che ha per titolo: *De maculis solaribus tres epistolae*; *de iisdem et stellis circa Jovem errantibus, disquisitio Apellis post tabulam latentis* (Queste ultime parole alludono all' anonimo che l' autore era obbligato ad osservare per obbedienza agli ordini de' suoi superiori). In seguito il p. Scheiner passò a professare le matematiche a Roma, e prese a sostenere contro Galileo l' immobilità della terra, il giro annuo del sole ed altri errori dell' astronomia antica oggidì affatto abbandonati. Successivamente si recò a Neiss in Slesia, in qualità di rettore del suo ordine, e vi morì il 17 Luglio 1650.

Oltre l' opera di sopra citata, abbiamo del p. Scheiner: I *Disquisitiones mathematicae de controversiis et novitatibus mathematicis*, Ingolstadt, 1614, in-4: sono ragionamenti poco concludenti contro il sistema di Copernico e le scoperte di Galileo; II *Novum solis elliptici phaenomenum*, Augusta, 1615, in-4; III *Exegesis fundamentorum gnomonices*, Ingolstadt, 1616, in-4; IV *Refractiones coelestes*, ivi, 1617, in-4; V *Oculus sive fundamentum opticum*, Due-Ponti, 1619, in-4; è una descrizione dell' occhio; VI *Rosa ursina*, *sive*

sol ex admirando facularum et macularum suarum phaenomeno varius, Bracciano, 1630, in-fol. Su quest' opera, nella quale il p. Scheiner espone la storia della sua scoperta delle macchie solari, si consulti la *Storia delle matematiche* di Montucla che ne dà un'analisi particolarizzata. VII *Pantographice seu ars delineandi*, *ec.*, Roma, 1631, in-4. L'autore vi descrive, nel primo libro, la costruzione e gli usi del pantografo, strumento oggidì sì noto, che si adopra per copiare i quadri, cambiando le loro proporzioni anco senza saper disegnare. Nel secondo libro applica la sua invenzione alla delineazione de' corpi solidi, e il suo pantografo ha il vantaggio di disegnare con un tratto continuato, invece di cercare laboriosamente, gli uni dopo gli altri, una moltitudine di punti, come convien fare con istrumenti molto più complicati, siccome il *Coordonografo* di Boucher, ec. L'opera del p. Scheiner essendo pochissimo conosciuta, si annunziano quasi ogni anno, quali nuove scoperte, degli strumenti da disegnare la prospettiva assai meno perfetti del suo, o che non ne sono che imitazioni. VIII *Prodromus de sole mobili et stabili terra contra Galileum de Galileis*, 1651, in-fol., opera postuma.

SCHIACCIAMENTO (*Geod.*). Si dà in generale questo nome alla differenza dei semiassi di un'ellisse, prendendo uno di essi per unità. Considerando la terra come una ellissoide di rivoluzione schiacciata ai poli, il suo schiacciamento o *ellitticità* α ha per espressione

$$\alpha = \frac{a-b}{a},$$

ove a è il raggio dell' equatore e b quello del polo.

Lo schiacciamento e l'eccentricità che ha per quadrato $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ sono dunque insieme legati dalla relazione

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2.$$

Il valore numerico di una di queste quantità si deduce ordinariamente dalla misura di due archi di meridiano situati sotto latitudini molto differenti. Per esempio, si sa (*Vedi* RETTIFICAZIONE) che se λ e λ' sono le latitudini delle estremità di un arco del meridiano, si ha

$$A = a(1-e^2)\left[m(\lambda-\lambda') - n\,\mathrm{sen}(\lambda-\lambda')\cos(\lambda+\lambda')\ .\ .\ .\ .\ .\right],$$

serie nella quale si ha $m = 1 + \frac{3}{4}e^2\ .\ .\ .\ .$, $n = \frac{3}{4}e^2\ .\ .\ .\ .\ .$ Così, per un altro arco A' terminato alle latitudini ψ e ψ', si ha parimente

$$A' = a(1-e^2)\left[m(\psi-\psi') - n\,\mathrm{sen}(\psi-\psi')\cos(\psi+\psi')\ .\ .\ .\ .\ .\right].$$

Ciò posto, se si dividono queste espressioni l'una per l'altra e se, per brevità, si faccia

$$\lambda - \lambda' = \varphi\ ,\quad \lambda + \lambda' = \Phi$$
$$\psi - \psi' = \varphi',\quad \psi + \psi = \psi'$$

si avrà infine, esprimendo al solito con π il rapporto della circonferenza al diametro,

$$e^2 = \frac{\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{180}\left(A\varphi' - A'\varphi\right)}{A\,\mathrm{sen}\,\varphi'\cos\Phi' - A'\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\Phi} = \frac{4}{3}\,\frac{M}{N}$$

vale a dire presso a poco il doppio dello schiacciamento.

Prendiamo per applicazione l'arco A misurato in Francia da Delambre e Méchain, e l'arco A' misurato sotto l'equatore da Bouguer e La Condamine. In questo caso si ha

$$A = 551583^t,6 \qquad \lambda = 51^\circ\ 2'\ 9'',2$$
$$\varphi = 9^\circ,67295 \qquad \lambda' = 41\ 21\ 46,58$$
$$A' = 176877^t \qquad \psi = +\ 0^\circ\ 2'\ 31''$$
$$\varphi' = 3^\circ,1175 \qquad \psi' = -\ 3\ \ 4\ \ 32$$

ed operando per mezzo dei logaritmi con 7 decimali, si trova

$$M = 150^t,79, \qquad N = 31199^t,18,$$

donde si ottiene $e^2 = 0,006444$, e presso a poco

$$\varrho = 0,003222 = \frac{1}{310}.$$

È evidente che, trovato e^2, il valore del raggio a dell'equatore si dedurrebbe da una delle serie A, A' indicate di sopra, e finalmente si avrebbe

$$b = a\sqrt{(1 - e^2)}.$$

In questa guisa sono state determinate le dimensioni della terra. *Vedi* TERRA.

SCHILLER (Il P. GIULIO), astronomo, nato nel secolo XVI in Augusta, tentò di sostituire agli antichi simboli e nomi delle costellazioni tratti dalla mitologia altri nomi e simboli cavati dalla Sacra Scrittura: così, per esempio, ai 12 segni dello zodiaco diede le figure e i nomi dei 12 Apostoli, ec. Ei pubblicò, nel 1627, in aggiunta alla *Uranometria nova* di Bayer, un atlante celeste compilato su questi nuovi principj, col titolo di *Coelum stellatum christianum.* L'enumerazione delle costellazioni composte dal p. Schiller si trova nel *Cursus mathematicus* del p. Schott, e nell'*Almagestum* di Riccioli. Si può consultare quanto se ne dice nella *Storia dell' astronomia moderna* di Bailly e in quella di Delambre.

SCHOTT (GASPARE), dotto fisico e matematico dell'ordine de' gesuiti, nacque nel 1608 a Koenigshofen, nella diocesi di Vurtzburgo. Inviato dai suoi superiori a Palermo, vi professò per molti anni le matematiche; quindi si recò a Roma, ove ascoltò le lezioni del p. Kircher di cui divenne amico; e tornato in seguito a Vurtzburgo divise tutto il suo tempo tra l'insegnamento delle scienze e la compilazione delle numerose sue opere. Ei morì in questa ultima città il 22 Maggio 1666. Mercier di Saint-Léger ha pubblicato una *Notizia ragionata delle opere del p. Schott*, Parigi, 1785, in-8, di 108 pag. » Tali scritti, egli dice, non sono immuni » da difetti; l'autore gli ha caricati di una moltitudine di cose inutili, arri» schiate ed anco, se vuoli, ridicole; ma vi si trovano de' fatti curiosi, delle osser» vazioni preziose, delle esperienze degne di attenzione, e possono mettere sulla » via di parecchie scoperte quelli dei nostri fisici che avranno il coraggio di sca» vare in tale miniera ricca abbastanza perchè non abbiano a pentirsi dell'opera » impiegatavi ». Le opere principali del p. Schott sono le seguenti: I *Cursus mathematicus, sive absoluta encyclopaedia in XXVIII libris*, Vurtzburgo, 1661, in-fol.; II *Mechanica hydraulico-pneumatica*, ivi, 1657, in-4; III *Magia universalis naturae et artis, sive recondita naturalium et artificialium scientia*, ivi, 1657-59, 4 vol., in-4. È questa una vasta enciclopedia delle cognizioni più rare che al suo tempo si avevano nell'ottica, nell'acustica, nelle matematiche e nella fisica, e vi sono trattati i problemi più curiosi e interessanti che queste scienze

possono presentare: è senza contrasto l'opera più importante del p. Schott; ad essa come supplemento deve unirsi la seguente; IV *Physica curiosa*, *sive mirabilia naturae et artis*, *libris XII comprehensa*, ivi, 1662, in-4; V *Anatomia physico-hydrostatica fontium et fluminum explicata*; *accedit appendix de vera origine Nili*, ivi, 1663, in-8; VI *Technica curiosa sive mirabilia artis, libris XII comprehensa*, Norimberga, 1664; ivi, 1687, 2 vol. in-4; VII *Schola stenographica in classes octo distributa*, ivi, 1665, in-4; VIII *Jocoseriorum naturae et artis*, *sive magiae naturalis centuriae tres*, Vurtzburgo, 1666, in-4.

SCHYRLE. *Vedi* Rheita.

SCIAGRAFIA. È un termine di cui alcuni autori hanno fatto uso per esprimere l'arte di trovare l'ora del giorno o della notte per mezzo dell'ombra del sole o della luna, arte alla quale si dà oggi il nome di *gnomonica*. La parola *Sciagrafia* viene dalle voci greche σκια, *ombra* e γραφω, *descrivere*.

SCINTILLAZIONE (*Astron.*). Specie di moto oscillatorio o di vibrazione che si osserva nella luce delle stelle fisse.

Il diametro apparente delle stelle fisse, anco le più brillanti, essendo di una grandezza inapprezzabile per qualunque dei nostri più sensibili strumenti, le minime molecole di materia che passano tra essa e il nostro occhio le fanno apparire e sparire alternativamente, il che produce quello stato di continuo movimento al quale si è dato il nome di *Scintillazione*, e che serve a distinguere le stelle dai pianeti. Nei paesi ove l'atmosfera è meno impregnata di vapori, questa scintillazione è meno sensibile.

SCIOTERICO (*Gnom.*). Si dice *telescopio scioterico* un quadrante orizzontale munito di un canocchiale per osservare il tempo vero sì di giorno che di notte. È stato inventato da Molineux, che ha pubblicato su questo soggetto un libro contenente una descrizione di questo strumento e la maniera di servirsene. La parola *scioterico* deriva dalle voci greche σκια *ombra* e ἐπτομαι, *vedere*.

SCOLIO (*Geom.*). Questa parola si usa spesso in geometria per indicare un'osservazione che si fa sopra una o più proposizioni precedenti, che tende a far vedere il loro legame, la loro utilità, la loro restriziona o la loro più estesa applicazione. Deriva dalla parola greca σχολιον, *nota*.

SCONTO (*Aritm.*). Ciò equivale a quanto viene abbonato al debitore che paga una cambiale o mandato avanti la scadenza, ovvero l'interesse pagato al banchiere, il quale caricandosi di una cambiale o mandato, si pone in luogo del creditore rimborsandolo. I calcoli con i quali si determina la quantità di quest' abbuono formano la Regola di Sconto.

La regola di sconto è l'inversa di quella d'*interesse*, e per ben comprenderne i processi è necessario di ben conoscere quelli di quest' ultimo. L'intimo legame delle due regole non ci permetterebbe di trattarle separatamente senza fare un doppio uso inutile di definizioni e di dimostrazioni; rimanderemo dunque alla parola Interesse.

SCORPIONE (*Astron.*). Nome dell'ottavo segno dello zodiaco, indicato col carattere ♏, e di una costellazione composta di 35 stelle, nel numero delle quali si trova una bella stella di prima grandezza chiamata *Antares*.

SCULTETO (Bartolommeo), matematico ed astronomo tedesco, nato a Goerlitz nel 1540 e morto in questa città il 21 Giugno 1614, si occupò molto della riforma del calendario, e su tale soggetto venne particolarmente consultato da Clavio. La gloria sua principale è di essere stato maestro di Ticone Brahé. Gli scritti principali da lui pubblicati sono: I *Gnomonice de solariis*, *sive doctrina practica tertiae partis astronomicae*, Goerlitz, 1572, in-fol.; II *Descriptio cometae anno 1577 apparentis*, ivi, 1578, in-4.

SCULTORE (*Astron.*). *Vedi* Apparato dello Scultore.

SECANTE (*Geom.*). Si dà generalmente questo nome a qualunque linea che ne taglia un' altra.

Nella *trigonometria*, una secante è una linea retta condotta dal centro di un circolo e prolungata fintantochè incontri una tangente allo stesso circolo. Par esempio, la linea AD (*Tav.* XLVIII, *fig.* 1) condotta dal centro A fintantochè incontri la tangente BD, si chiama una *secante*, e, particolarmente, la *secante dell' arco* CB, o dell' angolo CAB misurato da quest' arco.

La *secante* AF dell' arco EC, complemento del primo arco CB, prende il nome di *cosecante* di quest' arco CB. In generale, la *cosecante* di un arco è la stessa cosa della *secante* del complemento di quest' arco.

I rapporti che esistono tra la *secante* di un arco e il suo seno si trovano facilmente nella seguente maniera. Conduciamo il seno CG, i due triangoli ACG, ABD saranno simili e somministreranno la proporzione

$$AD : AC :: AB : AG.$$

Ora, AD è la secante dell' arco CB, AG il coseno dello stesso arco, e AB ed AC i raggi del circolo; così, indicando con x l' arco CB, e con r il raggio del circolo, questa proporzione può scriversi:

$$\sec x : r :: r : \cos x,$$

donde

$$\sec x = \frac{r^2}{\cos x} \; \ldots\ldots (1).$$

Prendendo il raggio del circolo per unità, si ha semplicemente,

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

I triangoli simili AEF, AHC, darebbero ugualmente

$$\operatorname{cosec} x = \frac{r^2}{\operatorname{sen} x} \; \ldots\ldots (2).$$

Così, la *secante* e la *cosecante* di un arco sono interamente determinate per mezzo del suo *seno* e del suo *coseno*.

Se si divide l' uguaglianza (1) per l' uguaglianza (2) viene

$$\frac{\sec x}{\operatorname{cosec} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

vale a dire che il rapporto tra la secante e la cosecante di un arco è lo stesso di quello del seno e del coseno di quest' arco.

Tutte le proprietà delle secanti possono dunque dedursi da quelle dei seni, come ancora i loro valori particolari, corrispondenti ai valori particolari dell' arco x, dipendono dai valori dei seni. Esporremo la teoria di queste linee in tutta la sua generalità alla parola Seno.

SECONDO. Sessantesima parte di un *minuto*, tanto nella divisione del circolo quanto in quella del tempo.

SEGMENTO di un circolo (*Geom.*). Parte di un circolo compresa tra una corda e l' arco che essa sottende.

Siccome qualunque corda divide un circolo in due parti e che essa sottende conseguentemente due differenti archi, ciascuna corda si riferisce a due segmenti.

Si chiama *piccolo segmento* quello che è più piccolo del semicircolo, e *gran segmento* quello che è più grande. Se la corda fosse un diametro, i due segmenti sarebbero dei semi-circoli.

Si ottiene l'area di un piccolo segmento di circolo A*m*B (*Tav.* XLVIII, *fig.* 3), calcolando l'area del settore BA*m*CB, quella del triangolo ACB, e sottraendo la seconda dalla prima. Se si trattasse del gran segmento A*n*C, si aggiungerebbe al contrario il triangolo ACB al settore BA*n*CB.

Un segmento si dice *capace* di un angolo dato, quando tutti gli angoli i cui vertici sono sopra il suo arco e i cui lati passano per l'estremità della sua corda sono uguali ad un angolo dato. (*Vedi* Capace) Questi angoli sono d'altra parte sempre uguali tra loro, poichè essi hanno per misura la metà dello stesso arco (*Vedi* Angolo).

Segmento di una sfera. Parte di una sfera compresa tra un piano che la taglia e la porzione della sua superficie situata da una parte o dall'altra di questo piano. Se il piano secante passa pel centro, vi sono due segmenti uguali, i quali sono ciascuno la metà della sfera; in tutti gli altri casi, vi sono ugualmente due segmenti, ma uno è più piccolo e l'altro più grande della metà della sfera. (*Vedi* Sfera).

S' indicano ancora sotto il nome di *segmento* delle parti di figure curvilinee.

SEGNER (Giovanni Andrea di), dotto professore di fisica e di matematiche, nacque a Presburgo nel 1704. L'inclinazione per queste scienze si sviluppò in lui nella lettura delle opere di Wolf, della cui filosofia divenne seguace, non cieco però nè fanatico da non scorgere gli errori in cui quel celebre filosofo era caduto. Segner morì nel 1777 ad Halla, ove era professore dell'università fino dal 1755, colla reputazione di uno dei primi matematici del suo tempo. Oltre un numero grande di memorie, si ha di lui: I *Elementa arithmeticae et geometriae*, Gottinga, 1739, in-8; II *Invitatio ad lectiones philosophiae naturalis experimentalis publicas*, ivi, 1741, in-4: questo scritto, nel quale rileve diversi errori di Wolf, gli attirò lo sdegno dei partigiani di quel filosofo, il quale però in una nuova edizione de' suoi *Elementi di Geometria* mutò le maggior parte dei passi censurati da Segner. III *Introduzione alla fisica* (in tedesco), ivi, 1746, in-8; IV *Fasciculus exercitationum hydraulicarum*, ivi, 1747, in-4; V *Usus scalarum logisticarum*, ivi, 1749: è la spiegazione delle scale logaritmiche (*Vedi* Gunter); VI *Elementa analyseos finitorum*, Halla, 1758, in-8; VII *Elementa analyseos infinitorum*, 2 vol., 1761-63, in-8; VIII *Lezioni astronomiche* (in tedesco), ivi, 1775-76, 2 vol. in-8.

SEGNO (*Alg.*). Si dà particolarmente questo nome ai caratteri + *più* e — *meno*, i quali si mettono avanti le quantità e che indicano tanto lo stato positivo o o negativo di queste quantità, quanto le operazioni di addizione o di sottrazione che si debbono effettuare.

Il *segno radicale* è il carattere $\sqrt{}$ col quale s' indicano le quantità radicali e le radici (*Vedi* Radice e Radicale.)

SEGNO (*Astron.*). Un *segno* è la dodicesima parte dell'ecclittica o dello zodiaco. (*Vedi* Armillare, n.° 15).

I segni si contano a cominciare dal punto equinoziale, vale a dire dall'intersezione dell'ecclittica con l'equatore. *Vedi* Zodiaco.

SEGUITO (*Alg.*). *Vedi* Serie.

SEJOUR (Du). *Vedi* Dionis.

SELENOGRAFIA (*Astron.*). Si dà in astronomia questo nome alla descrizione della luna, dalle due parole greche σελήνη, *luna* e γράφω, *descrivere*.

Quantunque la *Selenografia* non esista come scienza che dalla invenzione dei canocchiali, gli antichi avevano già proposto sulla natura della lune delle ipotesi notabilissime, delle quali alcune si trovano oggidì confermate. Così, Democrito insegnava che le sue macchie non erano altro che ombre formate dall' altezza eccessiva delle montagne della luna, le quali, intercettando il passaggio alla luce nelle parti meno elevate di questo pianeta cioè nelle sue valli, formevano quelle ombre o macchie che noi osserviamo. Plutarco andò anco più oltre, poichè congetturò che la luna dovesse avere nel suo seno dei mari o delle caverne profonde: diceva che le grandi ombre che si scorgono sul disco di questo pianeta dovevano esser prodotte o da vasti mari che non potevano riflettere una luce così viva come le altre parti più opache, o da caverne estremamente estese o profonde, nelle quali rimanevano assorbiti i raggi del sole: credeva inoltre che la lune non potesse essere abitata, perchè non aveva nè nubi, nè piogge, nè venti, e per conseguenza nè piante, nè animali.

Confrontando queste idee coi resultati dello studio approfondito degli astronomi moderni, non si può che ammirare quella prodigiosa facoltà che possiede l' ingegno di presentire la verità.

Quando Galileo ebbe costruito il telescopio nel 1609, vide subito che la luna aveva delle montagne e delle cavità, e fin d' allora gli astronomi si occuparono a gara a descrivere le parti di questo pianeta singolare. Nel 1647, Evelio face di questa descrizione il soggetto di una grand' opera intitolata: *Selenografia*, nella quale la luna e rappresentata in tutte le sue fasi e sotto tutti i punti di vista. In seguito, Riccioli, Cassini, La Hire, Lambert ed Herschel hanno successivamente perfezionato le carte della luna, e si possono considerare oggi queste carte come più esatte delle nostre migliori carte geografiche. *Vedi* Luna.

SEMI (*Vedi* Mazzo).

SEMI-CIRCOLO. Instrumento dal quale ci serviamo per tracciare sulla carta degli angoli di una grandezza determinata, o per misurare gli angoli costruiti sulla carta.

Il *semicircolo* è un lembe semicircolare (*Tav.* CXCVII, *fig.* 4), diviso in 180° gradi, a fatto di rame, d' argento, o di qualche altra materia simile. Questo lembo si termina mediante una riga il cui lato superiora AB è il suo diametro. Nel mezzo di AB esiste un piccolo buco O che si chiama il *centro* del semicircolo. Si fanno ancora de' semi-circoli di corno trasparente, ma essi sono meno esatti dei semi-circoli di metallo.

Per tracciare sulla carta, con questo instrumento, un angolo di un numero di gradi dato, per esempio di 50°, si pone il suo centro O sul punto che dev' essere il vertice dell' angolo, quindi dopo aver fatto coincidere il diametro AB col lato OB dato dell' angolo, si segna, con un ago, un punto in faccia della divisione del lembo che corrisponde a 50°; conducendo inseguito da questo punto e per il centro una retta PO, si ha l' angolo POB di 50°.

Se si trattasse di misurare un angolo POB costruito sulla carta, si situerebbe il centro O al vertice dell' angolo e il diametro AB sopra uno dei suoi lati; il luogo dove il lembo sarebbe tagliato dall' altro lato OP, indicherebbe il numero di gradi che contiene POB.

SENO (*Alg.* e *Geom.*). In trigonometria, si chiama, *seno* di un arco, o *seno* dell' angolo di cui quest' arco è la misura, la perpendicolare abbassata da una dell' estremità dell' arco sul diametro che passa per l' altra estremità. In algebra, i *seni* come i *logaritmi*, formano un algoritmo teorico elementare. (*Vedi* Filosofia n.° 62).

Fino dal principio del secolo XVIII^mo^ i *seni*, come pure le altre quantità che ne dipendono, malgrado la loro estrema importanza nei calcoli astronomici, non

erano stati considerati che in un modo puramente geometrico. Dobbiamo a Federico-Cristiano Mayer, uno dei primi membri dell'Accademia di S. Pietroburgo i teoremi fondamentali della teoria algebrica dei seni, teoria che tra le mani dell'Eulero è divenuta una delle parti le più importanti della scienza dei numeri. Cominceremo da alcune nozioni geometriche sulla natura dei *seni*, quindi esporremo la loro teoria in tutta la sua generalità, fondandola sopra considerazioni puramente algebriche e senza niente prendere della gometria.

1. Sia DB (*Tav.* XLVIII, *fig.* 11) un arco qualunque di circolo; se dalla sua estremità D si abbassa sul diametro AB, che passa per la sua altra estremità B, la perpendicolare DE, questa perpendicolare sarà il *seno* dell'arco DB, ovvero ancora il seno dell'angolo DCB di cui l'arco DB è la misura

È facile vedere, mediante questa costruzione, che il seno è tanto più grande quanto l'arco si avvicina più al quarto della circonferenza, poichè facendo crescere DB fintantochè esso diventi FB, la perpendicolare DE cresce ugualmente fintantochè essa diventa FC, vale a dire, il raggio del circolo; il quarto della circonferenza o l'angolo retto di cui esso è la misura ha dunque per *seno* il raggio: questo si chiama *seno totale*.

Quando l'arco è più grande del quarto della circonferenza, il suo seno diventa più piccolo del raggio, l'arco GB, per esempio, o l'angolo GCB ha GH per seno.

Se si osserva che GH è nell'istesso tempo il seno dell'arco GA supplemento di GB, se ne concluderà che *il seno di un arco* o *di un angolo è uguale al seno del supplemento di quest' arco* o *di quest' angolo*. Indicando dunque con sen A il seno di un arco A, e supponendo la circonferenza divisa in 360 gradi, si ha l'identità

$$\text{sen}\,A = \text{sen}\,(180^\circ - A).$$

2. Da o gradi fino a 90°, i seni crescono dunque da o fino al raggio del circolo e da 90° fino a 180°, essi diminuiscono dal raggio fino a o. Indicando con R il raggio del circolo, si esprimono queste circostanze mediante l'uguaglianze

$$\text{sen}\,0^\circ = 0,\quad \text{sen}\,90^\circ = R,\quad \text{sen}\,180^\circ = 0.$$

Tutti gli angoli dei quali ci serviamo nella trigonometria, e per conseguenza tutti gli archi che loro servono di misura non superano mai 180°, se l'uso dei seni si limitasse a questo ramo della geometria, non si avrebbe bisogno di considerare i seni degli archi maggiori della semi-circonferenza; ma nelle numerose applicazioni algebriche della teoria di queste quantità e ancora nelle applicazioni geometriche assai frequentemente s'impiegano archi non solamente maggiori della semi-circonferenza, ma ancora che comprendono più circonferenze; dobbiamo dunque, senza uscire dalla geometria, esaminare l'espressione di tali archi.

Osserviamo che per un arco BFAP più grande della semi-circonferenza AFB la perpendicolare abbassata da una dell'estremità P sul diametro AB che passa per l'altra estremità A è la retta PO, situata rapporto a questo diametro in senso inverso di tutti i seni degli archi compresi tra 0° e 180°; così, per tener conto di questa situazione inversa, bisogna dare il segno —, ovvero considerare come *negativi* i seni degli archi da 180° fino a 360°, poichè questi seni saranno tutti in una posizione opposta a quelli degli archi da 0° fino a 180°. Quanto alla grandezza assoluta di questi stessi seni, è facile vedere che essa cresce, da 180° a 270° da o fino al raggio, e che da 270° a 360° essa diminuisce dal raggio fino a o. I limiti estremi sono dunque

$$\text{sen}\,180^\circ = 0,\quad \text{sen}\,270^\circ = -R,\quad \text{sen}\,360^\circ = 0.$$

Se l' arco diventa più grande della circonferenza intera, per esempio, se esso diventa BFAPID, il suo seno DE diventa nuovamente *positivo* fintantochè quest' arco non superi una circonferenza e mezzo, poi di nuovo negativo quando quest' arco è compreso tra una circonferenza e mezzo e due circonferenze. È facile vedere che, m essendo un numero qualunque ed x un arco più piccolo di 360°, si ha generalmente

$$\text{sen}\,(m\,.\,360^\circ + x) = \text{sen}\,x.$$

3. Ma considerando come *negativi* i seni che cadono al di sotto del diametro AB si debbono ancora considerare come negativi gli archi che appartengono alla semi-circonferenza APIB; così osservando che i due archi uguali e di segni contrari BD e BI hanno dei seni uguali e di segni contrari DE ed EI, si potrà concludere generalmente che

$$\text{sen}\,(-x) = -\,\text{san}\,x.$$

Resulta da queste nozioni elementari che qualunque sia l' arco x il suo seno può sempre essere espresso col seno di un arco più piccolo del quarto della circonferenza affetto da un segno conveniente. Inseguito ritorneremo sopra queste determinazioni.

4. Il seno di un arco B che è il *complemento* di un altro arco A prende il nome di *coseno* dell' arco A. Per esempio, l' arco DF (*Tav.* XLVII *fig.* 5) essendo il complemento dell' arco DB, il suo seno DG è il *coseno* dell' arco DB. Indicando generalmente sotto il nome di *complemento* di un arco A ciò che rimane quando si sottrae quest' arco da un quarto della circonferenza o da 90°, si ha la relazione

$$\cos A = \text{sen}\,(90^\circ - A),$$

dalla quale possiamo dedurre tutte l' espressioni dei coseni senza aver bisogno di ricorrere alle costruzioni geometriche. Per esempio, facendo successivamente $A = 0$, 90°, 180°, 270°, 360° si ottiene, mediante quello che precede,

$$\begin{aligned}
\cos\ 0^\circ &= \text{sen}\,(90^\circ - 0^\circ) = \text{sen}\ 90^\circ = R,\\
\cos\ 90^\circ &= \text{sen}\,(90^\circ - 90^\circ) = \text{sen}\ 0^\circ = 0,\\
\cos 180^\circ &= \text{sen}\,(90^\circ - 180^\circ) = \text{sen}\,(-\,90^\circ) = -\,R,\\
\cos 270^\circ &= \text{sen}\,(90^\circ - 270^\circ) = \text{sen}\,(-180^\circ) = 0,\\
\cos 360^\circ &= \text{sen}\,(90^\circ - 360^\circ) = \text{sen}\,(-270^\circ) = R,
\end{aligned}$$

vale a dire che da 0° fino a 90° i coseni diminuiscono dal raggio a 0, che da 90° a 180° essi crescono da 0 al raggio; che essi diminuiscono di nuovo da 180° a 270° dal raggio fino a 0, e che finalmente da 270° a 360° essi crescono da 0 al raggio. Di più essi sono *negativi* tra 90° e 270°.

Per interpretare geometricamente questi resultamenti, basta considerare come *positivi* tutti i *coseni* situati alla destra del diametro FH e come *negativi* tutti quelli situati alla sua sinistra. Si vede che allora si ha generalmente

$$\cos\,(-x) = \cos x.$$

5. I seni e i coseni di uno stesso arco sono legati tra loro da una relazione assai semplice che permette sempre di considerare come conosciuta la grandezza di una di queste linee quando si conosce la grandezza dell' altra. Infatti nel triangolo rettangolo CDE (*Tav.* XLVII, *fig.* 5), si ha

$$\overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{CD}^2;$$

ora, CE = GD = coseno dell' arco DB, DE = seno dell' arco DB, e CD è il

raggio del circolo. Indicando dunque l'arco con x e il raggio con R, si ottiene

$$(\text{sen } x)^2 + (\cos x)^2 = R^2,$$

il che si può ancora scrivere in questo modo

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = R^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; (a).$$

Se ora ci rammentiamo che le altre linee trigonometriche come le *tangenti*, *secanti*, *cotangenti* e *cosecanti* (*Vedi* QUESTA PAROLA) son legate ai seni e coseni con relazioni ugualmente semplicissime, vedremo che la TEORIA DEI SENI comprende le teorie di tutte queste linee.

6. La differenza EB tra il raggio CB e il coseno GD = CE prende il nome di *seno-verso* dell' arco DB, come ancora si chiama *coseno-verso* di questo stesso arco DB il *seno-verso* GF del suo complemento. Si ha ancora generalmente

$$\text{sen . verso } A = R - \cos A,$$
$$\cos . \text{ verso } A = R - \text{sen } A,$$

relazioni che fanno dipendere i valori dei *seni e coseni-versi* da quelli dei seni e coseni semplici che ancora si chiamano alcune volte seni e coseni *retti* per distinguerli dai primi.

7. Avanti di esporre la teoria generale dei seni, andiamo ancora a dedurre dalla geometria i loro teoremi fondamentali come pure le loro espressioni teoriche primitive, questa deduzione ci darà inseguito i mezzi per riconoscere l' identità che esiste tra le linee trigonometriche e certe funzioni date dalla natura stessa della Scienza dei numeri.

Siano dunque (*Tav.* XLVII, *fig.* 4) un arco DL che indicheremo con b e un arco AL che indicheremo con a; è facile vedere tirando le linee della figura, nella quale DL = LB, che si ha

$$DQ = \text{sen}(a+b), \quad BR = \text{sen}(a-b),$$
$$CQ = \cos(a+b), \quad CR = \cos(a-b),$$

e di più

$$DO = \text{sen } b, \quad Ln = \text{sen } a, \quad CO = \cos b, \quad Cn = \cos a.$$

Premesso ciò, i triangoli simili CLn e COm, danno

$$CL : CO :: Ln : Om;$$

donde

$$Om = \frac{Ln \times CO}{CL} = \frac{\text{sen } a \,.\, \cos b}{R},$$

R essendo il raggio CL del circolo. I triangoli simili CLn, DGO, danno ancora

$$CL : Cn :: DO : GD;$$

donde

$$GD = \frac{Cn \times DO}{CL} = \frac{\cos a \,.\, \text{sen } b}{R};$$

ora,

$$Om = GQ$$

ed

$$Om+GD = GQ+GD = DQ,$$

dunque

$$\text{sen}\left(a+b\right) = \frac{\text{sen } a \cdot \cos b + \cos a \cdot \text{sen } b}{R} \;\ldots\ldots\; (b).$$

Di più

$$Om-GD = GQ-GD = GQ-GP = PQ = BR,$$

così si ha ancora

$$\text{sen}\left(a-b\right) = \frac{\text{sen } a \cdot \cos b - \cos a \cdot \text{sen } b}{R} \;\ldots\ldots\; (b).$$

Ora i triangoli simili CLn, COm, danno

$$CL : CO :: Cn : Cm,$$

donde

$$Cm = \frac{Cn \times CO}{CL} = \frac{\cos a \cdot \cos b}{R},$$

e i triangoli simili CLn, DGO, danno

$$CL : Ln :: DO : GO,$$

donde

$$GO = \frac{Ln \times DO}{CL} = \frac{\text{sen } a \cdot \text{sen } b}{R}.$$

Ma

$$Cm+GO = Cm+mR = CR,$$

e

$$Cm-GO = Cm-Qm = CQ,$$

dunque

$$\left.\begin{aligned} \cos\left(a+b\right) &= \frac{\cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b}{R} \\ \cos\left(a-b\right) &= \frac{\cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b}{R} \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (c).$$

Sono quest' espressioni (b) e (c) dei seni e coseni della *somma* e della *differenza* di due archi, per mezzo dei seni e coseni di questi archi, le quali formano i teoremi fondamentali dai quali i geometri deducono tutta la teoria dei seni.

Prendendo per *unità* il raggio del circolo, il che nulla toglie alla generalità dei resultamenti, si ha semplicemente

$$\left.\begin{aligned} \text{sen}\,(a \pm b) &= \text{sen } a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \text{sen } b \\ \cos\,(a \pm b) &= \cos a \cdot \cos b \mp \text{sen } a \cdot \text{sen } b \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\; (d).$$

8. Nel caso di $R = 1$, l'espressione (a) diventa

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Ora, per trovare i fattori del primo grado del primo membro di quest' uguaglianza, se si pone l' equazione

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 0,$$

si troverà

$$\cos^2 x = -\text{sen}^2 x$$

$$\cos x = \pm\sqrt{\left[-\text{sen}^2 x\right]} = \pm \text{sen}\, x \,.\, \sqrt{-1}$$

il che dà i due fattori del primo grado

$$\cos x + \text{sen}\, x \sqrt{-1},$$

$$\cos x - \text{sen}\, x \sqrt{-1},$$

donde

$$\left(\cos x + \text{sen}\, x \sqrt{-1}\right) . \left(\cos x - \text{sen}\, x \sqrt{-1}\right) = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$$

e, per conseguenza

$$\left(\cos x + \text{sen}\, x \sqrt{-1}\right) . \left(\cos x - \text{sen}\, x \sqrt{-1}\right) = 1 \ldots\ldots (e),$$

espressione di un'alta utilità quantunque complicata della quantità detta *immaginaria* $\sqrt{-1}$.

9. Se si forma il prodotto di due fattori simili

$$\cos x + \text{sen}\, x \,.\, \sqrt{-1},$$

$$\cos z + \text{sen}\, z \,.\, \sqrt{-1},$$

si trova

$$\left(\cos x + \text{sen}\, x \,.\, \sqrt{-1}\right) . \left(\cos z + \text{sen}\, z \,.\, \sqrt{-1}\right) =$$

$$= \cos x \,.\, \cos z + \cos x \,.\, \text{sen}\, z \,.\, \sqrt{-1}$$

$$+ \cos z \,.\, \text{sen}\, x \,.\, \sqrt{-1} - \text{sen}\, x \,.\, \text{sen}\, z$$

$$= \cos x \,.\, \cos z - \text{sen}\, x \,.\, \text{sen}\, z$$

$$+ \left(\cos x \,.\, \text{sen}\, z + \cos z \;\; \text{sen}\, x\right)\sqrt{-1}.$$

Ora, si ha in virtù dell espressioni (d),

$$\cos x \,.\, \cos z - \operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{sen} z = \cos(x+z),$$

$$\cos x \,.\, \operatorname{sen} z + \cos z \,.\, \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x+z),$$

così,

$$\left(\cos x + \operatorname{sen} x \,.\, \sqrt{-1}\right) \cdot \left(\cos z + \operatorname{sen} z \sqrt{-1}\right)$$

$$= \cos\left(x+z\right) + \operatorname{sen}\left(x+z\right) \,.\, \sqrt{-1}.$$

Si otterrebbe ugualmente

$$\left(\cos x - \operatorname{sen} x \sqrt{-1}\right) \,.\, \left(\cos z - \operatorname{sen} z \,.\, \sqrt{-1}\right)$$

$$= \cos\left(x+z\right) - \operatorname{sen}\left(x+z\right)\sqrt{-1},$$

donde si vede che la moltiplicazione di tali fattori si effettua mediante la semplice addizione degli archi che essi contengono.

Se si fa $x=z$, si ha

$$\left(\cos x + \operatorname{sen} x \sqrt{-1}\right)^2 = \cos 2x + \operatorname{sen} 2x \,.\, \sqrt{-1}$$

e per conseguenza

$$\left(\cos x + \operatorname{sen} x \,.\, \sqrt{-1}\right)^3 = \cos 3x + \operatorname{sen} 3x \,.\, \sqrt{-1}\Big),$$

$$\left(\cos x + \operatorname{sen} x \,.\, \sqrt{-1}\right)^4 = \cos 4x + \operatorname{sen} 4x \,.\, \sqrt{-1},$$

ec. = ec.

in generale

$$\left(\cos x + \operatorname{sen} x \,.\, \sqrt{-1}\right)^m = \cos mx + \operatorname{sen} mx \,.\, \sqrt{-1} \,\ldots\ldots (f).$$

È facile vedere che si ha ancora

$$\left(\cos x - \operatorname{sen} x \,.\, \sqrt{-1}\right)^m = \cos mx - \operatorname{sen} mx \,.\, \sqrt{-1} \,\ldots\ldots\ldots (g).$$

10. Prendendo da una parte la somma, e dall' altra la differenza delle due uguaglianze (f) e (g), si ottiene per i valori di $\operatorname{sen} mx$ e di $\cos mx$ l' espressioni

$$\operatorname{sen} mx = \frac{(\cos x + \operatorname{sen} x \,.\, \sqrt{-1})^m - (\cos x - \operatorname{sen} x \,.\, \sqrt{-1})^m}{2\sqrt{-1}},$$

$$\cos mx = \frac{(\cos x + \operatorname{sen} x \,.\, \sqrt{-1})^m + (\cos x - \operatorname{sen} x \,.\, \sqrt{-1})^m}{2}.$$

Ora se si considera l'arco x come infinitamente piccolo, esso si confonde col suo seno, e si ha

$$\operatorname{sen} x = x, \quad \cos x = 1$$

Così; facendo m infinitamente grande, perchè il prodotto mx sia una quantità finita che indicheremo con z, avremo $x = \frac{z}{m} = \frac{z}{\infty}$; e l'espressioni precedenti diventeranno

$$\operatorname{sen} z = \frac{\left(1 + \frac{z}{\infty} \cdot \sqrt{-1}\right)^{\infty} - \left(1 - \frac{z}{\infty} \cdot \sqrt{-1}\right)^{\infty}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\cos z = \frac{\left(1 + \frac{z}{\infty} \cdot \sqrt{-1}\right)^{\infty} + \left(1 - \frac{z}{\infty} \cdot \sqrt{-1}\right)^{\infty}}{2}.$$

Ma e essendo la base dei logaritmi naturali si ha (*vedi* LOGARITMO n° 13).

$$e = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^{\infty},$$

e, per conseguenza, v essendo una quantità qualunque

$$e^{v} = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^{v\infty},$$

ovvero

$$e^{v} = \left(1 + \frac{v}{\infty}\right)^{\infty},$$

poichè possiamo assicurarci, sviluppando i binomi

$$\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^{v\infty},$$

$$\left(1 + \frac{v}{\infty}\right)^{\infty},$$

che questi binomi sono identici. Facendo dunque $v = z.\sqrt{-1}$, otterremo

$$e^{z \cdot \sqrt{-1}} = \left(1 + \frac{z}{\infty} \cdot \sqrt{-1}\right)^{\infty},$$

$$e^{-z \cdot \sqrt{-1}} = \left(1 - \frac{z}{\infty} \cdot \sqrt{-1}\right)^{\infty},$$

donde, definitivamente

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}} \right\} \\ \cos z &= \frac{1}{2} \left\{ e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}} \right\} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (h).$$

Tali sono l'espressioni teoriche primitive delle quantità sen z e cos z, espressioni le quali ci rilevano la *natura* trascendente di queste quantità. L'Eulero, al quale esse sono dovute, le ha ottenute col processo indiretto che abbiamo impiegato.

11. Abbandoniamo ora tutti i dati geometrici e riportiamoci alla parte elementare della teoria della scienza dei numeri dove, per la natura stessa del nostro sapere, siamo condotti a ricercare se esiste una funzione φ delle quantità variabili x_1, x_2, x_3, ec., capace di dare l'uguaglianza

$$\varphi x_1 . \varphi x_2 . \varphi x_3 . \text{ec.} = \varphi(x_1 + x_2 + x_3 + \text{ec.} \ldots) \ldots (i).$$

Abbiamo veduto (Filosofia n.° 61) che questa questione necessaria dipende dalla funzione trascendente

$$\varphi x = a^{x\sqrt{-1}},$$

nella quale a è una quantità arbitraria, e che indicando con Fx e fx due altre funzioni della stessa variabile x, i cui valori son dati dall'espressioni

$$\left.\begin{aligned} Fx &= 1 - \frac{(La)^2 . x^2}{1.2} + \frac{(La)^4 . x^4}{1.2.3.4} + \frac{(La)^6 . x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ec.} \\ fx &= La . x - \frac{(La)^3 . x^3}{1.2.3} + \frac{(La)^5 . x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{(La)^7 . x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ec.} \end{aligned}\right\} \ldots (k),$$

nelle quali La indica il logaritmo naturale di a, si ha per la natura della funzione φx.

$$\varphi x = Fx + fx . \sqrt{-1},$$

e che di più l'espressioni teoriche primitive di queste funzioni Fx e fx implicate nella funzione φ, la quale soddisfà all'uguaglianza ipotetica (i), sono

$$\left.\begin{aligned} Fx &= \frac{1}{2} \left\{ a^{+x\sqrt{-1}} + a^{-x\sqrt{-1}} \right\} \\ fx &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ a^{+x\sqrt{-1}} - a^{-x\sqrt{-1}} \right\} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (l).$$

La seconda di queste funzioni, fx, è quella che indicheremo generalmente sotto il nome di *seno*, e la prima Fx quella che indicheremo sotto quello di *coseno*. Si vede in questo caso, come per i logaritmi, che la base a essendo arbitraria possiamo formare un'infinità di sistemi differenti di *seni* e di *coseni*. E solamente prendendo a per la base dei logaritmi naturali segue che si ottiene il sistema usuale dei seni naturali o del circolo, come ciò diviene evidente paragonando l'espressioni (l) con l'espressioni (h) dell'Eulero. Per qualunque altro valore di a, il sistema dei seni corrispondenti si riferisce ad un'ellisse nella quale p indicando il primo asse e q il secondo, si ha

$$La = \frac{p}{q}.$$

Chiameremo dunque generalmente *seni ellittici* i seni dati dall' espressioni generali (l), per distinguerli dai *seni iperbolici* dei quali parleremo inseguito, facendo osservare che la variabile x è allora il doppio del settore compreso tra il primo asse dell' ellisse e il raggio vettore condotto dal suo centro a uno dei punti della sua circonferenza.

12. L' espressioni (l) essendo l' espressioni teoriche primitive dei *seni ellittici* contengono implicitamente, come lo vedremo, tutte le proprietà caratteristiche di queste funzioni.

Prendendo le seconde potenze dai due membri dell' ugualianze (l), si trova

$$\left(\mathrm{F}x\right)^2 = \quad \frac{1}{4}\left\{a^{+2x\sqrt{-1}} + a^{-2x\sqrt{-1}} + 2\right\},$$

$$\left(fx\right)^2 = -\frac{1}{4}\left\{a^{+2x\sqrt{-1}} + a^{-2x\sqrt{-1}} - 2\right\};$$

donde

$$\left(\mathrm{F}x\right)^2 + \left(fx\right)^2 = 1;$$

questa è la proprietà fondamentale, o piuttosto il *legame* del *seno* e del *coseno* di una stessa quantità x.

Questa proprietà unita alla forma della funzione φx.

$$\varphi x = \mathrm{F}x + fx \,.\, \sqrt{-1},$$

può far supporre che la funzione φ, ovvero

$$\left(a^{\sqrt{-1}}\right)^x$$

sia una radice *immaginaria* dell' unità nel caso di $x = 1$, e generalmente una potenza dell' unità per qualunque altro valore di x, poichè abbiamo veduto (IMMAGINARIO n.° 4) che le radici *immaginarie* dell' unità sono della forma

$$a + b\sqrt{-1},$$

le quantità a e b dando l' ugualianza

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Per assicurarci se effettivamente $a^{\sqrt{-1}}$ è una radice determinata dell' unità, il che rendono probabile le circostanze che abbiamo fatto manifeste, indichiamo con π l' esponente, se esso esiste, capace di dare

$$\left(a^{\sqrt{-1}}\right)^{\pi} = 1 \;\ldots\ldots (m),$$

e vediamo se π può ammettere un valore reale.

Le radici quarte dei due membri dell' ugualianza (m) sono, non conside-

rando che le radici immaginarie,

$$a^{+\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}}=\sqrt{-1},$$

$$a^{-\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}}=-\sqrt{-1}.$$

Ora,

$$\sqrt{-1}=\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}},$$

e per conseguenza,

$$a^{\pm\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}}=\pm\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}.$$

Prendendo i logaritmi dai due membri di quest'ultima uguaglianza, si trova

$$\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{L}a=\mathrm{L}\left\{\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}\right\}$$

$$=\mathrm{L}\left(1+\sqrt{-1}\right)-\mathrm{L}\left(1-\sqrt{-1}\right);$$

donde si ricava,

$$\pi=\frac{4}{\mathrm{L}a\,.\,\sqrt{-1}}\left\{\mathrm{L}\left(1+\sqrt{-1}\right)-\mathrm{L}\left(1-\sqrt{-1}\right)\right\}\,\ldots\ldots\,(n).$$

Applicando ai logaritmi compresi in quest'espressione lo sviluppo conosciuto (*Vedi* Logaritmo, n.° 22), si ottiene

$$\mathrm{L}\left(1+\sqrt{-1}\right)=+\sqrt{-1}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{-1}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\sqrt{-1}\right)^3-\text{ec.}$$

$$\mathrm{L}\left(1-\sqrt{-1}\right)=-\sqrt{-1}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{-1}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\sqrt{-1}\right)^3-\text{ec.}$$

il che dà sviluppando le potenze di $\sqrt{-1}$,

$$\pi=\frac{8}{\mathrm{L}a}\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\text{ec.}\ldots\right\},$$

ovvero, definitivamente,

$$\pi=\frac{2}{\mathrm{L}a}\,.\,3,1415926\,\ldots\ldots$$

L'esponente π è dunque un numero reale, e la quantità $a^{\sqrt{-1}}$ è effettivamente una radice determinata dell'unità.

Resulta da questa circostanza che i *seni* e *coseni* hanno una generazione periodica, mentre poichè abbiamo

$$a^{\pi\sqrt{-1}} = 1,$$

abbiamo ancora

$$a^{m\pi\sqrt{-1}} = 1,$$

m essendo un numero intero qualunque positivo, negativo o zero, e per conseguenza

$$a^{x\sqrt{-1}} = a^{x\sqrt{-1}} \cdot a^{m\pi\sqrt{-1}} = a^{(x+m\pi)\sqrt{-1}}.$$

Le funzioni Fx e fx hanno dunque per espressioni generali,

$$Fx = \frac{1}{2} \cdot \left\{ a^{+(x+m\pi)\sqrt{-1}} + a^{-(x+m\pi)\sqrt{-1}} \right\},$$

$$fx = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ a^{+(x+m\pi)\sqrt{-1}} - a^{-(x+m\pi)\sqrt{-1}} \right\};$$

donde si vede che Fx e fx hanno dei valori periodici compresi tra i limiti di

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x = \pi.$$

13. il numero π che entra in un modo tanto importante nella teoria dei seni essendo

$$\pi = \frac{2}{La} (3,1415926 \ldots \text{ ec.}$$

il suo valore è legato a quello della base a, ed è facile riconoscere che quando questa base è quella dei logaritmi naturali; caso in cui $La = 1$, e

$$\pi = 2.(3,1415926 \ldots \ldots \text{ ec.}),$$

questo numero π esprime la circonferenza del circolo il cui raggio è l' unità. In questo stesso caso, i seni sono i seni del circolo che s' impiega in geometria, i soli *seni ellittici* di cui i geometri si siano occupati.

14. Il signor Wronski è il primo che abbia considerato la teoria dei seni sotto il punto di vista generale che abbiamo esposto: si era creduto fin qui che queste funzioni avessero la loro origine dalla geometria, ma resulta evidentemente da quello che precede che quest' origine è puramente algebrica, e che quando ancora i seni non si truvassero nella geometria, essi esisterebbero ciò non ostante nell' algebra della quale formano, come le potenze, i logaritmi, ec., una parte essenziale, interamente indipendente da qualunque considerazione geometrica

15. Indichiamo come in primo luogo, con le abbreviazioni sen x e cos x, il seno e il coseno naturali di un numero x, e abbandoniamo il punto di vista generale per non occuparci che dei seni, la cui base

$$\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^{\infty}$$

è rappresentata dalla lettera e. Avremo in questo modo:

$$\varphi x = \cos x + \operatorname{sen} x \sqrt{-1}$$

e poichè, per la natura della funzione φ, l' uguaglianza (i), che è il nostro punto di partenza, si trova completamente soddisfatta, quest' uguaglianza, o piuttosto la seguente

$$\left(\cos x_1 + \operatorname{sen} x_1 \cdot \sqrt{-1}\right) \cdot \left(\cos x_2 + \operatorname{sen} x_2 \cdot \sqrt{-1}\right) \cdot$$

$$\left(\cos x_3 + \operatorname{sen} x_3 \cdot \sqrt{-1}\right) \cdot \text{ec.} \ldots\ldots = $$

$$\cos\left(x_1 + x_2 + x_3 + \text{ec.}\right)$$

$$+ \operatorname{sen}\left(x_1 + x_2 + x_3 + \text{ec.}\right) \cdot \sqrt{-1} \ldots\ldots (o),$$

è la legge fondamentale della teoria dei seni. Ed è da essa infatti che dedurremo questa teoria.

16. Cominciamo da osservare che se, nell' espressioni teoriche primitive,

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot \left\{ e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} \right\},$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \cdot \left\{ e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} \right\},$$

si fa x negativo, avremo

$$\operatorname{sen}(-x) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ e^{-x\sqrt{-1}} - e^{+x\sqrt{-1}} \right\}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ e^{+x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} \right\}$$

$$= -\operatorname{sen} x,$$

$$\cos(-x) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ e^{-x\sqrt{-1}} + e^{+x\sqrt{-1}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ e^{+x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} \right\}$$

$$= \cos x.$$

Così il seno di una quantità negativa è *negativo*, nel mentre che il suo coseno non cangia di segno.

Premesso ciò, nella legge fondamentale (o), non consideriamo che due fattori e facciamo

$$x_1 = x, \quad x_2 = z,$$

avremo

$$\left(\cos x + \operatorname{sen} x\sqrt{-1}\right).\left(\cos z + \operatorname{sen} z\sqrt{-1}\right) =$$
$$\cos\left(x+z\right) + \operatorname{sen}\left(x+z\right)\sqrt{-1}.$$

Ora, effettuando la moltiplicazione, il primo membro di quest' equazione dà

$$\left(\cos x + \operatorname{sen} x\sqrt{-1}\right).\left(\cos z + \operatorname{sen} z\sqrt{-1}\right) = \cos x \,.\, \cos z$$
$$+ \cos x \,.\, \operatorname{sen} z \,.\, \sqrt{-1} + \cos z \,.\, \operatorname{sen} x\sqrt{-1} - \operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{sen} z.$$

Abbiamo dunque ancora

$$\cos\left(x+z\right) + \operatorname{sen}\left(x+z\right).\sqrt{-1} = \cos x \,.\, \cos z - \operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{sen} z$$
$$+ \left(\cos x \,.\, \operatorname{sen} z + \cos z \,.\, \operatorname{sen} x\right).\sqrt{-1}.$$

Uguagliando separatamente le parti reali e le parti *immaginarie* di quest' ultima uguaglianza, otterremo

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}(x+z) &= \operatorname{sen} x \,.\, \cos z + \cos x \,.\, \operatorname{sen} z\\ \cos(x+z) &= \cos x \,.\, \cos z - \operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{sen} z\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(p),$$

principali derivate considerate come i teoremi fondamentali della teoria dei seni, e che abbiamo dedotti qui sopra, n.° 7, per mezzo di considerazioni geometriche.

Se in queste due uguaglianze si fa z negativa, esse diventano,

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}(x-z) &= \operatorname{sen} x \,.\, \cos z - \cos x \,.\, \operatorname{sen} z\\ \cos(x-z) &= \cos x \,.\, \cos z + \operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{sen} z\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(q).$$

19. I teoremi (p) e (q) ammettono diverse combinazioni, le quali somministrano un gran numero di conseguenze utili per i calcoli dove entrano dei seni. In questo punto ci contenteremo di riportare quelle che più meritano di essere osservate.

Prendendo da una parte la somma e dall' altra la differenza di ciascuna dell' uguaglianze (q) con ciascuna dell' uguaglianze (p), si ottiene

$$\operatorname{sen} x \,.\, \cos z = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(x+z\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(x-z\right),$$

$$\operatorname{sen} z \,.\, \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(x+z\right) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(x-z\right),$$

$$\cos x \,.\, \cos z = \frac{1}{2}\cos\left(x-z\right) + \frac{1}{2}\cos\left(x+z\right),$$

$$\operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{sen} z = \frac{1}{2}\cos\left(x-z\right) - \frac{1}{2}\cos\left(x+z\right),$$

formule per mezzo delle quali possiamo trasformare un *prodotto* in una *somma* e *viceversa.*

Quando vogliamo far uso di quest' espressioni per trasformare una *somma* in *prodotto*, bisogna dar loro una forma più semplice, il che si effettua facendo

$$x+z=p,\quad x-z=q,$$

donde

$$x=\frac{p+q}{2},$$

$$z=\frac{p-q}{2}.$$

Sostituendo questi valori, si otterrà:

$$\operatorname{sen} p+\operatorname{sen} q=2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\left(p+q\right).\cos\frac{1}{2}\left(p-q\right),$$

$$\operatorname{sen} p-\operatorname{sen} q=2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\left(p-q\right).\cos\frac{1}{2}\left(p+q\right),$$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{1}{2}\left(p+q\right).\cos\frac{1}{2}\left(p-q\right),$$

$$\cos p-\cos q=2\cos\frac{1}{2}\left(p+q\right).\operatorname{sen}\frac{1}{2}\left(p-q\right),$$

espressioni di un grand' uso nei calcoli trigonometrici e dalle quali possiamo dedurre, combinandole, una gran quantità di teoremi.

18. Per mezzo dei precedenti principii e delle loro conseguenze le più immediate, possiamo costruire per i seni delle tavole simili a quelle dei logaritmi, con questa differenza che i valori dei seni saranno compresi tra certi limiti, poichè questi valori hanno una generazione periodica. Fino al presente, i seni non essendo stati considerati che come linee geometriche, le tavole delle quali ci serviamo sono state calcolate per gli archi del circolo, e in luogo di presentare i seni dei *numeri*; esse presentano i seni delle parti della circonferenza espresse in gradi; ma possiamo facilmente esprimere qualunque numero dato in gradi e reciprocamente. Infatti, la circonferenza del circolo il cui raggio $=1$, supponendosi divisa in 360 gradi, questo numero 360, che è puramente convenzionale, tiene il posto di π nel calcolo dei seni e dà il mezzo di ridurre in gradi un numero qualunque; di più a motivo della periodicità dei valori di $\operatorname{sen} x$ e di $\cos x$, abbiamo (n.° 2 e n.° 12).

$$\operatorname{sen}\left(m\pi+x\right)=\operatorname{sen} x,$$

$$\cos\left(m\pi+x\right)=\cos x,$$

m essendo un numero intero qualunque, compreso lo 0; così siccome $m\pi+x$ può rappresentare tutti i numeri interi e frazionari, supponendo $x<\pi$, per trovare il seno di un numero dato A, basterà di cercare quello del resto della divisione di A per π; vale a dire che i seni di tutti i numeri son dati da quelli

dei numeri al di sotto di π. Vedremo in seguito che basta di considerare i seni e i coseni dei numeri compresi tra o e $\frac{\pi}{4}$.

Premesso ciò, x esprimendo un numero più piccolo di π, esprime in conseguenza una parte della circonferenza, e per ridurre questa parte in gradi, non si tratta che di conoscere il suo rapporto con π, poichè π, o la circonferenza, supponendosi divisa in 360 parti, tante di queste parti conterrà x, altrettanto essa varrà in gradi. Sia dunque $\frac{\pi}{x}=n$, avremo ancora

$$\left[x\right]=\frac{360^{\circ}}{n}$$

$\left[x\right]$ indicando x espresso in gradi del circolo. Così

$$\left[x\right]=360^{\circ}:\frac{\pi}{x}=\frac{360^{\circ}}{\pi}.x,$$

e si vede che l'operazione si riduce a moltiplicare x pel fattore costante

$$\frac{360^{\circ}}{\pi}=58^{\circ},8873\ldots\ldots$$

che è l'*arco* uguale al raggio o all'unità.

Si ha reciprocamente

$$x=\left[x\right].\frac{\pi}{360},$$

vale a dire che quando una quantità è espressa in gradi, per avere il suo valore in numeri naturali, bisogna moltiplicarla pel fattore costante

$$\frac{\pi}{360}=0,017453\ldots$$

19. È ora facile assicurarsi che il seno di una quantità qualunque può sempre esprimersi pel seno o coseno di un numero minore di $\frac{1}{4}\pi$, prendendogli con un conveniente segno; poichè π indicando in questo caso la circonferenza intera si ha, mediante i numeri 2 e 8;

$$\operatorname{sen} 0=0, \qquad \cos 0=1,$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi=1, \qquad \cos\frac{1}{4}\pi=0,$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi=0, \qquad \cos\frac{1}{2}\pi=-1,$$

$$\operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi=-1, \qquad \cos\frac{3}{4}\pi=0,$$

$$\operatorname{sen}\pi=0, \qquad \cos\pi=1,$$

ma z indicando una quantità più piccola di $\frac{1}{4}\pi$, e x una quantità più piccola di π, tutti i valori di x son compresi sotto le forme

$$\frac{\pi}{4}-z,\quad \frac{\pi}{4}+z,\quad \frac{\pi}{2}+z,\quad \frac{3\pi}{4}+z.$$

e in virtù dell' espressioni (p) e (q)

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-z\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\,.\cos z-\cos\frac{\pi}{4}\,.\operatorname{sen} z,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+z\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\,.\cos z+\cos\frac{\pi}{4}\,.\operatorname{sen} z,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+z\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\,.\cos z+\cos\frac{\pi}{2}\,.\operatorname{sen} z,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}+z\right)=\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\,.\cos z+\cos\frac{3\pi}{4}\,.\operatorname{sen} z.$$

Sostituendo in quest' uguaglianze i valori precedenti di $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$, ec., si ha definitivamente

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-z\right)=\cos z,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+z\right)=\cos z,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+z\right)=-\operatorname{sen} z,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}+z\right)=-\cos z.$$

Si troverebbe ugualmente

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-z\right)=\operatorname{sen} z,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+z\right)=-\operatorname{sen} z,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+z\right)=-\cos z,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}+z\right)=\operatorname{sen} z.$$

Per servirsi delle tavole dei seni, bisogna che il numero z sia espresso in gradi, e non si deve dimenticare che allora

$$\frac{\pi}{4}=90^\circ,\quad \frac{\pi}{2}=180^\circ,\quad \frac{3\pi}{4}=270^\circ.$$

20. Resulta dalle precedenti considerazioni che la costruzione delle tavole dei seni e coseni si riduce a quella dei seni e coseni dei numeri compresi tra o e $\frac{\pi}{4}$ o degli archi compresi tra 0° e 90°, e siccome si ha di più, x essendo un numero di gradi compreso tra 0° e 45°,

$$\text{sen}\left(45^\circ + x\right) = \cos\left(90^\circ - 45^\circ - x\right) = \cos\left(45^\circ - x\right),$$

$$\cos\left(45^\circ + x\right) = \text{sen}\left(90^\circ - 45^\circ - x\right) = \text{sen}\left(45^\circ - x\right)$$

così, basta calcolare i seni e coseni degli archi da o fino a 45.

Per dare almeno un' idea di questi calcoli, si comincia dall' osservare che facendo $a = e$, e essendo sempre la base dei logaritmi naturali, si ha $Le = 1$, e che l' espressioni (k) ci danno immediatamente, per la generazione tecnica dei seni e coseni,

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ec.},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ec.},$$

formule nelle quali x indica una quantità qualunque. Se x è un arco dato in gradi e parti di gradi, bisogna avere il suo valore in parti del raggio o dell' unità; così, per rendere l' uso di queste formule più facile, supporremo che l' arco x stia al quarto della circonferenza ovvero a 90° come $m : n$, il che ci darà

$$x = \frac{m}{n} . 90^\circ, \text{ e in numeri } x = \frac{m}{n} . \frac{\pi}{4},$$

sostituendo dunque $\frac{m}{n} . \frac{\pi}{4}$ invece di x, mettendo per $\frac{\pi}{4}$ il suo valore conosciuto, e calcolando i coefficienti fino a 22 decimali, otterremo:

$$\text{sen}\left(\frac{m}{n} . 90^\circ\right) =$$

$$+ \frac{m}{n} . 1,5707963267948966192313$$

$$- \frac{m^3}{n^3} . 0,6459640975062462536558$$

$$+ \frac{m^5}{n^5} . 0,0796926262461670451205$$

$$- \frac{m^7}{n^7} . 0,0046817541353186881007$$

$$+\frac{m^9}{n^9}\cdot 0,0001604411847873598219$$

$$-\frac{m^{11}}{n^{11}}\cdot 0,0000035988432352120853$$

$$+\frac{m^{13}}{n^{13}}\cdot 0,0000000569217292196793$$

$$-\frac{m^{15}}{n^{15}}\cdot 0,0000000006688035109812$$

$$+\frac{m^{17}}{n^{17}}\cdot 0,0000000000060669357311$$

$$-\frac{m^{19}}{n^{19}}\cdot 0,0000000000000437706547$$

$$+\frac{m^{21}}{n^{21}}\cdot 0,0000000000000002571423$$

$$-\frac{m^{23}}{n^{23}}\cdot 0,0000000000000000012539$$

$$+\frac{m^{25}}{n^{25}}\cdot 0,0000000000000000000052$$

$$-\ \&c.$$

E,

$$\cos\left(\frac{m}{n}\cdot 90^\circ\right) =$$

$$+\ 1,0000000000000000000000$$

$$-\frac{m^2}{n^2}\cdot 1,2337005501361698273543$$

$$+\frac{m^4}{n^4}\cdot 0,2536695079010480136366$$

$$-\frac{m^6}{n^6}\cdot 0,0208634807633529608731$$

$$+\frac{m^8}{n^8}\cdot 0,0009192602748394265802$$

$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0,0000252020423730606055$$

$$+\frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0,0000004710874778818172$$

$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0,0000000063866030837919$$

$$+\frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0,0000000000656596311498$$

$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0,00000000000005294400201$$

$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0,000000000000000034377392$$

$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}\cdot 0,000000000000000000183600$$

$$+\frac{m^{24}}{n^{24}}\cdot 0,000000000000000000000821$$

$$-\frac{m^{26}}{n^{26}}\cdot 0,000000000000000000000003$$

$+$ ec. . . . .

Siccome non si ha bisogoo di calcolare i seni e coseni che da o fino a 45°, la frazione $\frac{m}{n}$ sarà sempre più piccola di $\frac{1}{2}$, e queste serie saranno convergentissime, dimodochè sarà bastante un piccolo numero di termini, soprattutto se non è necessario di esprimere i seni con molti decimali.

Se si domandasse, per esempio, il seno dell' arco di $27'$ con dieci decimali, si comincerebbe dal porre, per avere il valore di $\frac{m}{n}$,

$$\frac{m}{n}\cdot 90^{\circ}=27', \quad \text{donde} \quad \frac{m}{n}=\frac{27'}{90^{\circ}},$$

e, riducendo 90° in minuti,

$$\frac{m}{n}=\frac{27'}{5400'}=0,005,$$

sostituendo questo valore nella serie del seno, bastano i due primi termini per ottenere

$$\text{sen}\, 27'=0,0078539736.$$

Nella divisione *centesimale* del circolo, il quarto della circonferenza è di 100°, e per impiegare le precedenti formule, in luogo di fare l' arco proposto uguale a $\frac{m}{n}\cdot 90^{\circ}$, bisogna farlo uguale ad $\frac{m}{n}\cdot 100^{\circ}$. Così, se si trattasse di calcolare, secondo questa divisione, il seno dell' arco di $27'$, ovvero, come allora si scrive, il seno $0^{\circ},27$, si farebbe

$$\frac{m}{n}\cdot 100^{\circ}=0^{\circ},27 \quad \text{donde} \quad \frac{m}{n}=\frac{0,27}{100}=0,0027,$$

e i due primi termini della serie darebbero

$$\text{sen}\left(0^{\circ},27\right)=0,004241136 5 2.$$

Dopo la scoperta dei logaritmi fatta da Nepero, la maggior parte delle tavole dei seni non contengono più, in luogo dei seni essi stessi, che i loro logaritmi, il che è di una grandissima utilità nella pratica dei calcoli; ma siccome, prendendo il raggio del circolo uguale all' *unità*, tutti i logaritmi dei seni sarebbero stati negativi, si è fatto questo raggio uguale a 10000000000 ovvero, ciò che significa la stessa cosa, si è moltiplicato per 10000000000 i seni naturali calcolati per il raggio $=1$. Così, nelle tavole usuali, il logaritmo del raggio è 10, e questo raggio, che entra in quasi tutti i calcoli, non può essere trascurato; ma questa considerazione non portando seco veruna difficoltà, possiamo contentarci di rimandare alle spiegazioni situate in testa delle tavole del Callet.

21. L' espressioni teoriche primitive (*f*) dei seni e coseni ellittici diventano indipendenti dalla base a, quando questa base è la stessa di quella dei logaritmi naturali, vale a dire, quando il sistema corrispondente dei seni è quello dei seni naturali o circolari. Infatti, poichè dal n.° 12 si ha

$$a^{\pi\sqrt{-1}}=1,$$

e che facendo $a=e$, $La=1$, il che fa sparire a dalla generazione delle funzioni seno e coseno, viene ancora

$$e^{\sqrt{-1}}=1^{\frac{1}{\pi}}=\left(1^{m}\right)^{\frac{1}{\pi}}=1^{\frac{m}{\pi}},$$

m essendo un numero intero arbitrario, positivo, negativo ovvero zero. Sostituendo questo valore nell' espressioni (*f*), esse diventano,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{1^{\frac{mx}{\pi}}-1^{-\frac{mx}{\pi}}\right\} \\ \cos x &= \frac{1}{2}\left\{1^{\frac{mx}{\pi}}+1^{-\frac{mx}{\pi}}\right\} \end{aligned}\right\} \ldots (F).$$

È facile di riconoscere, sotto questa forma, che le funzioni dei seni e coseni, considerate in tutta la loro generalità, ammettono un' infinità di valori differenti per ciascun valore della variabile x, corrispondenti all' infinità dei valori differenti che possono dare al numero arbitrario m. E non è che quando $m=1$ che i seni sono quelli che si trova nella geometria. Per questo caso semplice e particolare si ha:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{1^{\frac{x}{\pi}}-1^{-\frac{x}{\pi}}\right\} \\ \cos x &= \frac{1}{2}\left\{1^{\frac{x}{\pi}}+1^{-\frac{x}{\pi}}\right\} \end{aligned}\right\} \ldots (F).$$

22. Non sarà forse inutile il far conoscere come si può dedurre [illegible] espressioni [illegible] le generazioni teoriche dei seni e coseni. Per quest' effetto, osserviamo che, qualunque siano le quantità a, b, c, ... si ha generalmente, per le

sviluppo della funzione esponenziale a^z,

$$a^z = 1 + \frac{(\mathrm{L}a) \cdot z}{1} + \frac{(\mathrm{L}a)^2 \cdot z^2}{1 \cdot 2} + \frac{(\mathrm{L}a)^3 \cdot z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{ec.}$$

La caratteristica L indicando il logaritmo naturale di a. (*Vedi* Logaritmo, n.° 15). Ora, applicando questo sviluppo agli esponenziali $1^{\frac{x}{\pi}}$, $1^{-\frac{x}{\pi}}$, si trova

$$1^{\frac{x}{\pi}} = 1 + \frac{(\mathrm{L}1)}{1} \cdot \left(\frac{x}{\pi}\right) + \frac{(\mathrm{L}1)^2}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 + \frac{(\mathrm{L}1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{x}{\pi}\right)^3 + \text{ec.},$$

$$1^{-\frac{x}{\pi}} = 1 - \frac{(\mathrm{L}1)}{1} \cdot \left(\frac{x}{\pi}\right) + \frac{(\mathrm{L}1)^2}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 - \frac{(\mathrm{L}1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{x}{\pi}\right)^3 + \text{ec.},$$

il che dà, sostituendo nelle formule (s),

$$\text{sen}\, x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \left\{ \frac{\mathrm{L}1}{1} \cdot \left(\frac{x}{\pi}\right) + \frac{(\mathrm{L}1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{x}{\pi}\right)^3 + \frac{(\mathrm{L}1)^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \left(\frac{x}{\pi}\right)^5 + \text{ec.}\dots \right\}$$

$$\cos x = 1 + \frac{(\mathrm{L}1)^2}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 + \frac{(\mathrm{L}1)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \left(\frac{x}{\pi}\right)^4 + \text{ec.} \dots$$

Ora, siccome quest' espressioni dipendono non dalle radici reali, ma bensì dalle radici *immaginarie* dell' unità, il cui logaritmo *immaginario* è generalmente (*Vedi* Logaritmo n.° 17)

$$\mathrm{L}\,1 = m\pi \sqrt{-1},$$

facendo dunque $\mathrm{L}\,1 = \pi \sqrt{-1}$, per non considerare, come sopra, che i valori i quali corrispondono ad $m = 1$, otterremo definitivamente

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{ec.}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \text{ec.}$$

23. Riprendiamo il principio fondamentale (o) della teoria dei seni, e facciamo

$$x = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \text{ec.};$$

indicando con m il numero dei fattori del primo numero, otterremo

$$\left(\cos x + \text{sen}\, x \cdot \sqrt{-1}\right)^m = \cos mx + \text{sen}\, mx \cdot \sqrt{-1} \dots\dots (t),$$

e, nel caso di sen x negativo,

$$\left(\cos x - \text{sen}\, x \cdot \sqrt{-1}\right)^m = \cos mx - \text{sen}\, mx \cdot \sqrt{-1} \dots\dots (u).$$

Donde, prendendo la somma e la differenza dell'uguaglianze (t) ed (u),

$$\cos mx = \frac{1}{2}\left\{\left(\cos x + \operatorname{sen} x\,.\sqrt{-1}\right)^m + \left(\cos x - \operatorname{sen} x\,.\sqrt{-1}\right)^m\right\}$$

$$\operatorname{sen} mx = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{\left(\cos x + \operatorname{sen} x\,.\sqrt{-1}\right)^m - \right.$$

$$\left. - \left(\cos x - \operatorname{sen} x\,.\sqrt{-1}\right)^m\right\}.$$

Se si sviluppano i binomi con la formula del Newton, verrà, fatto tutte le riduzioni

$$\operatorname{sen} mx = m\left(\cos x\right)^{m-1}.\operatorname{sen} x$$

$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\cos x\right)^{m-3}.\left(\operatorname{sen} x\right)^3$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\left(\cos x\right)^{m-5}.\left(\operatorname{sen} x\right)^5$$

$$-\text{ ec.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (v)$$

$$\cos mx = \left(\cos x\right)^m - \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\left(\cos x\right)^{m-2}.\left(\operatorname{sen} x\right)^2$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\left(\cos x\right)^{m-4}.\left(\operatorname{sen} x\right)^4$$

$$-\text{ ec.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (v),$$

formule le quali danno il seno o il coseno dell'arco multiplo in funzioni del seno e del coseno dell'arco semplice.

24. Facendo in queste formule $m=2$, si ottiene

$$\operatorname{sen} 2x = 2\cos x\,.\operatorname{sen} x,$$

$$\cos 2x = \left(\cos x\right)^2 - \left(\operatorname{sen} x\right)^2,$$

e, se si pone $2x = z$, donde $x = \frac{1}{2}z$, quest'ultime diventano

$$\operatorname{sen} z = 2\,.\cos\frac{1}{2}z\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}z,$$

$$\cos z = \left(\cos\frac{1}{2}z\right)^2 - \left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}z\right)^2.$$

Quest'espressioni trovano delle numerose applicazioni.

25. Se si osserva che si ha dalla natura stessa dei seni (n.° 12)

$$\left(\cos\frac{1}{2}z\right)^2+\left(\text{sen}\,\frac{1}{2}z\right)^2=1$$

e che si paragoni quest' uguaglianza con quella che abbiamo dedotto

$$\cos z=\left(\cos\frac{1}{2}z\right)^2-\left(\text{sen}\,\frac{1}{2}z\right)^2,$$

se ne ricaverà

$$\left.\begin{aligned}\text{sen}\,\frac{1}{2}z&=\sqrt{\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos z\right]}\\ \cos\frac{1}{2}z&=\sqrt{\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos z\right]}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(x),$$

oguaglianza che conducono alle seguenti

$$\left.\begin{aligned}\text{sen}\,\frac{1}{2}z&=\frac{1}{2}\sqrt{\left[1+\text{sen}\,z\right]}-\frac{1}{2}\sqrt{\left[1-\text{sen}\,z\right]}\\ \cos\frac{1}{2}z&=\frac{1}{2}\sqrt{\left[1+\text{sen}\,z\right]}+\frac{1}{2}\sqrt{\left[1-\text{sen}\,z\right]}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(z).$$

26. Le formule precedenti somministrano i mezzi di esprimere sotto una forme finite i seni dei multipli di 3°, i soli che si possa assegnare così. Daremo quest' espressioni le quali sono particolarmente utili nella teoria dei poligoni e nei problemi meccanici.

Cominciando dal fare $z=90°$, si ha $\cos 90°=0$, e sostituendo nelle formule (x), si trova

$$\cos 45° = \text{sen}\,45° = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Si sa che il lato dell' esagono inscritto ovvero che la corda di 60° è uguale al raggio del circolo; ora la corda di 60° è il doppio del seno di 30°; così

$$\text{sen}\,30° = \frac{1}{2},$$

e per conseguenza

$$\cos 60° = \frac{1}{2}.$$

Questo valore di cos 60° ci va a far conoscere quello del coseno di 30° che è la stessa cosa del seno di 60°. Abbiamo infatti

$$\cos 30° = \sqrt{\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right]} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

e conseguentemente,

$$\text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Questi valori possono darci immediatamente quelli dei seni di 15^0 e di 75^0 impiegando i teoremi fondamentali (q), poichè in virtù di questi teoremi si ha

$$\text{sen}\ 15^0 = \text{sen}\left(45^0 - 30^0\right) = \text{sen}\ 45^0 \cdot \cos 30^0 - \cos 45^0 \cdot \text{sen}\ 30^0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

$$\cos 15^0 = \cos\left(45^0 - 30^0\right) = \cos 45^0 \cdot \cos 30^0 + \text{sen}\ 45^0 \cdot \text{sen}\ 30^0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} + 1\right).$$

Il seno di 18^0 è la metà della corda di 36^0 che è il lato del decagono inscritto. Quando il raggio $= 1$, questo lato è (*Vedi* DECAGONO).

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2};$$

così

$$\text{sen}\ 18^0 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right),$$

donde

$$\cos 18^0 = \sqrt{\left[1 - \text{sen}^2 . 18^0\right]} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(5 + \sqrt{5}\right)}.$$

Possiamo ricavare da questi valori quelli dei seni di 9^0, 27^0, 36^0, 54^0, 63^0, 72^0, 81^0, e per conseguenza tutti quelli che presenteremo nella seguente tavola

$$\text{sen}\ 3^0 = \frac{\sqrt{3}+1}{8\sqrt{2}}\left(\sqrt{5} - 1\right) - \frac{\sqrt{3}-1}{8}\sqrt{\left(5 + \sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen}\ 6^0 = -\frac{1}{8}\left(\sqrt{5} + 1\right) + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\sqrt{\left(5 - \sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen}\ 9^0 = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt{5} + 1\right) - \frac{1}{4}\sqrt{\left(5 - \sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen}\ 12^0 = -\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sqrt{5} - 1\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{\left(5 + \sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen}\ 15^0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

$$\text{sen}\ 18^0 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

$$\text{sen}\ 21^0 = -\frac{\sqrt{3}-1}{8\sqrt{2}}\left(\sqrt{5} + 1\right) + \frac{\sqrt{3}+1}{8}\sqrt{\left(5 - \sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen } 24^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sqrt{5}+1\right) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{\left(5-\sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen } 27^\circ = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt{5}-1\right) + \frac{1}{4}\sqrt{\left(5+\sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen } 33^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{8\sqrt{2}}\left(\sqrt{5}-1\right) + \frac{\sqrt{3}-1}{8}\sqrt{\left(5+\sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen } 36^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\left(5-\sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen } 39^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{8\sqrt{2}}\left(\sqrt{5}+1\right) - \frac{\sqrt{3}-1}{8}\sqrt{\left(5-\sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen } 42^\circ = -\frac{1}{8}\left(\sqrt{5}-1\right) + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\sqrt{\left(6+\sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{sen } 48^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sqrt{5}-1\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{\left(5+\sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen } 51^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{8\sqrt{2}}\left(\sqrt{5}+1\right) + \frac{\sqrt{3}+1}{8}\sqrt{\left(5-\sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen } 54^\circ = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$$

$$\text{sen } 57^\circ = -\frac{\sqrt{3}-1}{8\sqrt{2}}\left(\sqrt{5}-1\right) + \frac{\sqrt{3}+1}{8}\sqrt{\left(5+\sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen } 63^\circ = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt{5}-1\right) + \frac{1}{4}\sqrt{\left(5+\sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen } 66^\circ = \frac{1}{8}\left(\sqrt{5}+1\right) + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\sqrt{\left(5-\sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen } 69^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{8\sqrt{2}}\left(\sqrt{5}+1\right) + \frac{\sqrt{3}-1}{8}\sqrt{\left(5-\sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen } 72^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\left(5+\sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen}\,75^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

$$\text{sen}\,78^\circ = \frac{1}{8}\left(\sqrt{5}-1\right) + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\sqrt{\left(5+\sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen}\,81^\circ = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt{5}+1\right) + \frac{1}{4}\sqrt{\left(5-\sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen}\,84^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sqrt{5}+1\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{\left(5-\sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen}\,87^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{8\sqrt{2}}\left(\sqrt{5}-1\right) + \frac{\sqrt{3}+1}{8}\sqrt{\left(5+\sqrt{5}\right)}$$

$$\text{sen}\,90^\circ = 1.$$

27. Le serie (u) e (v) le quali danno il seno e il coseno di un arco multiplo mx in funzioni dei seni e coseni dell'arco semplice x, contengono ciascuna nello stesso tempo questi seni e coseni, e possiamo proporci di ottenere la stessa generazione per mezzo delle funzioni del solo seno o del solo coseno di x. Indicheremo i processi per mezzo dei quali è stata risoluta questa questione.

Cominciamo da osservare che z essendo un numero qualunque il cui seno è dato, possiamo ottenere la generazione di z in serie, prendendo sen z per misura, mentre generalmente si deve avere

$$z = A_0 + A_1\,\text{sen}\,z + A_2\left(\text{sen}\,z\right)^2 + A_3\left(\text{sen}\,z\right)^3 + \text{ec.}$$

poichè è sempre possibile di sviluppare una funzione qualunque in serie, la quale proceda seguendo le potenze progressive di un' altra funzione arbitraria delle stesse variabili (*Vedi* Serie). Ora, facendo nella legge fondamentale (h) delle serie

$$Fx = z \quad \text{e} \quad \varphi x = \text{sen}\,z,$$

e costruendo le differenziali che entrano in questa legge, si ottiene per i coefficienti A_0, A_1, A_2, ec., i valori

$$A_0 = 0,\quad A_1 = 1,\quad A_2 = 0,\quad A_3 = \frac{1}{2\,.\,3},\quad A_4 = 0,$$

$$A_5 = \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,5},\quad A_6 = 0,\quad A_7 = \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,7},\quad A_8 = 0,$$

$$A_9 = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,9},\quad A_{10} = 0,\ \text{ec.}$$

la cui legge è evidente, e si ha ancora

$$z = \text{sen}\,z + \frac{1}{2\,.\,3}\left(\text{sen}\,z\right)^3 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,5}\left(\text{sen}\,z\right)^5 + \text{ec.} \ldots\ldots (y),$$

espressione che in altra parte abbiamo dedotto mediante un altro processo (*Vedi* Ritorno delle Serie),

Premesso ciò se nella formula del n.° 20 si fa $x = nz$, verrà

$$\operatorname{sen} nz = nz - \frac{n^3 \cdot z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n^5 \cdot z^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$- \frac{n^7 \cdot z^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{ec.}$$

e se in quest' ultima si sostituiscono i valori di z, z^3, z^5, ec., ricavati dalla formula (y), otterremo, dopo tutte le riduzioni,

$$\operatorname{sen} nz = n \operatorname{sen} z - \frac{n(n^2-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\operatorname{sen} z\right)^3 +$$

$$+ \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\left(\operatorname{sen} z\right)^5$$

$$- \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}\left(\operatorname{sen} z\right)^7$$

$$+ \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)(n^2-49)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}\left(\operatorname{sen} z\right)^9 + \text{ec.} \dots \quad (z).$$

Operando nella stessa maniera per il coseno di nz, si troverà

$$\cos nz = 1 - \frac{n^2}{1 \cdot 2}\left(\operatorname{sen} z\right)^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\left(\operatorname{sen} z\right)^4$$

$$- \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\left(\operatorname{sen} z\right)^6$$

$$+ \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}\left(\operatorname{sen} z\right)^8$$

$$- \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)(n^2-64)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}\left(\operatorname{sen} z\right)^{10} + \text{ec.} \dots (\alpha).$$

La serie (z) ha evidentemente un numero finito di termini, quando n è un numero intero *impari*, e un numero indefinito di termini in tutti gli altri casi. Ciò non ostante quando n è intero e *pari*, possiamo trasformarla in un'altra serie il numero dei termini della quale si riduce ad $\frac{n}{2}$, ma che è moltiplicata per $\cos z$ ovvero $\sqrt{\left[1-\operatorname{sen}^2 z\right]}$. Infatti, indichiamo con S il secondo numero di questa serie, avremo l' identità

$$\operatorname{sen} nz = S \cdot \frac{\cos z}{\cos z} = \frac{S \cdot \sqrt{\left[1-\operatorname{sen}^2 z\right]}}{\sqrt{\left[1-\operatorname{sen}^2 z\right]}},$$

e dividendo S per lo sviluppo di $\sqrt{\left[1-\operatorname{sen}^2 z\right]}$, otterremo

$$\operatorname{sen} nz = \sqrt{\left[1-\operatorname{sen}^2 z\right]} \cdot \left\{ n \operatorname{sen} z - \frac{n(n^2-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \operatorname{sen}^3 z \right.$$

$$+ \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \operatorname{sen}^5 z$$

$$- \frac{n(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \operatorname{sen}^7 z$$

$$+ \frac{n(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)(n^2-64)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} \operatorname{sen}^9 z$$

$$\left. - \text{ec.} \ldots\ldots\ldots\ldots \right\} \ldots\ldots (z'),$$

serie che si compone di un numero finito di termini, quando n è *pari*.

La serie (α) va a terminare sempre quando n è intero e *pari*, e in tutti gli altri casi essa è indefinita. Ma operando sopra di essa come lo abbiamo fatto per la serie (z), si trasforma in

$$\cos nz = \sqrt{\left[1-\operatorname{sen}^2 z\right]} \cdot \left\{ 1 - \frac{n^2-1}{1 \cdot 2} \cdot \operatorname{sen}^2 z \right.$$

$$+ \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \operatorname{sen}^4 z$$

$$- \frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot \operatorname{sen}^6 z$$

$$+ \frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)(n^2-49)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} \operatorname{sen}^8 z$$

$$\left. - \text{ec.} \ldots\ldots\ldots\ldots \right\} \ldots\ldots (\alpha'),$$

il numero dei termini della quale è finito quando n è intero ed *impari*.

28. Se vogliamo avere delle serie, le quali procedano per le potenze di $\cos z$, bisogna sostituire nelle precedenti $90^\circ - z$ invece di z, e si ottiene, ma solamente nel caso in cui n è un numero intero, cioè:

Per n, numero *impari*

$$\operatorname{sen} nz = \pm \sqrt{\left[1-\cos^2 z\right]} \cdot \left\{ 1 - \frac{n^2-1}{1 \cdot 2} \cdot \cos^2 z \right.$$

$$+ \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \cos^4 z$$

$$- \frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \cos^6 z$$

$$\left. + \text{ec.} \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}.$$

$$\cos nz = \pm \left\{ n \cdot \cos z - \frac{n(n^2-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \cos^3 \cdot z + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \cos^5 \cdot z - \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \cos^7 \cdot z + \text{ec.} \ldots \right\}.$$

Il segno $+$ ha luogo quando n è della forma $4m+1$, e il segno $-$, quando è della forma $4m-1$; m essendo un numero intero positivo qualunque compresovi zero.

Per n, numero *pari*

$$\text{sen} \cdot nz = \pm \sqrt{\left[1 - \cos^2 z\right]} \cdot \left\{ n \cdot \cos \cdot z - \frac{n(n^2-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \cos^3 \cdot z - \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \cos^5 \cdot z + \frac{n(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \cos^7 \cdot z - \text{ec.} \ldots \right\}.$$

Il segno $+$ ha luogo quando n è della forma $4m+2$, e il segno $-$, quando è della forma $4m$.

$$\cos \cdot nz = \pm \left\{ 1 - \frac{n^2}{1 \cdot 2} \cdot \cos^2 \cdot z + \frac{n^2(n^2-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \cos^4 \cdot z - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \cos^6 \cdot z + \text{ec.} \ldots \right\},$$

il segno $+$ ha luogo quando $n = 4m$, e il segno $-$, quando $n = 4m-2$.

29. Le formule che esprimono le potenze dei seni e coseni di un arco semplice in funzioni dei seni e coseni degli archi multipli non sono meno importanti delle precedenti. Siccome esse trovano numerose applicazioni nel calcolo integrale, ne daremo la loro deduzione. Sappiamo che

$$\cos x = \frac{1}{2} \left\{ e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} \right\},$$

poniamo

$$e^{x\sqrt{-1}} = p, \quad e^{-x\sqrt{-1}} = q,$$

ed avremo da una parte

$$p \cdot q = 1,$$

e dall' altra

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(p+q\right),$$

ovvero

$$2 \cdot \cos x = \left(p+q\right);$$

così

$$2^n \cdot \cos^n \cdot x = \left(p+q\right)^n = \left(q+p\right)^n;$$

e conseguentemente

$$2^{n+1} \cdot \cos^n \cdot x = \left(p+q\right)^n + \left(q+p\right)^n.$$

sviluppando i binomi, otterremo

$$2^{n+1} \cdot \cos^n \cdot x = p^n + q^n + npq\left(p^{n-2}+q^{n-2}\right)$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} p^2q^2\left(p^{n-4}+q^{n-4}\right)$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^3q^3\left(p^{n-6}+q^{n-6}\right)$$

$$+ \text{ec.}$$

Ora,

$$pq = p^2q^2 = p^3q^3 = \text{ec.} = 1,$$

e si ha in generale

$$p^{\mu} + q^{\mu} = \cos \mu x + \text{sen}\, \mu x \sqrt{-1} + \cos \mu x - \text{sen}\, \mu x \sqrt{-1}$$

$$= 2 \cos \mu x;$$

dunque

$$2^n \cos^n \cdot x = \cos \cdot nx + \frac{n}{1} \cos\left(n-2\right)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos\left(n-4\right)x$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos\left(n-6\right)x$$

$$+ \text{ec.}$$

Partendo dall' espressione teorica primitiva del seno, si troverebbe, con un metodo simile, quando n è un numero *pari*,

$$2^n \operatorname{sen}^n . x = \pm \left\{ \cos n x - \frac{n}{1} \cos\left(n-2\right) x + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} \cos\left(n-4\right) x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \cos\left(n-6\right) x + \text{ec.} \ldots \right\},$$

e quando n è un numero *impari*,

$$2^{n-1} . \operatorname{sen}^n x = \pm \left\{ \operatorname{sen} n x - \frac{n}{1} \operatorname{sen}\left(n-2\right) x + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} \operatorname{sen}\left(n-4\right) x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \operatorname{sen}\left(n-6\right) x + \text{ec.} \right\}.$$

Il segno $+$ ha luogo quando n è un multiplo di 4 nella prima formula, e quando $n-1$ è un multiplo di 4 nella seconda formula.

30. Esaminiamo ora le funzioni che resultano dal rapporto dei seni e coseni paragonati tanto tra essi quanto col raggio o l' unità. Abbiamo veduto (SECANTE e TANGENTE) chè si ha generalmente

$$\left.\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} &= \text{tangente } x \\ \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} &= \text{cotangente } x \\ \frac{1}{\cos x} &= \text{secante } x \\ \frac{1}{\operatorname{sen} x} &= \text{cosecante } x \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\beta).$$

Ci rimane dunque solamente da dedurre delle proprietà dei seni quella delle tangenti e delle secanti.

Nei casi generali dove $x = 0$, ovvero $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, π, è facile vedere che si ha, π indicando sempre la circonferenza del circolo il cui raggio è l' unità,

$$\text{tang} . \ 0 = \frac{\operatorname{sen} 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\text{tang} . \frac{\pi}{4} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{0} = \infty,$$

$$\text{tang}\,.\,\frac{\pi}{2}=\frac{\text{sen}\,\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}=-\frac{0}{1}=0,$$

$$\text{tang}\,.\,\frac{3\pi}{4}=\frac{\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{3\pi}{4}}=-\frac{1}{0}=-\infty,$$

$$\text{tang}\,.\,\pi=\frac{\text{sen}\,\pi}{\cos\pi}=\frac{0}{1}=0.$$

Così, per i valori degli archi da 0 fino a $\frac{\pi}{4}$, le tangenti crescono da 0 all'*infinito*, da $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$ esse diminuiscono dall'infinito a zero; passato $\frac{\pi}{2}$ esse diventano *negative* e da $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{4}$ esse crescono da 0 all'infinito; finalmente da $\frac{3\pi}{4}$ a π esse diminuiscono di nuovo dall'infinito fino a zero, essendo sempre negative.

Si troverebbe ugualmente indicando con *cot*, *sec* e *cosec*, le cotangenti, secanti e cosecanti,

$$\cot 0=\infty,\quad \sec 0=1,\quad \text{cosec}\,0=\infty,$$

$$\cot\frac{\pi}{4}=0,\quad \sec\frac{\pi}{4}=\infty,\quad \text{cosec}\,\frac{\pi}{4}=1,$$

$$\cot\frac{\pi}{2}=-\infty,\quad \sec\frac{\pi}{2}=-1,\quad \text{cosec}\,\frac{\pi}{2}=\infty,$$

$$\cot\frac{3\pi}{4}=0,\quad \sec\frac{3\pi}{4}=-\infty,\quad \text{cosec}\,\frac{3\pi}{4}=-1,$$

$$\cot\pi=\infty,\quad \sec\pi=1,\quad \text{cosec}\,\pi=-\infty.$$

Resulta da quest'espressioni che le tangenti e le cotangenti degli archi da 0 fino a π possano rappresentare tutti i numeri positivi e negativi, da 0 fino all'infinito, proprietà assai importante e la quale riceve unmesose applicazioni. Quanto alle secanti e alle cosecanti, esse possano ugualmente rappresentare tutti i numeri positivi e negativi, ma solamente dall'*unità* fino all'infinito.

31. Queste funzioni hanno, come i seni, la proprietà di poter sempre essere rappresentate da quelle tra essa che si riferiscono al primo quarto del circolo, prendendole con un segno conveniente, poichè partendo dall'espressioni primitive (6), è facile vedere che si comincia da avere in generale, x essendo più

piccolo di π,

$$\operatorname{tang}\left(m\pi+x\right)=\operatorname{tang} x, \quad \sec\left(m\pi+x\right)=\sec x,$$

$$\cot\left(m\pi+x\right)=\cot x, \quad \operatorname{cosec}\left(m\pi+x\right)=\operatorname{cosec} x,$$

e, quindi, x essendo più piccolo di $\frac{\pi}{4}$,

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-\cot x, \quad \sec\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{cosec} x,$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=+\operatorname{tang} x, \quad \sec\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sec x,$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)=-\cot x, \quad \sec\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)=+\operatorname{cosec} x,$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-\operatorname{tang} x, \quad \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=+\sec x,$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=+\cot x, \quad \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{cosec} x,$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)=-\operatorname{tang} x, \quad \operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)=-\sec x.$$

Si hanno inoltre le relazioni fondamentali,

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cot x, \quad \sec\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\operatorname{cosec} x.$$

Tutte le altre proprietà e relazioni di queste funzioni essendo, come le precedenti, delle conseguenze dirette di quelle dei seni e coseni, la loro deduzione non presenta veruna difficoltà; così ci contenteremo di riportare le formule le più usuali.

32. Partendo sempre dall'espressioni primitive (β): se vogliamo ottenere l'espressione della tangente della somma di due archi a e b, si trova

$$\operatorname{tang}\left(a+b\right)=\frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\operatorname{sen} a \,.\, \cos b+\cos a \,.\, \operatorname{sen} b}{\cos a \,.\, \cos b-\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b},$$

e dividendo tutto il secondo membro per $\cos a \,.\, \cos b$,

$$\operatorname{tang}\left(a+b\right)=\frac{\dfrac{\operatorname{sen} a \,.\, \cos b}{\cos a \,.\, \cos b}+\dfrac{\cos a \,.\, \operatorname{sen} b}{\cos a \,.\, \cos b}}{1-\dfrac{\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b}{\cos a \,.\, \cos b}},$$

il che riducesi definitivamente a

$$\tang\left(a+b\right)=\frac{\tang a+\tang b}{1-\tang a\cdot\tang b}\quad\ldots\ldots(7).$$

Se invece di dividere per $\cos a\,.\cos b$ si fosse diviso per $\operatorname{sen} a\,.\operatorname{sen} b$, si sarebbe ottenuto

$$\tang\left(a+b\right)=\frac{\cot a+\cot b}{\cot a\,.\cot b-1}.$$

Si troverebbe ugualmente:

$$\tang\left(a-b\right)=\frac{\tang a-\tang b}{1+\tang a.\tang b}=\frac{\cot b-\cot a}{1+\cot a\,.\cot b}.$$

Se si osserva che in generale

$$\cot x=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}=\frac{1}{\tang x},$$

si potrà conchiudere immediatamente

$$\cot\left(a+b\right)=\frac{1-\tang a.\tang b}{\tang a+\tang b}=\frac{\cot a.\cot b-1}{\cot a+\cot b},$$

$$\cot\left(a-b\right)=\frac{1+\tang a.\tang b}{\tang a-\tang b}=\frac{\cot a\,.\cot b+1}{\cot b-\cot a}.$$

33. Impiegando simili operazioni, si troverà ancora

$$\frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\operatorname{sen}(a-b)}=\frac{\tang a+\tang b}{\tang a-\tang b}=\frac{\cot b+\cot a}{\cot b-\cot a}$$

$$\frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)}=\frac{\cot b-\tang a}{\cot b+\tang a}=\frac{\cot a-\tang b}{\cot a+\tang b},$$

e, finalmente, combinando le tangenti con le formole (p), si scopriranno i seguenti teoremi importanti,

$$\frac{\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} b}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\left(a+b\right).\cos\frac{1}{2}\left(a-b\right)}{\cos\frac{1}{2}\left(a+b\right).\operatorname{sen}\frac{1}{2}\left(a-b\right)}$$

$$=\frac{\tang\frac{1}{2}\left(a+b\right)}{\tang\frac{1}{2}\left(a-b\right)},$$

$$\frac{\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b}{\cos a+\cos b}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\left(a+b\right)}{\cos\frac{1}{2}\left(a+b\right)}=\tang\frac{1}{2}\left(a+b\right)$$

$$\frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\cos b - \cos a} = \frac{\cos \frac{1}{2}\left(a-b\right)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\left(a-b\right)} = \cot \frac{1}{2}\left(a-b\right),$$

$$\frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}{\cos a + \cos b} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\left(a-b\right)}{\cos \frac{1}{2}\left(a-b\right)} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\left(a-b\right),$$

$$\frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}{\cos b - \cos a} = \frac{\cos \frac{1}{2}\left(a+b\right)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\left(a+b\right)} = \cot \frac{1}{2}\left(a+b\right),$$

$$\frac{\cos a + \cos b}{\cos b - \cos a} = \frac{\cos \frac{1}{2}\left(a+b\right) . \cos \frac{1}{2}\left(a-b\right)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\left(a+b\right) . \operatorname{sen} \frac{1}{2}\left(a-b\right)}$$

$$= \frac{\cot \frac{1}{2}\left(a+b\right)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\left(a-b\right)}.$$

34. Con l'aiuto della formula (γ), possiamo costruire la tangente di un arco multiplo in funzione della tangente dell'arco semplice, poichè cominciando dal farvi $a = b$, si trova

$$\operatorname{tang} 2a = \frac{2 \operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang}^2 a}.$$

Poi siccome questa stessa formula dà generalmente

$$\operatorname{tang}\left(a + ma\right) = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} m a}{1 - \operatorname{tang} a \,.\, \operatorname{tang} m a} \; \ldots\ldots \; (\delta),$$

facendo $m = 2$, viene, mediante la sostituzione del valore di $\operatorname{tang} 2a$,

$$\operatorname{tang} 3a = \frac{3 \operatorname{tang} a - \operatorname{tang}^3 . a}{1 - 3 \operatorname{tang}^2 . a},$$

facendo $m = 3$ in (δ), viene ancora, mediante la sostituzione del valore di $\operatorname{tang} 3a$, e le riduzioni,

$$\operatorname{tang} 4a = \frac{4 \operatorname{tang} a - 4 \operatorname{tang}^3 . a}{1 - 6 \operatorname{tang}^2 . a + \operatorname{tang}^4 . a}.$$

Operando sempre nella stessa maniera, si otterrebbero l' espressioni di tang $5a$, tang $6a$, ec.; ma non è facile con questo mezzo di scoprire la legge di quest' espressioni, per le quali risaliremo all' espressione teorica primitiva dalle tangenti.

35. Se si sostituiscono nella primitiva relazione $\tang x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$ l'espressioni teoriche (h) del seno e del coseno, viene

$$\tang x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \left\{ \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1} \right\}.$$

Tale è l' espressione teorica primitiva della funzione tang x. Essa somministra ponendo $x = mz$,

$$\tang mz = \frac{1}{\sqrt{-1}} \left\{ \frac{e^{2mz\sqrt{-1}} - 1}{e^{2mz\sqrt{-1}} - 1} \right\} \ldots\ldots (\,).$$

Ora, abbiamo veduto (n.° 11) che

$$e^{z\sqrt{-1}} = \cos z + \text{sen}\, z \,.\, \sqrt{-1}$$

$$e^{-z\sqrt{-1}} = \cos z - \text{sen}\, z \,.\, \sqrt{-1}\,,$$

dividendo la prima di quest' ugnaglianze per la seconda, si trova

$$e^{2z\sqrt{-1}} = \frac{\cos z + \text{sen}\, z \,.\, \sqrt{-1}}{\cos z - \text{sen}\, z \,.\, \sqrt{-1}},$$

e, dividendo i due termini del secondo membro per cos z,

$$e^{2z\sqrt{-1}} = \frac{1 + \tang z \,.\, \sqrt{-1}}{1 - \tang z \,.\, \sqrt{-1}}.$$

Quest' ultima ugnaglianza elevata alla potenza m dà

$$e^{2mz\sqrt{-1}} = \left(\frac{1 + \tang z \,.\, \sqrt{-1}}{1 - \tang z \,.\, \sqrt{-1}} \right)^m.$$

Così, sostituendo quest' espressione in (c) e facendo per abbreviare $\tang z = t$, verrà

$$\tang mz = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{(1 + t\sqrt{-1})^m - (1 - t\sqrt{-1})^m}{(1 + t\sqrt{-1})^m + (1 - t\sqrt{-1})^m},$$

sviluppando i binomi e riducendo, si otterrà definitivamente l' espressione generale

$$\text{tang}\, m z = \frac{m\,\text{tang}\, z - \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}}\text{tang}^3 . z + \frac{m^{5|-1}}{1^{5|1}}\text{tang}^5 . z - \text{ec.}}{1 - \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} . \text{tang}^2 . z + \frac{m^{4|-1}}{1^{4|1}} . \text{tang}^4 . z - \text{ec.}}.$$

36. La generazione tecnica in serie della tangente, per mezzo dell' arco, ha molto occupato i geometri. Il primo mezzo che si presenta è di sostituire nella relazione primitiva

$$\text{tang}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x},$$

le serie (n.° 20) le quali danno il seno e il coseno, e di operare la divisione; si ottiene in questo modo:

$$\text{tang}\, x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3.5}x^5 + \frac{17}{3.3.5.7}x^7 + \frac{62}{3.3.5.7.9}x^9$$

$$+ \frac{1382}{3.3.5.5.7.9.11}x^{11} + \text{ec.}$$

Ma questo processo assai faticoso non fa conoscere la *legge* della serie, nel mentre che un' applicazione semplicissima del metodo dei coefficienti indeterminati ci fa conoscere questa legge.

Poichè le potenze pari di x mancano in questa serie, poniamo

$$\text{tang}\, x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + Ex^9 + \text{ec.}$$

e siccome $\cos x . \text{tang}\, x = \text{sen}\, x$, sostituendo, in quest' ultima uguaglianza, gli sviluppi alle funzioni, avremo:

$$\left((Ax + Bx^3 + Cx^5 + \text{ec.}\dots\right) . \left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{ec.}\dots\right) =$$

$$= x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ec.}$$

Effettuando la moltiplicazione dei fattori del primo membro e quindi uguagliando i coefficienti delle medesime potenze di x nei due membri, otterremo

$$A = \frac{1}{1}$$

$$B = \frac{A}{1.2} - \frac{1}{1.2.3}$$

$$C = \frac{B}{1.2} - \frac{A}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5}$$

$$D = \frac{C}{1.2} - \frac{B}{1.2.3.4} + \frac{A}{1.2.3.4.5.6} - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$$

$$E = \frac{D}{1.2} - \frac{C}{1.2.3.4} + \frac{B}{1.2.3.4.5.6} - \frac{A}{1.2.3.4.5.6.7.8}$$

$$+ \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}$$

ec. = ec.

Dividendo, la serie del coseno per quella del seno, viene

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3.3.5}x^3 - \frac{2}{3.3.3.5.7}x^5 - \text{ec.}$$

il che fa conoscere la forma della serie della cotangente, e allora se si pone

$$\cot x = A' . \frac{1}{x} + B'x + C'x^3 + D'x^5 + E'x^7 + \text{ec.}$$

il metodo che abbiamo seguito ci fa scoprire la legge segnente che lega i coefficienti A', B', C', ec.

$$A' = 1$$

$$B' = \frac{A'}{1.2.3} - \frac{1}{1.2}$$

$$C' = \frac{B'}{1.2.3} - \frac{A'}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{1.2.3.4}$$

$$D' = \frac{C'}{1.2.3} - \frac{B'}{1.2.3.4.5} + \frac{A'}{1.2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{1.2.3.4.5.6}$$

$$E' = \frac{D'}{1.2.3} - \frac{C'}{1.2.3.4.5} + \frac{B'}{1.2.3.4.5.6.7}$$

$$- \frac{A'}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}$$

$$+ \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}$$

ec. = ec.

37. La serie precedenti essendo conosciute, diventa facile, col metodo del *ritorno delle serie* (*Vedi* QUESTA PAROLA), di trovare quella che dà la generazione dell'arco per mezzo delle potenze progressive della tangente; serie che possiamo ancora ottenere mediante una semplice applicazione della legge fondamentale delle serie; ma il processo più semplice è quello dell'Eulero che faremo conoscere. La caratteristica L indicando i logaritmi naturali, si sa che (*Vedi* LOGARITMO)

$$L\left(1+z\right) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6} + \text{ec.}$$

facendo z negativo, si ha ancora

$$L\left(1-z\right) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{} - \text{ec.}$$

donde, sottraendo la seconda uguaglianza dalla prima,

$$L\left(1+z\right)-L\left(1-z\right)=L\left[\frac{1+z}{1-z}\right]=2\left\{z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+ec.\right\},$$

premesso ciò, abbiamo

$$e^{x\cdot\sqrt{-1}}=\cos x+\text{sen}\,x\cdot\sqrt{-1},$$

e, prendendo i logaritmi,

$$x\cdot\sqrt{-1}=L\left(\cos x+\text{sen}\,x\cdot\sqrt{-1}\right),$$

e ancora,

$$-x\cdot\sqrt{-1}=L\left(\cos x-\text{sen}\,x\cdot\sqrt{-1}\right),$$

sottraendo la seconda uguaglianza dalla prima, viene

$$x=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot L\left[\frac{\cos x+\text{sen}\,x\cdot\sqrt{-1}}{\cos x-\text{sen}\,x\cdot\sqrt{-1}}\right],$$

ora, (n.° 35)

$$\frac{\cos x+\text{sen}\,x\cdot\sqrt{-1}}{\cos x-\text{sen}\,x\cdot\sqrt{-1}}=\frac{1+\text{tang}\,x\cdot\sqrt{-1}}{1-\text{tang}\,x\cdot\sqrt{-1}}.$$

Così, sostituendo, in luogo di z, $\text{tang}\,x\cdot\sqrt{-1}$ nello sviluppo di $L\left[\frac{1+z}{1-z}\right]$, si otterrà

$$x=\text{tang}\,x-\frac{\text{tang}^3\cdot x}{3}+\frac{\text{tang}^5\cdot x}{5}-\frac{\text{tang}^7\cdot x}{7}+\text{ec.}$$

38. La serie che abbiamo dedotta conduce a quella che il Leibnizio ha dato pel valore della circonferenza del circolo, mentre, osservando che la tangente dell'arco di 45°, o dell'*ottava* parte della circonferenza, è uguale al raggio, se ci facciamo $\text{tang}\,x=1$, il che rende $x=\frac{\pi}{8}$, essa diventa

$$\frac{1}{8}\pi=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\text{ec}$$

Si riconosce che la tangente di 45° è uguale all'unità partendo dai valori. (*Vedi* n.° 26)

$$\text{sen}\,45°=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

donde

$$\text{tang}\,45°=\frac{\text{sen}\,45°}{\cos 45°}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1.$$

39. Combinando, come l'abbiamo fatto, i valori dei seni della tavola del n.° 26, possiamo ottenere l'espressioni finita delle taogenti; ecco quelle di quest'espressioni che possono essere impiegate con vantaggio; le altre sono troppo complicate per essere utili.

$$\text{tang}\,.\,15^\circ = 2 - \sqrt{3},$$

$$\text{tang}\,.\,18^\circ = \sqrt{\left[1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right]},$$

$$\text{tang}\,.\,30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\text{tang}\,.\,36^\circ = \sqrt{\left[5 - 2\sqrt{5}\right]},$$

$$\text{tang}\,.\,45^\circ = 1,$$

$$\text{tang}\,54^\circ = \sqrt{\left[1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right]},$$

$$\text{tang}\,60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\text{tang}\,72^\circ = \sqrt{\left[5 + 2\sqrt{5}\right]},$$

$$\text{tang}\,75^\circ = 2 + \sqrt{3}.$$

La costruzione delle tavole delle taogenti non richiede che una serie di divisioni quando digià abbiamo costruito quelle dei seni e coseni; possiamo ancora calcolarle direttamente con le precedenti formule, ma queste particolarità non possano trovar luogo in questo dizionario.

Quanto alle *secanti*, quando se ne incontrano nei calcoli, si riportano ai seni con l'aiuto delle relazioni primitive

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \text{cosec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x},$$

siccome si riportano ancora i *seni-versi* ai seni con le relazioni

$$\text{sen}\,.\,\text{verso}\, x = 1 - \cos x, \quad \cos\,.\,\text{verso}\, x = 1 - \text{sen}\, x.$$

Dobbiamo rimandare, per tutte le particolarità di questa teoria, *all'introduzione all'analisi degli infinitamente piccoli* dell'Eulero, e alla *Trigonometria* del Cagnoli.

40. Per terminare quello che riguarda i seni *circolari*, daremo la deduzione dell'espressioni generali delle differenziali di queste funzioni, partendo dall'espressioni teoriche

$$\text{sen}\, x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} \right\},$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \left\{ e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} \right\}.$$

Prima di tutto rammentiamoci che la prima differenziale di una quantità esponenziale a^z, è (*Vedi* DIFFERENZIALE)

$$d\left[a^z\right] = a^z . La . dz,$$

donde resulta per la differenziale dell' ordine m l' espressione

$$d^m\left[a^z\right] = a^z . \left(La\right)^m . dz^m.$$

Nel caso di $a = e$, si ha $La = 1$, e per conseguenza,

$$d^m\left[e^z\right] = e^z dz^m.$$

Se facciamo $z = x\sqrt{-1}$, avremo ancora evidentemente

$$d^m\left[e^{x\sqrt{-1}}\right] = e^{x\sqrt{-1}} . \left(\sqrt{-1}\right)^m . dx^m,$$

$$d^m\left[e^{-x\sqrt{-1}}\right] = \left(-1\right)^m . e^{x\sqrt{-1}} . \left(\sqrt{-1}\right)^m . dx^m.$$

Così

$$\left.\begin{aligned} d^m \operatorname{sen} x &= \frac{(\sqrt{-1})^m}{2\sqrt{-1}} . \left\{ e^{x\sqrt{-1}} - \left(-1\right)^m . e^{-x\sqrt{-1}} \right\} . dx^m \\ d^m \cos x &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{-1}\right)^m . \left\{ e^{x\sqrt{-1}} + \left(-1\right)^m . e^{-x\sqrt{-1}} \right\} . dx^m \end{aligned}\right\} \ldots (\mu).$$

Ora, abbiamo veduto, n.° 12, che π essendo la circonferenza del circolo il cui raggio è 1, si ha

$$e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}} = +\sqrt{-1}, \quad e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1},$$

dunque

$$e^{\frac{m\pi}{4}\sqrt{-1}} = \left(\sqrt{-1}\right)^m,$$

$$e^{-\frac{m\pi}{4}\sqrt{-1}} = \left(-1\right)^m . \left(\sqrt{-1}\right)^m,$$

sostituendo in (μ) questi valori delle potenze di $\sqrt{-1}$, verrà

$$d^m \operatorname{sen} x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ e^{\left(x+\frac{m\pi}{4}\right)\sqrt{-1}} - e^{-\left(x+\frac{m\pi}{4}\right)\sqrt{-1}} \right\},$$

$$d^m \cos x = \frac{1}{2} \left\{ e^{\left(x+\frac{m\pi}{4}\right)\sqrt{-1}} + e^{-\left(x+\frac{m\pi}{4}\right)\sqrt{-1}} \right\},$$

vale a dire, in virtù dell'espressioni stesse dalle quali siamo partiti,

$$d^m \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x+\frac{m\pi}{4}\right).dx^m,$$

$$d^m \cos x = \cos\left(x+\frac{m\pi}{4}\right).dx^m.$$

Queste belle espressioni son dovute al signor Wronski, il quale ha fatto ugualmente conoscere la legge delle differenziali successive della tangente. I nostri limiti non ci permettono di riportare quest'ultima. (Vedi *Filosofia della Tecnia* 2.ª sezione, pagina 451).

41. Risalendo ai principii dai quali siamo partiti per dedurre la teoria algebrica dei seni, si vede che la questione che è l'oggetto di questa teoria è completamente soddisfatta dalla funzione esponenziale generale

$$\varphi x = \left(a^m\right)^x;$$

e che il caso particolare dove si prende $m = \sqrt{-1}$, e $a = e$ non è in realtà che il caso il più semplice delle fonzioni trascendenti, alle quali il passaggio dalla *numerazione* alle *facoltà* dà origine. Infatti, non solamente si possono formare un'infinità di sistemi differenti di seni prendendo per la base a delle quantità arbitrarie; ma il valore $\sqrt{-1}$, che abbiamo scelto per m, col fine di fare uscire la funzione a^{mx} dalla classe delle potenze capaci di una determinazione immediata, è la più semplice delle radici dette *immaginarie* che possiamo impiegare per ottenere questo resultamento.

Prendendo per esempio la radice generale $\sqrt[2n]{\pm 1}$, l'espressione fondamentale

$$\varphi x = \left(a^{\sqrt[2n]{\pm 1}}\right)^x$$

condurrebbe a funzioni trascendenti d' ordini continuamente più elevati, dei quali non possiamo quì che indicare l' esistenza.

Ma per completare almeno la parte elementare di questa teoria, ci rimane da esaminare le funzioni che resultano dal caso in qualche modo primitivo dove $n=1$, e dove si prende il segno $+$ sotto il radicale, vale a dire, il caso dove si ha

$$\varphi x = \left(a^{\sqrt{+1}}\right)^x.$$

Allora la funzione φx non è più una funzione *derivata elementare* nel senso che abbiamo attaccato a quest' espressione, poichè essa rientra nella classe delle potenze ordinarie, ma ciò non ostante essa ha delle proprietà che meritano di essere molto osservate, le quali debbono renderla l' oggetto di una considerazione particolare.

42. Se si pone $\sqrt{-1}$ per $\sqrt{+1}$ nella deduzione che abbiamo dato (FILOSOFIA, n.° 62) dell' espressioni teoriche primitive dei seni e coseni ellittici, e se inoltre si osserva che $\sqrt{+1}=\pm 1$, otterremo per la natura della funzione φx

$$\varphi x = \mathrm{F}x + fx \,.\, \sqrt{+1}$$

le due funzioni $\mathrm{F}x, fx$ offrendo le relazioni

$$\mathrm{F}x + fx = a^{+x},$$

$$\mathrm{F}x - fx = a^{-x},$$

le quali conducono all' espressioni teoriche primitive di quest' ultime funzioni, cioè:

$$\mathrm{F}x = \frac{1}{2}\left\{a^{+x} + a^{-x}\right\},$$

$$fx = \frac{1}{2}\left\{a^{+x} - a^{-x}\right\}.$$

L' ultima di queste funzioni è ciò che si chiama *seno iperbolico*, e la prima, ciò che si chiama *coseno iperbolico*. La quantità variabile x è il doppio del settore compreso tra il primo asse e il raggio vettore condotto dal centro al punto della curva, la cui ascissa è uguale a $\mathrm{F}x$ e l' ordinata uguale a fx.

Prendendo le seconde potenze di quest' espressioni si ottiene per il legame dei seni e coseni iperbolici,

$$\left(\mathrm{F}x\right)^2 - \left(fx\right)^2 = 1.$$

43. Se prendiamo per la base a il numero e, base dei logaritmi naturali, si ottiene il sistema dei *seni* dell' iperbola *equilatera*, sistema che corrisponde a quello dell' ellisse equilatera o del *circolo*. Così indicando con le caratteristiche *sh.* e *ch.* i seni e coseni dell' iperbola equilatera, avremo per l' espressioni teo-

riche primitive di queste funzioni

$$\left.\begin{array}{l} \text{sh.}\, x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} \\ \text{ch.}\, x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} \end{array}\right\} \ldots . (v).$$

Ci rimane da dimostrare che effettivamente si ritrovano tali quantità nella geometria

44. Sia BC (*Tav.* XLVIII, *fig.* 3) un' iperbola equilatera il cui semi-asse traverso AB = 1. AC essendo un raggio vettore qualunque, se si contano le ascisse dal centro A, AD sarà l'ascissa e DC l'ordinata, le quali corrispondono al settore iperbolico ABC, o, respettivamente, il *coseno* e il *seno* di questo settore.

Per cominciare ad avere l'area di questo settore, osserviamo che essa è uguale al triangolo ADC diminuito dell'area iperbolica BCD, ovvero che si ha

$$ABC = ADC - BCD.$$

Quest' uguaglianza dà, prendendo le differenziali,

$$d(ABC) = d(ADC) - d(BCD).$$

Ora, indicando AD con x e DC con y, abbiamo

$$ADC = \frac{1}{2} AD \times DC = \frac{1}{2} x \sqrt{\left(x^2 - 1\right)},$$

poichè l' equazione dell' iperbola equilatera il cui semi-asse traverso è l' *unità* è $y^2 = x^2 - 1$. (*Vedi* IPERBOLA.) Ne resulta

$$d(ADC) = \frac{2x^2dx - dx}{2\sqrt{(x^2-1)}},$$

d' altra parte (*Vedi* QUADRATURA),

$$d\left(BCD\right) = ydx = dx\sqrt{\left(x^2 - 1\right)}.$$

Così

$$d\left(ABC\right) = \frac{dx}{2\sqrt{(x^2 - 1)}}.$$

Integrando i due membri di quest' ultima uguaglianza, viene

$$2 . ABC = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)}} = L\left[x + \sqrt{\left(x^2 - 1\right)}\right].$$

L indicando il logaritmo naturale. Così esprimendo con z il doppio del settore ABC, avremo l' uguaglianza

$$z = L\left[x + \sqrt{\left(x^2 - 1\right)}\right],$$

donde, passando dai logaritmi ai numeri,

$$e^z = x + \sqrt{(x^2 - 1)}.$$

Facendo z *negativo*, avremo ancora evidentemente

$$e^{-z} = x - \sqrt{(x^2 - 1)},$$

quest' ultime due uguaglianze essendo la stessa cosa che

$$e^z = x + y,$$

$$e^{-z} = x - y,$$

se ne deduce

$$x = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$y = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

ovvero, come qui sopra

$$sh.z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$ch.z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Facendo z negativo, si ha generalmente

$$sh.(-z) = -sh.z,$$

$$ch.(-z) = ch.z.$$

45. Per la natura di queste funzioni, la loro legge fondamentale è dunque

$$(\mathrm{ch}.x_1 + \mathrm{sh}.x_1).(\mathrm{ch}.x_2 + \mathrm{sh}.x_2).(\mathrm{ch}.x_3 + \mathrm{sh}.x_3)\ldots\ldots \text{ec.}$$

$$= \mathrm{ch}.(x_1 + x_2 + x_3 + \text{ec.}\ldots) + \mathrm{sh}.(x_1 + x_2 + x_3 + \text{ec.}\ldots),$$

ed è da questa legge che si debbono dedurre tutte le loro proprietà.

Cominciando dal caso di

$$x_1 = x_2 = x_3 = \text{ec.}\ldots\ldots = x,$$

se indicheremo con m il numero dei fattori del primo membro, verrà

$$(\mathrm{ch}.x + \mathrm{sh}.x)^m = \mathrm{ch}.mx + \mathrm{sh}.mx,$$

e facendo x negativo

$$\left(\text{ch}.x - \text{sh}.x\right)^m = \text{ch}.mx - \text{sh}.mx,$$

espressioni simili a quelle dei seni circolari e dalle quali possiamo dedurre le serie che danno il seno e il coseno iperbolici del settore multiplo in funzioni dei seni e coseni del settore semplice.

46. x e z essendo due settori differenti, si ha, mediante la legge fondamentale

$$\left(\text{ch}.x + \text{sh}.x\right).\left(\text{ch}.z + \text{sh}.z\right) = \text{ch}.\left(x+z\right) + \text{sh}.\left(x+z\right),$$

$$\left(\text{ch}.x - \text{sh}.x\right).\left(\text{ch}.z - \text{sh}.z\right) = \text{ch}.\left(x+z\right) - \text{sh}.\left(x+z\right).$$

Se, da una parte, si aggiungono quest' uguaglienze insieme, e che, dell' altra, si sottragga la seconda dalla prima, si otterrà, dopo avere sviluppato i prodotti,

$$\text{sh}.\left(x+z\right) = \text{sh}.x.\text{ch}.z + \text{ch}.x.\text{sh}.z,$$

$$\text{ch}.\left(x+z\right) = \text{ch}.x.\text{ch}.z + \text{sh}.x.\text{sh}.z,$$

il che dà, facendo z negativo

$$\text{sh}.\left(x-z\right) = \text{sh}.x.\text{ch}.z - \text{ch}.x.\text{sh}.z,$$

$$\text{ch}.\left(x-z\right) = \text{ch}.x.\text{ch}.z - \text{sh}.x.\text{sh}.z,$$

questi teoremi sono analoghi a quelli dei seni circolari.

47. Al valore $x = 0$ corrispondono, nell' espressioni primitive, i valori

$$\text{sh}.x = 0, \quad \text{ch}.x = 1,$$

ed è facile concluderne che e cominciare da zero fino all' *infinito*, per il valore del settore, il seno iperbolico cresce da 0 all' *infinito* e il coseno dall' *unità* all' *infinito*, il che rompe la rassomiglianza tra i seni iperbolici e i seni circolari. Si hanno d' altra parte ancora le altre funzioni derivate

$$\frac{\text{sh}.x}{\text{ch}.x} = \text{tang. iperb.}x, \quad \frac{1}{\text{ch}.x} = \text{sec. iperb.}x,$$

$$\frac{\text{ch}.x}{\text{sh}.x} = \text{cot. iperb.}x, \quad \frac{1}{\text{sh}.x} = \text{cosec. iperb.}x;$$

ma siccome la teoria di tutte queste funzioni non presenta veruna difficoltà, non ci fermeremo sopra di ciò. Dobbiamo solamente fare osservare che nei seni ellittici, in generale, la variabile rappresenta ancore un settore; se, nel circolo e per conseguenza nei seni circolari, questa variabile esprime un *arco*, ciò se-

gue unicamente perchè in quest' ultima figura i settori sono proporzionali agli archi.

48. L'analogia del circolo con l'iperbola equilatera conduce naturalmente alla considerazione dei *seni iperbolici*, come a quella del legame che esite tra i logaritmi naturali e i *seni circolari*, ma la teoria puramente algebrica che abbiamo esposto ha sola il merito di far conoscere l'origine di queste funzioni importanti le quali vengono a chiudere la parte teorica elementare della scienza dei numeri e a tracciare le linee di demarcazione tra gli *algoritmi elementari*, fondamenti di qualunque concepimento matematico, e le combinazioni di questi algoritmi, combinazioni, il numero delle quali è indefinito. L' Eulero è quello a cui dobbiamo i primi sviluppi della teoria dei seni circolari, teoria che ha, per così dire esaurito nella sua bella memoria, *Subsidium calculi sinuum*, inserita nel tomo V delle *Nuove Mem. di St-Pietroburgo*. Quanto ai *seni iperbolici*, pare che si debba al Lambert la loro introduzione nella scienza; almeno è esso, che, nelle sue *osservazioni trigonometriche* (Vedi *Memorie dell' Accad. di Berlino*, 1768), ha messo in piena luce l' estrema rassomiglianza che esiste tra i seni e i coseni del circolo e le coordinate dell' iperbola; esso lo ha dimostrato con un esatto parallelismo e quasi un' identità tra la formule dei seni, coseni e tangenti circolari, secondo i differenti casi o rapporti degli archi circolari, e quella dei seni, coseni e tangenti iperbolici nel casi analoghi ai differenti rapporti dei settori iperbolici. Gli dobbiamo ancora delle tavole di seni e coseni iperbolici e la prima idea di una *trigonometria iperbolica* che deve supplire ai casi in cui la trigonometria circolare non è bastante per la soluzione di diversi problemi astronomici. Queste prime idee ingegnose non hanno ancora ricevuto importanti applicazioni.

SERIE. (*Alg.*) Seguito di numeri come A+B+C+D+E+ ec., all' infinito, legati tra di essi mediante una legge.

Allorquando mediante l'addizione successiva dei termini di una serie ci si avvicina continuamente ad una stessa quantità, la serie dicesi *convergente*; tale è la serie numerica

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\text{ec.}\ \ldots\ldots \text{all' infinito},$$

il cui valore si avvicina tanto più all' *unità* a misura che si prende un maggior numero di termini.

Allorquando al contrario mediante l' addizione successiva dei termini di una serie si ottengono delle quantità, le quali differiscono tra esse continuamente, la serie dicesi *divergente*; tale è

$$1-2+4-8+16-32+64-128+\text{ec.}\ \ldots\ldots \text{all' infinito.}$$

Abbiamo veduto alla parola CONVERGENZA i mezzi di trasformare qualunque *serie divergente* in *serie convergente*, ed abbiamo dato alla parola matematiche n.i 16 e 17, la deduzione filosofica dell' algoritmo delle serie che abbraccia, come lo vedremo inseguito, tutte le matematiche moderne; in questo punto considereremo quest' algoritmo sotto il punto di vista il più generale e con tutti gli sviluppi che reclama la sua estrema importanza.

1. Cominciamo dal rammentarci 1.° che la generazione *tecnica* di una quantità differisce essenzialmente dalla sua generazione *teorica*, mentre quest' ultima dà la *natura* stessa della quantità, nel mentre che la prima non dà che la sua *misura* ovvero la sua valutazione; 2.° che la generazione *tecnica* di una quan-

tità consiste particolarmente, per quello che riguarda le *serie*, in una trasformazione della funzione, dando la generazione teorica di questa quantità, in funzioni di somma ossia in funzioni della forma A+B.

2. Indichiamo con Fx una funzione qualunque della variabile x e, per esaminare i diversi casi della valutazione o della generazione tecnica della quantità rappresentata da Fx, prendiamo semplicemente la variabile x essa stessa per la *misura* con l'aiuto della quale si tratta di trasformare questa quantità in funzioni di somma. Ora abbiamo veduto (MATEMAT., n.° 17) che la forma necessaria della trasformazione in questione è

$$Fx = A + \phi x,$$

A essendo una quantità indipendente dalla *misura*, e ϕx una funzione di x, dipendente da questa misura, o piuttosto *misurabile con essa generalmente*; così, la misura essendo in questo caso x, ϕx dev' esser tale che essa diventi *zero* quando $x = o$, perchè il rapporto

$$\frac{\phi x}{x}$$

non diventi infinito. Se indichiamo con un punto situato sopra x il valore zero di questa variabile, avremo dunque

$$A = F\dot{x}.$$

Ma poichè la funzione ϕx è paragonabile in tutti casi con la variabile x, possiamo porre

$$\frac{\phi x}{x} = F_1 x,$$

e la funzione $F_1 x$ avendo necessariamente un valore determinato, possiamo di nuovo trasformarla in

$$F_1 x = B + \phi_1 x,$$

B essendo una quantità indipendente da x e $\phi_1 x$ una funzione di x, generalmente misurabile con x. Avremo evidentemente nel caso di $x = o$,

$$B = F_1 \dot{x};$$

e siccome possiamo ancora porre

$$\frac{\phi_1 x}{x} = F_2 x,$$

e che la funzione $F_2 x$ ha, in tutti i casi, un valore determinato, avremo per terza trasformazione

$$F_2 x = C + \phi_2 x,$$

nella quale

$$C = F_2 \dot{x}.$$

Proseguendo nella stessa maniera, otterremo, riunendo i resultamenti

$$F x = A + \phi x,$$

$$\frac{\phi x}{x} = F_1 x = B + \phi_1 x ,$$

$$\frac{\phi_1 x}{x} = F_2 x = C + \phi_2 x ,$$

$$\frac{\phi_2 x}{x} = F_3 x = D + \phi_3 x ,$$

$$\frac{\phi_3 x}{x} = F_4 x = E + \phi_4 x ,$$

$$\text{ec.} = \text{ec.} = \text{ec.} ;$$

donde

$$F x = A + \phi x ,$$
$$\phi x = Bx + x \,.\, \phi_1 x ,$$
$$\phi_1 x = Cx + x \,.\, \phi_2 x ,$$
$$\phi_2 x = Dx + x \,.\, \phi_3 x ,$$
$$\phi_3 x = Ex + x \,.\, \phi_4 x ,$$
$$\text{ec.} = \text{ec.}$$

il che dà, sostituendo ciascuna di queste quantità in quella che la precede,

$$F x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ec.} \; . \; . \; . \; . \; (a).$$

Tale è il caso il più semplice della trasformazione in *serie* della funzione Fx.

3. Avanti di passare alla determinazione generale delle quantità A, B, C, D, ec., diamo alcuni esempii di questa generazione tecnica delle quantità, per meglio farne comprendere lo spirito e la generalità. Sia dunque

$$F x = \frac{a}{m + x} .$$

Avremo

$$A = F \dot{x} = \frac{a}{m} ,$$

e siccome

$$F x - A = \phi x ,$$

viene

$$\phi x = \frac{a}{m + x} - \frac{a}{m} = \frac{am - a(m + x)}{m(m + x)}$$

$$= - \frac{ax}{m(m + x)} .$$

Ora

$$F_1 x = \frac{\phi x}{x} = - \frac{a}{m(m + x)} ,$$

e

$$B = F_1 \dot{x} = - \frac{a}{m^2} ,$$

così,

$$\phi_1 x = F_1 x - B = -\frac{a}{m(m+x)} + \frac{a}{m^2}$$

$$= \frac{a(m+x)-am^2}{m^2(m+x)} = \frac{ax}{m^2(m+x)},$$

e, per conseguenza

$$F_2 x = \frac{\phi_1 x}{x} = \frac{a}{m^2(m+x)};$$

donde

$$C = F_2 x = \frac{a}{m^3}.$$

Continuando ugualmente troveremo

$$D = -\frac{a}{m^4}, \quad E = \frac{a}{m^5}, \quad F = -\frac{a}{m^6}, \text{ ec.}$$

Dunque si ha definitivamente

$$\frac{a}{m+x} = \frac{a}{m} - \frac{a}{m^2}x + \frac{a}{m^3}x^2 - \frac{a}{m^4}x^3 + \frac{a}{m^5}x^4 - \text{ec.}$$

Supponiamo ora

$$Fx = \sqrt{a+x},$$

avremo

$$A = Fx = \sqrt{a} \quad \text{e} \quad \phi x = Fx - A = \sqrt{a+x} - \sqrt{a},$$

e siccome $\frac{\phi x}{x} = F_1 x$, troveremo

$$F_1 x = \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a}}{x}.$$

Ma questa quantità diventando $\frac{0}{0}$ facendoci $x = 0$, moltiplichiamo i suoi due termini per $\sqrt{a+x} + \sqrt{a}$, verrà

$$F_1 x = \frac{(a+x)-a}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}},$$

così

$$B = F_1 x = \frac{1}{2\sqrt{a}},$$

ora

$$\phi_1 x = F_1 x - B = \frac{1}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}} - \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a}(\sqrt{a+x}+\sqrt{a})}$$

$$= -\frac{x}{2\sqrt{a}[\sqrt{a+x}+\sqrt{a}]^2}.$$

Dunque

$$F_2 x = \frac{\phi_1 x}{x} = -\frac{1}{2\sqrt{a}[\sqrt{a+x}+\sqrt{a}]^2},$$

e,

$$C = F_2 \dot{x} = -\frac{1}{8a\sqrt{a}}.$$

Si troverebbe, continuando nella stessa maniera,

$$D = \frac{1}{32a^2\sqrt{a}},\quad E = -\frac{1}{128a^3\sqrt{a}},\ \text{ec.},$$

il che dà per la generazione tecnica domandata:

$$\sqrt{a+x} = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}x - \frac{1}{8a\sqrt{a}}x^2 + \frac{1}{32a^2\sqrt{a}}x^3 - \text{ec.},$$

ovvero

$$\sqrt{a+x} = \sqrt{a}\left[1 + \frac{1}{2a}x - \frac{1}{8a^2}x^2 + \frac{1}{32a^3}x^3 - \text{ec.}\right].$$

4. Riprendiamo la trasformazione del n.° 2, e procediamo alla determinazione generale delle quantità A, B, C, D, ec. Cominciamo ad avere $A = F\dot{x}$, quanto al valore di B, esso è dato dalle relazioni

$$B = F_1\dot{x} = \frac{\phi\dot{x}}{\dot{x}},$$

ora, $\phi x = Fx - A$, così

$$B = \frac{F\dot{x} - A}{\dot{x}} = \frac{0}{0}.$$

Abbiamo veduto (Differenza) che per ottenere il valore delle quantità che diventano $\frac{0}{0}$, per certi valori della variabile che esse contengono, bisogna differenziare il loro numeratore e il loro denominatore; così, applicando questa regola, otterremo

$$B = \frac{dF\dot{x}}{d\dot{x}},$$

D' altra parte

$$C = F_2 \dot{x},$$

ovvero, sostituendo le precedenti relazioni;

$$C = \frac{\phi_1 \dot{x}}{\dot{x}} = \frac{F_1 \dot{x} - B}{\dot{x}} = \frac{\phi \dot{x} - B \dot{x}}{\dot{x}^2}$$

$$= \frac{F\dot{x} - A - B\dot{x}}{\dot{x}^2} = \frac{0}{0},$$

differenziando due volte di seguito il numeratore e il denominatore, viene

$$C = \frac{d^2 F \dot{x}}{1 \, . \, 2 dx^2};$$

si troverà ugualmente per D

$$D = \frac{F\dot{x} - A - B\dot{x} - C\dot{x}^2}{\dot{x}^3} = \frac{0}{0},$$

e prendendo le terze differenziali

$$D = \frac{d^3 F \dot{x}}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 dx^3}.$$

Procedendo sempre nella stessa maniera, otterremo:

$$E = \frac{d^4 F \dot{x}}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4 dx^4},$$

$$F = \frac{d^5 F \dot{x}}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4 \, . \, 5 dx^5}$$

ec. = ec.

ed è evidente che il coefficiente del $(m+1)^{simo}$ termine della serie sarà

$$\frac{d^m F \dot{x}}{1^{m|1} dx^m}.$$

Sostituendo dunque questi valori dei coefficienti A, B, C, D, ec., nella serie elementare (a), essa diventerà

$$Fx = F\dot{x} + \frac{dF\dot{x}}{dx} \, . \, \frac{x}{1} + \frac{d^2 F\dot{x}}{dx^2} \, . \, \frac{x^2}{1 \, . \, 2} + \frac{d^3 F\dot{x}}{dx^3} \, . \, \frac{x^3}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} + \text{ec.},$$

formula conosciuta sotto il nome di *Teorema del Maclaurin*, e la quale non è che un caso particolare di quello del Taylor (*Vedi* DIFFERENZA).

5. Esaminiamo ora la deduzione tecnica delle serie, prendendo per *misura* una funzione arbitraria φx della variabile x. Mediante quanto abbiamo detto di sopra e MATEMATICHE, n.° 17, nella trasformazione generale

$$Fx = A + \Phi x,$$

la funzione Φx deve diventare *zero* quando si dà ad x il valore che rende

$\varphi x = o$, affinchè il rapporto

$$\frac{\phi x}{\varphi x}$$

non diventi infinito e sia sempre determinabile. Se indichiamo dunque con un punto situato sopra x il valore di questa variabile che rende $\varphi \dot{x} = o$; cominceremo da avere

$$A = F\dot{x},$$

facciamo

$$\frac{\phi x}{\varphi x} = F_1 x$$

e decomponiamo $F_1 x$ in

$$F_1 x = B + \phi_1 x,$$

$\phi_1 x$ essendo una funzione esattamente misurabile con φx, vale a dire che diventa zero quando $\varphi x = o$; avremo dunque encore

$$B = F_1 \dot{x}$$

e per conseguenza

$$B = \frac{\phi \dot{x}}{\varphi \dot{x}} = \frac{F\dot{x} - A}{\varphi \dot{x}} = \frac{o}{o}.$$

Prendendo le prime differenziali, otterremo

$$B = \frac{dF\dot{x}}{d\varphi \dot{x}}.$$

Indicando $\frac{\phi_1 x}{\varphi x}$ con $F_2 x$, e facendo

$$F_2 x = C + \phi_2 x,$$

nella quale $\phi_2 x$ dev' essere generalmente misurabile con φx, ovvèro deve diventare zero quando $\varphi x = o$, troveremo

$$C = F_2 \dot{x}$$

e, per conseguenza,

$$C = \frac{\phi_1 \dot{x}}{\varphi \dot{x}} = \frac{F_1 \dot{x} - B}{\varphi \dot{x}} = \frac{F\dot{x} - A - B\varphi \dot{x}}{(\varphi \dot{x})^2} = \frac{o}{o}.$$

Prendendo le differenziali seconde dal numeratore e dal denominatore, otterremo

$$C = \frac{1}{2(d\varphi \dot{x})^2}\left[d^2F\dot{x} - Bd^2\varphi \dot{x}\right].$$

Indichiamo $\frac{\phi_2 x}{\varphi x}$ con $F_3 x$, e decomponiamo $F_3 x$ in

$$F_3 x = D + \phi_3 x,$$

la funzione $\Phi_2 x$ dovendo essere *zero* quando $\varphi x = 0$; avremo ugualmente

$$D = F_3 \dot{x},$$

e, per conseguenza

$$D = \frac{\Phi_2 \dot{x}}{\varphi \dot{x}} = \frac{F_2 \dot{x} - C}{\varphi \dot{x}} = \frac{F_1 \dot{x} - A - B \varphi \dot{x}}{(\varphi \dot{x})^2}$$

$$= \frac{F\dot{x} - A - B \varphi \dot{x} - C(\varphi \dot{x})^2}{(\varphi \dot{x})^3} = \frac{0}{0},$$

il che ci darà, prendendo le differenziali terze dal numeratore e dal denominatore,

$$D = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 (d \varphi \dot{x})^3} \left[d^3 F \dot{x} - B d^3 \varphi \dot{x} - C d^3 \varphi \dot{x}^2 \right].$$

Proseguendo nella stessa maniera e sostituendo inseguito i resultamenti gli uni negli altri, avremo definitivamente la serie,

$$Fx = A + B \varphi x + C \varphi x^2 + D \varphi x^3 + E \varphi x^4 + \text{ec.} \dots \dots (b),$$

i cui coefficienti A, B, C, D, ec., sono

$$A = F\dot{x}$$

$$B = \frac{dF\dot{x}}{d\varphi \dot{x}}$$

$$C = \frac{1}{1^{2|1}(d \varphi \dot{x})^2} \left[d^2 F \dot{x} - B d^2 \varphi \dot{x} \right]$$

$$D = \frac{1}{1^{3|1}(d \varphi \dot{x})^3} \left[d^3 F \dot{x} - B d^3 \varphi \dot{x} - C d^3 \varphi \dot{x}^2 \right]$$

$$E = \frac{1}{1^{4|1}(d \varphi \dot{x})^4} \left[d^4 F \dot{x} - B d^4 \varphi \dot{x} - C d^4 \varphi \dot{x}^2 - D d^4 \varphi \dot{x}^3 \right]$$

$$\text{ec} = \text{ec}.$$

Si potrebbe, sostituendo successivamente gli uni negli altri i valori di questi coefficienti, ottenere le loro espressioni isolate o indipendenti, ma non si giungerebbe con questo processo all' *espressione generale* di questi coefficienti, che propriamente è la *legge* di questa serie. Vedremo inseguito qual è questa legge, qui non si trattava che di stabilire la possibilità della forma (*b*) della serie. Questa serie (*b*) è quella del Paoli (*Vedi* DIFFERENZA).

6. Per ottenere la forma la più generale delle serie, prendiamo il seguito delle funzioni arbitrarie

$$\varphi x, \quad \varphi_1 x, \quad \varphi_2 x, \quad \varphi_3 x, \quad \varphi_4 x, \quad \text{ec.}$$

e cangiando di *misura* a ciascuna trasformazione successiva della funzione proposta Fx, avremo in questa maniera:

$$Fx = A + \Phi x,$$

$$\frac{\Phi x}{\varphi x} = F_1 x = B + \Phi_1 x,$$

$$\frac{\Phi_1 x}{\varphi_1 x} = F_2 x = C + \Phi_2 x,$$

$$\frac{\Phi_2 x}{\varphi_2 x} = F_3 x = D + \Phi_3 x,$$

$$\frac{\Phi_3 x}{\varphi_3 x} = F_4 x = E + \Phi_4 x,$$

$$\text{ec.} = \text{ec.} = \text{ec.}$$

e, sostituendo quest' espressioni le une nell' altre,

$$Fx = A + B\varphi x + C\varphi x \,.\, \varphi_1 x + D\varphi x \,.\, \varphi_1 x \,.\, \varphi_2 x + \text{ec.} \; \ldots \; (c).$$

Ora, mediante il principio di queste trasformazioni, la funzione Φx deve diventare *zero* quando $\varphi x = o$; così indicando con α il valore di x che rende $\varphi x = o$, si ha

$$A = F(\alpha).$$

Ugualmente $\Phi_1 x$ dovendo essere *zero* quando $\varphi_1 x = o$, se indichiamo con α_1, il valore di x che rende $\varphi_1 x = o$, avremo

$$B = F_1(\alpha_1)$$

e, per conseguenza,

$$B = \frac{\Phi(\alpha_1)}{\varphi(\alpha_1)} = \frac{F(\alpha_1) - A}{\varphi(\alpha_1)}.$$

$\Phi_2 x$ dovendo ugualmente essere zero quando $\varphi_2 x = o$, indicando con α_2 il valore corrispondente di x, troveremo

$$C = F_2(\alpha_2),$$

e, per conseguenza,

$$C = \frac{\Phi_1(\alpha_2)}{\varphi_1(\alpha_2)} = \frac{F_1(\alpha_2) - B}{\varphi_1(\alpha_2)} = \frac{F(\alpha_2) - A - B \,.\, \varphi(\alpha_2)}{\varphi(\alpha_2) \,.\, \varphi_1(\alpha_2)}.$$

Si troverebbe nella stessa maniera

$$D = \frac{F(\alpha_3) - A - B \,.\, \varphi(\alpha_3) - C \,.\, \varphi(\alpha_3) \,.\, \varphi_1(\alpha_3)}{\varphi(\alpha_3) \,.\, \varphi_1(\alpha_3) \,.\, \varphi_2(\alpha_3)}$$

e così di seguito. La legge di formazione di questi coefficienti gli uni per mezzo degli altri è evidente.

La serie (c) abbraccia tutte le serie possibili; la *legge essa stessa* di questa serie, vale a dire l'espressione generale dei suoi coefficienti A, B, C, D, ec., è dovuta al signor Wronski, come pure tutte le deduzioni tecniche che abbiamo date.

7. Se si danno alle funzioni arbitrarie φx, $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, ec., le determinazioni

$$\varphi x, \quad \varphi\Big(x+\xi\Big), \quad \varphi\Big(x+2\xi\Big), \quad \varphi\Big(x+3\xi\Big), \quad \text{ec.}$$

i prodotti di queste funzioni saranno le *facoltà* della funzione arbitraria φx (*Vedi* Facoltà), e la serie (c) prenderà la forma

$$Fx = A + B \, . \, \varphi x + C \, . \, \varphi x^{2|\xi} + D \, . \, \varphi x^{3|\xi} + E \, . \, \varphi x^{4|\xi} + \text{ec.} \; \ldots \ldots \; (d),$$

che è il caso *principale* o *fondamentale* della forma generale (c), quello al quale possiamo riportare tutti gli altri. (*Vedi* Wronski. *Filos. della tecnia*, 2.ª sezione). I coefficienti A, B, C, D, ec. sono

$$\left.\begin{array}{l}
A = F\dot{x} \\[2ex]
B = \dfrac{\Delta F\dot{x}}{\Delta \varphi \dot{x}} \\[3ex]
C = \dfrac{\text{ש}[\Delta^{1}\varphi \dot{x} \, . \, \Delta^{2}F\dot{x}]}{\Delta \varphi \dot{x} \, . \, \Delta^{2} \varphi \dot{x}^{2|\xi}} \\[3ex]
D = \dfrac{\text{ש}[\Delta^{1}\varphi \dot{x} \, . \, \Delta^{2}\varphi \dot{x}^{2|\xi} \, . \, \Delta^{3}F\dot{x}]}{\Delta \varphi \dot{x} \, . \, \Delta^{2} \varphi \dot{x}^{2|\xi} \, . \, \Delta^{3} \varphi \dot{x}^{3|\xi}} \\[3ex]
E = \dfrac{\text{ש}[\Delta^{1}\varphi \dot{x} \, . \, \Delta^{2}\varphi \dot{x}^{2|\xi} \, . \, \Delta^{3}\varphi \dot{x}^{3|\xi} \, . \, \Delta^{4}F\dot{x}]}{\Delta \dot{x} \, . \, \Delta^{2} \dot{x}^{2|\xi} \, . \, \Delta^{3} \dot{x}^{3|\xi} \, . \, \Delta^{4} \varphi \dot{x}^{4|\xi}} \\[2ex]
\text{ec.} = \text{ec.}
\end{array}\right\} \ldots \; (e).$$

Il punto situato sopra $\dot{x}$ indicando che bisogna dare a questa variabile, dopo aver preso le differenze, il valore che renda $\varphi x = 0$, e la caratteristica ש indicando delle *somme combinatorie* delle quali indicheremo la formazione. L'accrescimento delle differenze, che debbono esser prese facendo variare x in *meno*, è in questo caso lo stesso di quello ξ delle facoltà.

8. Siano X_1, X_2, X_3, ec., diverse funzioni di una quantità variabile, il signor Wronski chiama *somma combinatoria* ed esprime con la lettera ebraica *schin*, così come segue

$$\text{ש}\left[\Delta^{a}X_1 \, . \, \Delta^{b}X_2 \, . \, \Delta^{c}X_3 \, \ldots \ldots \, \Delta^{p}X_{\varpi}\right]$$

la somma dei prodotti delle differenze di queste funzioni composta nella seguente maniera. Avendo formato con gli esponenti a, b, c, d, ... p delle differenze tutte le permutazioni possibili, si danno questi esponenti, in ciascun ordine delle loro permutazioni, alle differenze consecutive che compongono il prodotto

$$\Delta X_1 \, . \, \Delta X_2 \, . \, \Delta X_3 \, \ldots \ldots \, \Delta X_{\varpi},$$

dando di più ai prodotti separati formati in questa maniera, il segno positivo quando il numero delle variazioni degli esponenti a, b, c, ec., considerati nel loro ordine alfabetico, è nullo o pari, e il segno negativo quando questo numero di variazioni è impari; finalmente si prende la somma di tutti questi prodotti separati. Si ha così, per esempio,

$$\text{ש}\left[\Delta^{a}X_1\right] = \Delta^{a}X_1$$

$$\text{ש}\left[\Delta^{a}X_1 \, . \, \Delta^{b}X_2\right] = \Delta^{a}X_1 \, . \, \Delta^{b}X_2 - \Delta^{b}X_1 \, . \, \Delta^{a}X_2$$

$$\mathfrak{W}\left[\Delta^a X_1 \,.\, \Delta^b X_2 \,.\, \Delta^c X_3\right] = \Delta^a X_1 \,.\, \Delta^b X_2 \,.\, \Delta^c X_3 -$$
$$- \Delta^a X_1 \,.\, \Delta^c X_2 \,.\, \Delta^b X_3 +$$
$$+ \Delta^b X_1 \,.\, \Delta^c X_2 \,.\, \Delta^a X_3 -$$
$$- \Delta^b X_1 \,.\, \Delta^a X_2 \,.\, \Delta^c X_3 +$$
$$+ \Delta^c X_1 \,.\, \Delta^a X_2 \,.\, \Delta^b X_3 -$$
$$- \Delta^c X_1 \,.\, \Delta^b X_2 \,.\, \Delta^a X_3$$

ec. . . . . ec.

La formazione di queste *somme combinatorie* è analoga a quella dei valori dell' incognite date dall' equazioni del primo grado. (*Vedi* EQUAZIONI n.i 11, 12, e 13).

9. Applicando questa legge di costruzione delle funzioni $\mathfrak{W}$ all' espressioni (e), vale a dire facendo gli esponenti a, b, c, d, ec., uguali respettivamente a 1, 2, 3, 4, ec., si vede che quest' espressioni sono identiche con

$$A = F\dot{x}$$

$$B = \frac{\Delta F\dot{x}}{\Delta\varphi\dot{x}}$$

$$C = \frac{\Delta^1\varphi\dot{x} \,.\, \Delta^2 F\dot{x}}{\Delta\varphi\dot{x} \,.\, \Delta^2\varphi\dot{x}^{2|\xi}} - \frac{\Delta^2\varphi\dot{x} \,.\, \Delta^1 F\dot{x}}{\Delta\varphi\dot{x} \,.\, \Delta^2\varphi\dot{x}^{2|\xi}}$$

$$D = \frac{\Delta^1\varphi\dot{x} \,.\, \Delta^2\varphi\dot{x}^{2|\xi} \,.\, \Delta^3 F\dot{x}}{\Delta\varphi\dot{x} \,.\, \Delta^2\varphi\dot{x}^{2|\xi} \,.\, \Delta^3\varphi\dot{x}^{3|\xi}} -$$
$$- \frac{\Delta^1\varphi\dot{x} \,.\, \Delta^3\varphi\dot{x}^{2|\xi} \,.\, \Delta^2 F\dot{x}}{\Delta\varphi\dot{x} \,.\, \Delta\varphi\dot{x}^{2|\xi} \,.\, \Delta^3\varphi\dot{x}^{3|\xi}} +$$
$$+ \frac{\Delta^2\varphi\dot{x} \,.\, \Delta^3\varphi\dot{x}^{2|\xi} \,.\, \Delta^1 F\dot{x}}{\Delta\varphi\dot{x} \,.\, \Delta^2\varphi\dot{x}^{2|\xi} \,.\, \Delta^3\varphi\dot{x}^{3|\xi}} -$$
$$- \frac{\Delta^2\varphi\dot{x} \,.\, \Delta^1\varphi\dot{x}^{2|\xi} \,.\, \Delta^3 F\dot{x}}{\Delta\varphi\dot{x} \,.\, \Delta^2\varphi\dot{x}^{2|\xi} \,.\, \Delta^3\varphi\dot{x}^{3|\xi}} +$$
$$+ \frac{\Delta^3\varphi\dot{x} \,.\, \Delta^1\varphi\dot{x}^{2|\xi} \,.\, \Delta^2 F\dot{x}}{\Delta\varphi\dot{x} \,.\, \Delta^2\varphi\dot{x}^{2|\xi} \,.\, \Delta^3\varphi\dot{x}^{3|\xi}} -$$
$$- \frac{\Delta^3\varphi\dot{x} \,.\, \Delta^2\varphi\dot{x}^{2|\xi} \,.\, \Delta^1 F\dot{x}}{\Delta\varphi\dot{x} \,.\, \Delta^2\varphi\dot{x}^{2|\xi} \,.\, \Delta^3\varphi\dot{x}^{3|\xi}}$$

E = ec. . . . .

10. Quest' espressioni dei coefficienti A, B, C, D, ec., possano rendersi più semplici, osservando che si ha

$$\Delta^m\varphi\,\dot{x}^{n|\xi} = 0,$$

tutte le volte che l' esponente n della facoltà è più grande dell' esponente m

della differenza, poichè allora il fattore φx entra in tutti i termini della differenza, la quale diventa conseguentemente nulla, poichè bisogna dare ad x, dopo le differenziazioni il valore che rende $\varphi x = 0$.

Sottraendo dall' espressioni (d) le parti che diventano nulle, e indicando i coefficienti A, B, C, D, ec., con A_0, A_1, A_2, A_3, ec., per meglio indicare i loro posti, avremo da una parte la serie fondamentale

$$Fx = A_0 + A_1 \,.\, \varphi x^{1|\xi} + A_2 \,.\, \varphi x^{2|\xi} + A_3 \,.\, \varphi x^{3|\xi} + \text{ec.} \; \ldots\ldots \; (f),$$

e dall' altra l' espressione

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= Fx \\
A_1 &= \frac{1}{\Delta\varphi x} \,.\, \Delta Fx \\
A_2 &= \frac{1}{\Delta^2\varphi x^{2|\xi}} \left\{ \Delta^2 Fx - \Delta Fx \,.\, \frac{\Delta^2\varphi x}{\Delta\varphi x} \right\} \\
A_3 &= \frac{1}{\Delta^3\varphi x^{3|\xi}} \left\{ \Delta^3 Fx - \Delta^2 Fx \,.\, \frac{\Delta^3\varphi x^{2|\xi}}{\Delta^2\varphi x^{2|\xi}} \right. \\
&\qquad \left. + \Delta Fx \,.\, \frac{\text{ש}[\Delta^2\varphi x \,.\, \Delta^3\varphi x^{2|\xi}]}{\Delta\varphi x \,.\, \Delta^2\varphi x^{2|\xi}} \right\} \\
A_4 &= \frac{1}{\Delta^4\varphi x^{4|\xi}} \left\{ \Delta^4 Fx - \Delta^3 Fx \,.\, \frac{\Delta^4\varphi x^{3|\xi}}{\Delta^3\varphi x^{3|\xi}} \right. \\
&\qquad + \Delta^2 Fx \,.\, \frac{\text{ש}[\Delta^3\varphi x^{2|\xi} \,.\, \Delta^4\varphi x^{3|\xi}]}{\Delta^2\varphi x^{2|\xi} \,.\, \Delta^3\varphi x^{3|\xi}} \\
&\qquad \left. - \Delta Fx \,.\, \frac{\text{ש}[\Delta^2\varphi x \,.\, \Delta^3\varphi x^{2|\xi} \,.\, \Delta^4\varphi x^{3|\xi}]}{\Delta\varphi x \,.\, \Delta^2\varphi x^{2|\xi} \,.\, \Delta^3\varphi x^{3|\xi}} \right\}
\end{aligned}\right\} \ldots (g),$$

$A_5 = \text{ec.} \; \ldots\ldots$

e in generale

$$\begin{aligned}
A_\mu = \frac{1}{\Delta^\mu\varphi x^{\mu|\xi}} \Big\{ & \Delta^\mu Fx - \Delta^{\mu-1} Fx \,.\, \frac{\Delta^\mu\varphi x^{\mu-1|\xi}}{\Delta^{\mu-1}\varphi x^{\mu-1|\xi}} \\
& + \Delta^{\mu-2} Fx \,.\, \frac{\text{ש}[\Delta^{\mu-1}\varphi x^{\mu-2|\xi} \,.\, \Delta^\mu\varphi x^{\mu-1|\xi}]}{\Delta^{\mu-2}\varphi x^{\mu-2|\xi} \,.\, \Delta^{\mu-1}\varphi x^{\mu-1|\xi}} \\
& - \Delta^{\mu-3} Fx \,.\, \frac{\text{ש}[\Delta^{\mu-2}\varphi x^{\mu-3|\xi} \,.\, \Delta^{\mu-1}\varphi x^{\mu-2|\xi} \,.\, \Delta^\mu\varphi x^{\mu-1|\xi}]}{\Delta^{\mu-3}\varphi x^{\mu-3|\xi} \,.\, \Delta^{\mu-2}\varphi x^{\mu-2|\xi} \,.\, \Delta^{\mu-1}\varphi x^{\mu-1|\xi}} \\
& + \text{ec.} \ldots\ldots \text{ec.} \ldots\ldots \Big\}.
\end{aligned}$$

Non si deve dimenticare di fare uguale a ξ l' accrescimento dal quale dipendono le variabili e di dare alla variabile x dopo aver preso le differenze, il valore che rende $\varphi x = 0$.

11. L' espressioni (f) sono l' espressioni *immediate* o indipendenti dei coefficienti A_0, A_1, A_2, ec., e come tali esse presentano la *legge* della serie generale (e) che abbraccia tutte quelle che si conoscono fino a questo punto per lo

sviluppo delle funzioni. Ma se vogliamo far dipendere i coefficienti in questione gli uni dagli altri, si ottengono le seguenti espressioni eminentemente semplici

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= F\dot{x} \\
A_1 &= \frac{1}{\Delta\varphi\dot{x}}\Delta F\dot{x} \\
A_2 &= \frac{1}{\Delta^2\varphi\dot{x}^{2|\xi}}\left\{\Delta^2 F\dot{x} - A_1 . \Delta^2\varphi\dot{x}\right\} \\
A_3 &= \frac{1}{\Delta^3\varphi\dot{x}^{3|\xi}}\left\{\Delta^3 F\dot{x} - A_1 . \Delta^3\varphi\dot{x} - A_2 . \Delta^3\varphi\dot{x}^{2|\xi}\right\} \\
A_4 &= \frac{1}{\Delta^4\varphi\dot{x}^{4|\xi}}\left\{\Delta^4 F\dot{x} - A_1 . \Delta^4\varphi\dot{x} - A_2 . \Delta^4\varphi\dot{x}^{2|\xi}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - A_3 . \Delta^4\varphi\dot{x}^{3|\xi}\right\} \\
\text{ec.} &= \text{ec.}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (h).$$

Nella sua *Filosofia della Tecnia*, il signor Wronski ha dedotto questa legge generale delle serie dalla sua *legge suprema*, della quale essa non è che un caso particolare; se non è possibile di far conoscere in questo ponto tale deduzione, faremo almeno conoscere la dimostrazione semplicissima che egli ne ha data nella sua *réfutation de la théorie des fonctions analytiques* del Lagrange.

12. La forma generale delle serie essendo

$$Fx = A_0 + A_1 . \varphi x^{1|\xi} + A_2 . \varphi x^{2|\xi} + A_3 . \varphi x^{3|\xi} + \text{ec.} \ldots\ldots (e),$$

prendiamo le differenze successive dai due membri di quest' ugoaglianza, ed avremo il seguito indefinito di ugoaglianze

$$\begin{aligned}
\Delta^1 Fx &= A_1 . \Delta\varphi x + A_2 . \Delta\varphi x^{2|\xi} + A_3 . \Delta\varphi x^{3|\xi} + A_4 . \Delta\varphi x^{4|\xi} + \text{ec.} \\
\Delta^2 Fx &= A_1 . \Delta^2\varphi x + A_2 . \Delta^2\varphi x^{2|\xi} + A_3 . \Delta^2\varphi x^{3|\xi} + A_4 . \Delta^2\varphi x^{4|\xi} \\
&\quad + \text{ec.} \\
\Delta^3 Fx &= A_1 . \Delta^3\varphi x + A_2 . \Delta^3\varphi x^{2|\xi} + A_3 . \Delta^3\varphi x^{3|\xi} + A_4 . \Delta^3\varphi x^{4|\xi} \\
&\quad + \text{ec.} \\
\Delta^4 Fx &= A_1 . \Delta^4\varphi x + A_2 . \Delta^4\varphi x^{2|\xi} + A_3 . \Delta^4\varphi x^{3|\xi} + A_4 . \Delta^4\varphi x^{4|\xi} \\
&\quad + \text{ec.} \\
\text{ec.} &= \text{ec.}
\end{aligned}$$

Ora, quest' uguaglianze essendo indipendenti da qualunque valore particolare di x, se diamo a questa variabile il valore che rende $\varphi x = 0$, esse sussisteranno sempre, ma siccome allora le differenze di cui l' esponente è più piccolo di quello della facoltà diventano *zero*, quest' uguaglianze si ridurranno a

$$\left.\begin{aligned}
\Delta^1 Fx &= A_1 . \Delta\varphi x \\
\Delta^2 Fx &= A_1 . \Delta^2\varphi x + A_2 . \Delta^2\varphi x^{2|\xi} \\
\Delta^3 Fx &= A_1 . \Delta^3\varphi x + A_2 . \Delta^3\varphi x^{2|\xi} + A_3 . \Delta^3\varphi x^{3|\xi} \\
\Delta^4 Fx &= A_1 . \Delta^4\varphi x + A_2 . \Delta^4\varphi x^{2|\xi} + A_3 . \Delta^4\varphi x^{3|\xi} + A_4 . \Delta^4\varphi x^{4|\xi} \\
\text{ec.} &= \text{ec.}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (h').$$

Infatti, la differenza dell'ordine m di una facoltà $\varphi x^{n|\xi}$, prendendo questa differenza rapporto all'accrescimento ξ e considerando quest'accrescimento come negativo, è (*Vedi* DIFFERENZA)

$$\Delta^m \varphi x^{n|\xi} = \varphi x^{n|\xi} - \frac{m}{1}\varphi\left(x-\xi\right)^{n|\xi} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\varphi\left(x-2\xi\right)^{n|\xi}$$

$$-\text{ec.} \ldots \ldots \left(-1\right)^m \cdot \varphi\left(x-m\xi\right)^{n|\xi}.$$

Così, siccome si ha (*Vedi* FACOLTÀ)

$$\varphi\left(x-m\xi\right)^{n|\xi} = \varphi\left(x-m\xi\right) \cdot \varphi\left(x-m\xi+\xi\right) \cdot \varphi\left(x-m\xi+2\xi\right) \ldots$$

$$\ldots \varphi\left(x-m\xi+\left(n-1\right)\xi\right)$$

il fattore φx si troverà contenuto nella facoltà $\varphi\left(x-m\xi\right)^{n|\xi}$, quando n sarà più grande di m. Dunque questo fattore entra in tutti i termini della differenza $\Delta^m \varphi x^{n|\xi}$ e, per conseguenza, dando ad x il valore che rende $\varphi x = 0$, si ha generalmente quando $n > m$,

$$\Delta^m \varphi x^{n|\xi} = 0.$$

Osserviamo ora che la prima dell'uguaglianze (h') comincia dal dare immediatamente

$$A_1 = \frac{\Delta F x}{\varphi x}$$

e quindi che questa prima uguaglianza è la stessa cosa che

$$\Delta F x = A_1 \cdot \Delta \varphi x + A_2 \cdot \Delta \varphi x^{2|\xi},$$

poichè $\Delta \varphi x^{2|\xi} = 0$. Paragonando quest'ultima con la seconda uguaglianza

$$\Delta^2 F x = A_1 \cdot \Delta^2 \varphi x + A_2 \cdot \Delta^2 \varphi x^{2|\xi},$$

possiamo considerarle tutte due come due equazioni del primo grado tra le incognite A_1 e A_2; così costruendo il valore di A_1 mediante la regola conosciuta (*Vedi* EQUAZIONE, n.° 12), avremo

$$A_1 = \frac{\Delta \varphi x \cdot \Delta^2 F x - \Delta^2 \varphi x \cdot \Delta F x}{\Delta \varphi x \cdot \Delta^2 \varphi x^{2|\xi} - \Delta^2 \varphi x \cdot \Delta^2 \varphi x^{2|\xi}},$$

il che equivale al medesimo di (*vedi* sopra, n.° 7)

$$A_2 = \frac{\mho[\Delta^1 \varphi x \cdot \Delta^2 F x]}{\mho[\Delta^1 \varphi x \cdot \Delta^2 \varphi x^{2|\xi}]}.$$

Ugualmente, poichè $\Delta \varphi x^{2|\xi} = 0$, $\Delta \varphi x^{3|\xi} = 0$, $\Delta^2 \varphi x^{3|\xi} = 0$, le tre prime dell'uguaglianza (h') sono identiche con le tre equazioni

$$\Delta F x = A_1 \cdot \Delta \varphi x + A_2 \cdot \Delta \varphi x^{2|\xi} + A_3 \cdot \Delta \varphi x^{3|\xi}$$
$$\Delta^2 F x = A_1 \cdot \Delta^2 \varphi x + A_2 \cdot \Delta^2 \varphi x^{2|\xi} + A_3 \cdot \Delta^2 \varphi x^{3|\xi}$$
$$\Delta^3 F x = A_1 \cdot \Delta^3 \varphi x + A_2 \cdot \Delta^3 \varphi x^{2|\xi} + A_3 \cdot \Delta^3 \varphi x^{3|\xi},$$

le quali danno

$$A_3 = \frac{\mho[\Delta^1\varphi x \,.\, \Delta^2\varphi x^{2|\xi} \,.\, \Delta^3 Fx]}{\mho[\Delta^1\varphi x \,.\, \Delta^2\varphi x^{2|\xi} \,.\, \Delta^3\varphi x^{3|\xi}]}.$$

Continuando nella stessa maniera, si vedrà, non per induzione, come lo fa osservare il signor Wronski, ma pel principio stesso con cui si formano queste quantità, che in generale si avrà

$$A_\mu = \frac{\mho[\Delta^1\varphi x \,.\, \Delta^2\varphi x^{2|\xi} \ldots\ldots \Delta^{\mu-1}\varphi x^{\mu-1|\xi} \,.\, \Delta^\mu Fx]}{\mho[\Delta^1\varphi x \,.\, \Delta^2\varphi x^{2|\xi} \ldots\ldots \Delta^{\mu-1}\varphi x^{\mu-1|\xi} \,.\, \Delta^\mu\varphi x^{\mu|\xi}]},$$

μ essendo un indice qualunque.

Ma siccome bisogna fare $\varphi x = 0$, dopo aver preso le differenze, la somma combinatoria, che forma il denominatore dell' espressione generale, si riduce al suo primo termine, poichè, in tutti gli altri, la permutazione degli esponenti delle differenza introdurrà delle differenze $\Delta^\nu\varphi x^{\nu|\xi}$ nelle quali ν sarà più piccolo di μ, e le quali conseguentemente si ridurranno a zero. Si ha dunque semplicemente

$$\mho[\Delta^1\varphi x \,.\, \Delta^2\varphi x^{2|\xi} \ldots\ldots \Delta^{\mu-1}\varphi x^{\mu-1|\xi} \,.\, \Delta^\mu\varphi x^{\mu|\xi}] =$$
$$= \Delta\varphi x \,.\, \Delta^2\varphi x^{2|\xi} \ldots\ldots \Delta^{\mu-1}\varphi x^{\mu-1|\xi} \,.\, \Delta^\mu\varphi x^{\mu|\xi}$$

e la legge generale della serie è, come l' abbiamo stabilita,

$$A_\mu = \frac{\mho[\Delta^1\varphi x \,.\, \Delta^2\varphi x^{2|\xi} \ldots\ldots \Delta^{\mu-1}\varphi x^{\mu-1|\xi} \,.\, \Delta^\mu Fx]}{\Delta\varphi x \,.\, \Delta^2\varphi x^{2}\xi \ldots\ldots \Delta^{\mu-1}\varphi x^{\mu-1|\xi} \,.\, \Delta^\mu\varphi x^{\mu|\xi}} \ldots\ldots (i).$$

Quanto all' espressioni *mediate* (*h*) dei coefficienti A_1, A_2, A_3, ec., si deducono dalle stesse uguaglianze (*h'*) mediante una semplice trasposizione.

13. L' espressioni semplicizzate (*f*) contengono ancora, dopo lo sviluppo delle funzioni $\mho$, dei termini i quali si riducono a zero, ma possiamo evitare la pena di costruirle sviluppando queste funzioni mediante il processo d' esclusione indicato dal signor Wronski, in una nota situata alla fine della sua *filosofia dell' infinito*. L' espressione generale (*f*) prende allora una forma elegantissima, nella quale non entrano più che i termini isolati costruiti con le differenze della funzione Fx e delle facoltà φx, $\varphi x^{2|\xi}$, ec., e formano così gli elementi della legge fondamentale delle serie. Siamo forzati di rinviare per le particolarità alla *Filosofia della tecnia*, *seconda sezione*.

14. La legge fondamentale delle serie essendo ora conosciuta, ne dedurremo le principali leggi particolari trovate da differenti geometri per lo sviluppo delle funzioni. Prima di tutto nel caso, in qualche modo primitivo, dove l' accrescimento ξ è indefinitamente piccolo, vale a dire quando ξ, ovvero Δx, è semplicemente dx, le differenze diventano delle differenziali, e il seguito delle facoltà

$$\varphi x, \quad \varphi x^{2|\xi}, \quad \varphi x^{3|\xi}, \quad \varphi x^{4|\xi}, \quad \text{ec.}$$

diventa il seguito delle potenze ordinarie;

$$\varphi x, \quad \varphi x^2, \quad \varphi x^3, \quad \varphi x^3, \quad \varphi x^4, \quad \text{ec.}$$

allora la forma generale (*e*) delle serie si riduce a

$$Fx = A_0 + A_1 \,.\, \varphi x + A_2 \,.\, \varphi x^2 + A^3 \,.\, \varphi x^3 + \text{ec.} \ldots\ldots (k),$$

il cui primo coefficiente A_0 è sempre Fx, ovvero ciò che diventa Fx quando si dà alla variabile x il valore che rende $\varphi x = 0$. Il coefficiente generale (i) diventa

$$A_\mu = \frac{\mho[d^1\varphi x \,.\, d^2\varphi x^2 \,.\,.\,.\,.\,.\, d^{\mu-1}\varphi x^{\mu-1} \,.\, d^\mu Fx]}{d\varphi x \,.\, d^2\varphi x^2 \,.\,.\,.\,.\,.\, d^{\mu-1}\varphi x^{\mu-1} \,.\, d^\mu \varphi x^\mu} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (l),$$

espressione nella quale bisogna sempre dare ad x il valore corrispondente a $\varphi x = 0$, dopo le differenziazioni.

Ora, sottraendo i termini che si annullano per questo valore di x, si ha

$$d\,\varphi x = d\varphi x,$$
$$d^2\varphi x^2 = 1 \,.\, 2(d\varphi x)^2,$$
$$d^3\varphi x^3 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3(d\varphi x)^3,$$
$$d^4\varphi x^4 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4(d\varphi x)^4,$$
$$d^5\varphi x^5 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5(d\varphi x)^5,$$
$$\text{ec.} = \text{ec.}$$

e, in generale,

$$d^\mu \varphi x^\mu = 1^{\mu|1} \,.\, (d\varphi x)^\mu;$$

il denominatore dell' espressione (l) è dunque la stessa cosa di

$$(1)\,.\,(1.2)\,.\,(1.2.3)\,.\,(1.2.3.4)\,.\,(1.2.3.4.5)\,.\,(1.2.3\,.\,.\,.\,.\,\mu)\,.\,(d\varphi x)^{1+2+3\,.\,.\,.\,.\,+\mu}$$

$$= \left(1 \,.\, 1^{2|1} \,.\, 1^{3|1} \,.\, 1^{4|1} \,.\, 1^{5|1} \,.\,.\,.\,.\,.\, 1^{\mu|1}\right) . \left(d\varphi x\right)^{\frac{\mu(\mu+1)}{2}}$$

e quest' espressione essa stessa si riduce a

$$A_\mu = \frac{\mho[d^1\varphi x \,.\, d^2\varphi x^2 \,.\, d^3\varphi x^3 \,.\,.\,.\, d^{\mu-1}\varphi x \,.\, d^\mu Fx]}{\left(1 \,.\, 1^{2|1} \,.\, 1^{3|1} \,.\, 1^{4|1} \,.\,.\,.\, 1^{\mu|1}\right) . \left(d\varphi x\right)^{\frac{\mu(\mu+1)}{2}}}.$$

Abbiamo dunque per i coefficienti particolari A_0, A_1, A_2, ec., il seguito di valori

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= Fx \\
A_1 &= \frac{\mho[dFx]}{1\,.\,d\varphi x} = \frac{dFx}{d\varphi x} \\
A_2 &= \frac{\mho[d^1\varphi x \,.\, d^2Fx]}{1\,.\,(1\,.\,2)\,.\,(d\varphi x)^3} \\
A_3 &= \frac{\mho[d^1\varphi x \,.\, d^2\varphi x^2 \,.\, d^3Fx]}{1\,.\,(1\,.\,2)\,.\,(1\,.\,2\,.\,3)\,.\,(d\varphi x)^6} \\
A_4 &= \frac{\mho[d^1\varphi x \,.\, d^2\varphi x^2 \,.\, d^3\varphi x^3 \,.\, d^4Fx]}{1\,.\,(1\,.\,2)\,.\,(1\,.\,2\,.\,3)\,.\,(1\,.\,2\,.\,3\,.\,4)\,.\,(d\varphi x)^{10}} \\
\text{ec.} &= \text{ec.}
\end{aligned}\right\} \,.\,.\,.\,.\,.\, (m),$$

nei quali bisogna fare $\varphi x = o$ dopo le differenziazioni, e siccome si ha

$$d^m \varphi \dot{x}^n = o,$$

tutte le volte che n è più grande di m, si sottrarrà, formando tutte le funzioni $\mathfrak{V}$, tutti i prodotti nei quali la permutazione degli esponenti delle differenziali condurrà a tali quantità.

15. L' espressioni (m), e particolarmente l'espressione generale (l), presentano la *legge* della serie primitiva (k), legge che non era punto conosciuta avanti il signor Wronski, perchè tutte le formule che si erano trovate fino al suo tempo per i coefficienti A_0, A_1, A_2, ec., non facevano che indicare un seguito di operazioni proprie a giungere alla determinazione di questi coefficienti, ma non davano gl' ultimi termini stessi, ovvero gli elementi dei quali si compone questa determinaziona, come lo fanno l' espressioni (m), dopo che sono sviluppate seguendo il processo d' eselosione dato da questo geometra. Per esempio, i coefficienti del Paoli che abbiamo fatti conoscere, (*Vedi* DIFFERENZA), esprimono unicamente il sistema delle differenziazioni successive che bisogna far subire alle funzioni Fx e φx, senza indicar in alcun modo la legge che regge gli elementi di questi coefficienti. Tutte le altre espressioni di questi medesimi coefficienti, ottenuti dall' Eulero, dal Burman, dall' Arbogast e dal Kramp, non presentano ancora che la loro generazione relativa, e non la loro generazione assoluta data solamente dalle formule precedenti.

16. Facendo ugualmente $\dot{\xi} = dx$, nell' espressioni mediate (g), esse diventano

$$\left.\begin{aligned}
&A_0 = F\dot{x}\\
&A_1 = \frac{1}{d\varphi x} dFx\\
&A_2 = \frac{1}{1^{2|1}\,.\,(d\varphi x)^2}\left\{d^2Fx - A_1 d^2\varphi x\right\}\\
&A_3 = \frac{1}{1^{3|1}\,.\,(d\varphi x)^3}\left\{d^3Fx - A_1 d^3\varphi x - A_2 d^3\varphi x^2\right\}\\
&A_4 = \frac{1}{1^{4|1}\,.\,(d\varphi x)^4}\left\{d^4Fx - A_1 d^4\varphi x - A_2 d^4\varphi x^2\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\left. - A_3 d^4\varphi x^3\right\}\\
&\text{ec.} = \text{ec.}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (n),$$

formule semplicissime, con l' aiuto delle quali possiamo calcolare gli uni per mezzo degli altri, i coefficienti della serie primitiva (k) e dei quali abbiamo dato un' altra deduzione al n.° 5. Bisogna sempre fare $\varphi x = o$ dopo le differenziazioni.

17. Se nella serie generale (k) si prende semplicemente $x - a$ per la funzione arbitraria φx, a essendo una quantità qualunque, questa serie diventerà

$$Fx = A_0 + A_1 . \left(x - a\right) + A_2 . \left(x - a\right)^2 + A_3 . \left(x - a\right)^3 + \text{ec.} \ldots\ldots (o),$$

e siccome allora a è il valore di x che rende $x-a=0$, se si osserva che

$$d^m\left(x-a\right)^n=0$$

tutte le volte che n è più grande di m, troveremo per i coefficienti, sostituendo a ad x dopo le differenziazioni,

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= Fa \\
A_1 &= \frac{dFa}{da} \\
A_2 &= \frac{1}{1\,.\,2}\cdot\frac{d^2Fa}{da^2} \\
A_3 &= \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{d^3Fa}{da^3} \\
\text{ec.} &= \text{ec.} \\
A_\mu &= \frac{1}{1^{\mu|1}}\cdot\frac{d^\mu Fa}{da^\mu}.
\end{aligned}\right\} \dots\dots (p).$$

Prendendo una nuova quantità arbitraria z, e facendo $a=x\left(1-z\right)$, si avrà

$$Fa=F\left(x-xz\right)$$

e se s' indica, come il Lagrange, con degli accenti, $'$, $''$, $'''$, ec., le derivate differenziali della funzione Fa, si otterrà

$$Fx=F\left(x-xz\right)+\frac{xz}{1}\,.\,F'\left(x-xz\right)+\frac{x^2z^2}{1\,.\,2}F''\left(x-xz\right)$$

$$+\frac{x^3z^3}{1\,.\,2\,.\,3}F'''\left(x-xz\right)+\text{ec. ec.};$$

formula dello sviluppo ottenuto dal Legrange, nella sua teoria delle funzioni analitiche; ed è la più generale di tutte quelle che si trovano in quest' opera.

18. Facendo nell' espressioni (o) e (p)

$$a=z \quad e \quad x-z=i,$$

donde

$$x=z+i,$$

si trova

$$F\left(z+i\right)=Fz+\frac{dFz}{dz}\cdot\frac{i}{1}+\frac{d^2Fz}{dz^2}\cdot\frac{i^2}{1\,.\,2}+\frac{d^3Fz}{dz^3}\cdot\frac{i^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\text{ec.}$$

questo è il teorema del Taylor.

19. Nella legge della serie generale (k) bisogna conoscere, per ottenere i valori dei coefficienti A_0, A_1, A_2, ec., la quantità x data dall' equazione $\varphi x=0$.

Il signor Wronski fa sparire questa difficoltà otteuendo immediatamente dalla sua legge suprema la determinazione dei coefficienti per un valore qualunque determinato della variabile x. In questo punto non possiemo dare che i suoi resultamenti.

Se si prende per x un valore qualunque arbitrario a e che si formino le quantità

$$\Xi_0 = Fa$$

$$\Xi_1 = \frac{\text{ש}\, Fa}{d\varphi a} = \frac{dFa}{d\varphi a}$$

$$\Xi_2 = \frac{\text{ש}\,[d^1\varphi a \,.\, d^2 Fa]}{1^{1|1} \,.\, 2^{|1} \,.\, (d\varphi a)^{1+2}}$$

$$\Xi_3 = \frac{\text{ש}\,[d^1\varphi a \,.\, d^2\varphi a^2 \,.\, d^3 Fa]}{1^{1|1} \,.\, 1^{2|1} \,.\, 1^{3|1} \,.\, (d\varphi a)^{1+2+3}}$$

$$\text{ec.} = \text{ec.}$$

I coefficienti della serie generale

$$Fx = A_0 + A_1 \,.\, \varphi x + A_2 \,.\, \varphi x^2 + A_3 \,.\, \varphi x^3 + \text{ec.},$$

saranno

$$A_0 = \Xi_0 - \Xi_1 \,.\, \varphi a + \Xi_2 \,.\, \varphi a^2 - \Xi_3 \varphi a^3 + \text{ec.}$$

$$A_1 = \Xi_1 - 2\,\Xi_2 \,.\, \varphi a + 3\,\Xi_3 \,.\, \varphi a^2 - 4\,\Xi_4 \,.\, \varphi a^3 + \text{ec.}$$

$$A_2 = \Xi_2 - 3\,\Xi_3 \,.\, \varphi a + 6\,\Xi_4 \,.\, \varphi a^2 - 10\,\Xi_5 \,.\, \varphi a^3 + \text{ec.}$$

$$A_3 = \Xi_3 - 4\,\Xi_4 \,.\, \varphi a + 10\,\Xi_5 \,.\, \varphi a^2 - 20\,\Xi_6 \,.\, \varphi a^3 + \text{ec.}$$

$$\text{ec.} = \text{ec.}$$

$$A_\mu = \Xi_\mu - \frac{\mu+1}{1} \,.\, \Xi_{\mu+1} \,.\, \varphi a + \frac{(\mu+1)^{2|1}}{1^{2|1}} \,.\, \Xi_{\mu+2} \,.\, \varphi a^2 - \frac{(\mu+1)^{3|1}}{1^{3|1}} \,.\, \Xi_{\mu+3} \,.\, \varphi a^3 + \text{ec.}$$

20. Osservando che qualunque sia il modo di determinazione che s' impiega per giungere ai valori dei coefficienti A_0, A_1, A_2, ec., questi coefficienti sono inveriabili, e conseguentemente che le diverse espressioni che gli danno sono necessariemente identiche quanto al loro valore, si vede che l' espressioni precedenti sono equivalenti all' espressioni (m), e siccome in queste il primo coefficiente A_0 è $F\dot{x}$, vale a dire, ciò che diventa le funzione Fx, quando si dà ad x il valore che rende $\varphi x = 0$, ne resulta che si ha

$$F\dot{x} = \Xi_0 - \Xi_1 \,.\, \varphi a + \Xi_2 \,.\, \varphi a^2 - \Xi_3 \,.\, \varphi a^3 + \text{ec.}$$

Così, avendo un' equazione qualunque

$$0 = \varphi x,$$

la generazione tecnica di qualunque funzione Fx dell' incognita x di quest' eque-

zione, sarà

$$Fx = Fa - \varphi a . \frac{dFa}{d\varphi a}$$

$$+ \varphi a^2 . \frac{\mho [d^1\varphi a . d^2Fa]}{1^{2|1} . d(\varphi a)^{1+2}}$$

$$- \varphi a^3 . \frac{\mho [d^1\varphi a . d^2\varphi a^2 . d^3Fa]}{1^{2|1} . 1^{3|1} d(\varphi a)^{1+2+3}},$$

$$+ \text{ec.},$$

nella quale a è una quantità arbitraria. Se la funzione domandata Fx è l'incognita x essa stessa, quest' ultima espressione diventa

$$x = a - \varphi a . \frac{da}{d\varphi a} - \varphi a^2 . \frac{d^2\varphi a . da}{2(d\varphi a)^{1+2}}$$

$$- \varphi a^3 . \frac{\mho [d^2\varphi a . d^3\varphi a^2] . da}{1^{2|1} . 1^{3|1} . (d\varphi a)^{1+2+3}}$$

$$- \varphi a^4 . \frac{\mho [d^2\varphi a . d^3\varphi a^2 . d^4\varphi a^3] . da}{1^{2|1} . 1^{3|1} . 1^{4|1} . (d\varphi a)^{1+2+3+4}},$$

$$- \text{ec.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (q),$$

serie la quale sarà tanto più convergente quanto φa sarà più vicina a zero, ovvero che a differirà meno dalla radice x dell' equazione $\varphi x = 0$.

21. Per dare almeno un esempio dell' applicazione di queste formule, proponiamoci di trovare una delle radici dell' equazione

$$x^3 - 2x - 20 = 0.$$

Sostituendo successivamente in quest' equazione 0, 1, 2, 3, ec. invece di x, si riconosce che una delle radici è tra 2 e 3, ma più vicina a 3 che a 2; prendiamo dunque $a = 3$ ed avremo

$$\varphi a = a^3 - 2a - 20 = 1$$

$$d\varphi a = (3a^2 - 2)\, da = 25da$$

$$d^2\varphi a = 6ada^2 = 18da^2$$

$$d^3\varphi a = 6da^3$$

$$d^4\varphi a = 0,$$

tutte le altre differenziali diventano *zero*.

Avremo inoltre

$$d\,\varphi a^2 = 2\varphi a . d\varphi a$$

$$d^2\varphi a^2 = 2\varphi a . d^2\varphi a + 2(d\varphi a)^2 = 1286da^2$$

$$d^3\varphi a^2 = 2\varphi a . d^3\varphi a + 6d\varphi a . d^2\varphi a = 2712da^3$$

$$\text{ec.} = \text{ec.}$$

Sostituendo questi valori nella formula (q), otterremo

$a = 3.$

$$\varphi a \cdot \frac{da}{d\varphi a} = \frac{da}{25 \cdot da} = \frac{1}{25}$$

$$\varphi a^2 \cdot \frac{d^2\varphi a \cdot da}{2 \cdot (d\varphi a)^3} = \frac{18 da^3}{2 \cdot (25)^3 da^3} = \frac{9}{(25)^3}$$

$$\varphi a^3 \cdot \frac{\Phi[d^2\varphi a \cdot d^2\varphi a^2] da}{12 \cdot (d\varphi a)^5} = \frac{d^2\varphi a \cdot d^2\varphi a^2 \cdot da}{12 \cdot (25)^6 \cdot da^6} + \frac{d^3\varphi a \cdot d\varphi a^3 \cdot da}{12 \cdot (25)^6 \cdot da^6}$$

$$= \frac{18 \cdot 2712 \cdot da^6}{12 \cdot (25)^6 \cdot da^6} + \frac{6 \cdot 1286 da^6}{12 (25)^6 \cdot da^6}$$

$$= \frac{4711}{(25)^6}$$

ec. = ec. . . . . . .

donde

$$x = 3 - \frac{1}{25} - \frac{9}{15625} - \frac{4711}{244140625} - \text{ec.}$$

La somma di questi quattro primi termini dà

$$x = 2,9594047$$

valore esatto fino al sesto decimale.

22. Mediante quello che di sopra abbiamo detto sopra l'invariabilità dei coefficienti della serie generale

$$Fx = A_0 + A_1 \cdot \varphi x + A_2 \cdot \varphi x^2 + A_3 \cdot \varphi x^3 + \text{ec.}$$

se ci rammentiamo che l'espressioni di questi coefficienti sono, secondo il Paoli (*Vedi* DIFFERENZA),

$$A_0 = Fa.$$

$$A_1 = \frac{dFx}{d\varphi x}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{dA_1}{d\varphi x}$$

$$A_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{dA_2}{d\varphi x}$$

ec. = ec.

ovvero

$$\left.\begin{array}{l}
A_1 = \frac{1}{1} \frac{dFx}{d\varphi x} \\
A_2 = \frac{1}{1^{2|1}} \cdot \frac{1}{d\varphi x} \cdot d\left[\frac{dFx}{d\varphi x}\right] \\
A_3 = \frac{1}{1^{3|1}} \cdot \frac{1}{d\varphi x} \cdot d\left(\frac{1}{d\varphi x} \cdot d\left[\frac{dFx}{d\varphi x}\right]\right) \\
A_4 = \frac{1}{1^{4|1}} \cdot \frac{1}{d\varphi x} \cdot d\left[\frac{1}{d\varphi x} \cdot d\left(\frac{1}{d\varphi x} \cdot d\left[\frac{dFx}{d\varphi x}\right]\right)\right] \\
\text{ec.} = \text{ec.} \\
A_\mu = \frac{1}{1^{\mu|1}} \cdot \frac{1}{d\varphi x} d\left[\ldots d\left(\frac{1}{d\varphi x} d\left[\frac{dFx}{d\varphi x}\right]\right)\ldots\right]
\end{array}\right\} \ldots (q').$$

Paragonando con l' espressione generale (l) si scopre il seguente teorema:

$$\frac{1}{1^{\mu|1}} \cdot \frac{1}{d\varphi x} \cdot d\left[\frac{1}{d\varphi x} \cdot d\left(\ldots\ldots d\left[\frac{1}{d\varphi x} d\left[\frac{dFx}{d\varphi x}\right]\right)\ldots\ldots\right] =$$

$$\frac{\mho[d^1\varphi x \cdot d^2\varphi x^2 \cdot d^3\varphi x^3 \ldots\ldots d^{\mu-1}\varphi x^{\mu-1} \cdot d^{\mu} Fx]}{d\varphi x \cdot d^2\varphi x^2 \cdot d^3\varphi x^3 \ldots\ldots d^{\mu-1}\varphi x^{\mu-1} \cdot d^{\mu}\varphi x^{\mu}} \ldots\ldots (r),$$

il quale ci permetta di dare il vero significato all'espressioni trovate fin qui per i coefficienti della serie generale in questione.

Prima di tutto, è evidente che l' espressioni del Paoli, e generalmente il primo membro dell' uguaglianza (r), non fanno che indicare i mezzi di determinare le quantità A_1, A_2, A_3, ec., nel mentre che il secondo membro di quest' uguaglianza presenta il resultamento delle differenziazioni successive, e dà immediatamente gli ultimi termini della determinazione delle quantità A_1, A_2, A_3, ec. In una parola, il primo membro offre *l' origine* della determinazione dei coefficienti e il secondo la *fine* di questa determinazione. Il signor Wronski dà ancora il nome di *espressioni iniziali* all' espressioni (q'), e quello di *espressioni finali* all' espressioni (m). Sono quest' *espressioni finali* le quali presentano la prima estensione reale data alla scienza dopo il Taylor, mentre sotto la forma imperfetta o non compita (q') la formula del Paoli non è che un corollario di quella del Taylor, e tutto ciò che si è tentato dopo per sviluppare quest' espressioni imperfette è rimasto ben lungi dalla legge (m), la quale finalmente dà la determinazione dei coefficienti della serie, adoprando gli ultimi termini o gli elementi stessi i quali entrano in questa determinazione.

È vero, dice il signor Wronski, che entrano ancora nell' espressioni (m) le differenziali delle potenze della funzione φx, cioè; le differenziali della forma $d^m \varphi x^n$ e non semplicemente le differenziali immediate $d\varphi x$, $d^2\varphi x$, $d^3\varphi x$, ec., costituenti i veri ultimi termini o elementi dei quali si tratta; ma ciò non basta che ad abbreviare quest' espressioni finali, poichè la legge che dà le differenziali $d^m\varphi x^n$, adoprando le differenziali elementari $d\varphi x$, $d^2\varphi x$, ec., è conosciuta (*Vedi* Filos. della Tecnia, seconda sezione, pag. 55). Infatti per una semplice applicazione della legge fondamentale del calcolo differenziale (*Vedi* Differenza), si ottiene.

$$d^m\varphi x^n = 1^{m|1} \cdot Aggr. \left\{\frac{d_{p_1}\varphi x \cdot d_{p_2}\varphi x \cdot d_{p_3}\varphi x \ldots\ldots d_{p_n}\varphi x}{1^{p_1|1} \cdot 1^{p_2|1} \cdot 1^{p_3|1} \ldots\ldots 1^{p_n|1}}\right\} \ldots\ldots (t),$$

l'abbreviazione *Aggr.* indicando l'aggregato dei termini corrispondenti a tutti i valori interi degli esponenti $p1$, $p2$, $p3$, ec., dati dall'equazione indeterminata,

$$m = p1 + p2 + p3 + p4 + \dots + pn \dots (t),$$

nella soluzione della quale basta di non prendere per questi esponenti $p1$, $p2$, $p3$, ec., che numeri interi e positivi più grandi di zero, col fine di trascurare immediatamente i prodotti i quali diventano zero per il valore $\varphi x = 0$ che bisogna dare a φx dopo le differenziazioni.

23. Dobbiamo indicare, di volo, il processo semplicissimo dell'Hindenburg, per risolvere in numeri interi positivi più grandi di zero l'equazione indeterminata (t) o per decomporre un numero m in n numeri più piccoli.

L'unità si scriverà $n-1$ volte di seguito, e in ultimo luogo il numero $m-n+1$, il che forma la prima soluzione. Percorrendo inseguito i numeri che formano questa combinazione, ugualmente che quelli delle combinazioni seguenti, *dalla destra alla sinistra*, ci arresteremo in ciascuna a quello che si trova inferiore di *due unità almeno* all'ultimo numero sopra la destra; si aumenterà di un'unità il numero al quale ci saremo arrestati; e conservando tutti quelli che si trovano alla sua sinistra, si sostituirà con questo stesso numero, così aumentato *di uno*, tutti quelli che sono alla sua destra, eccettuato l'ultimo in luogo del quale bisognerà mettere ciascuna volta il complemento degli altri, vale a dire, ciò che bisogna aggiungere alla loro somma, per trovare il numero m. Osservando questa regola si passerà con la più gran facilità da una combinazione all'altra; l'ultima sarà quella alla quale la regola non potrà più essere applicata.

Proponiamoci, per esempio, di dividere il numero 10 in cinque parti; applicando la regola, otterremo le *sette* combinazioni seguenti:

1ª 1, 1, 1, 1, 6
2ª 1, 1, 1, 2, 5
3ª 1, 1, 1, 3, 4
4ª 1, 1, 2, 2, 4
5ª 1, 1, 2, 3, 3
6ª 1, 2, 2, 2, 3
7ª 2, 2, 2, 2, 2

Lo stesso numero resulterà dall'addizione di *sei* altre delle *cinque* maniere che seguono

1ª 1, 1, 1, 1, 1, 5
2ª 1, 1, 1, 1, 2, 4
3ª 1, 1, 1, 1, 3, 3
4ª 1, 1, 1, 2, 2, 3
5ª 1, 1, 2, 2, 2, 2

24. Mediante quello che precede, se si trattasse di ottenere l'espressione della differenziale $d^6 \varphi x^3$ in differenziali primitive della funzione φx, la quale dopo le differenziazioni si deve uguagliare a zero, si comincerebbe dal decomporre 6 in 3 parti, il che darebbe le tre combinazioni interamente differenti,

$$6 = 1 + 1 + 4,$$
$$6 = 1 + 2 + 3,$$
$$6 = 2 + 2 + 2.$$

Poi per applicare questi valori alla formula (s), si comincerebbe da fare i prodotti

$$\frac{d\varphi x \,.\, d\varphi x \,.\, d^4\varphi x}{1 \,.\, 1 \,.\, 1^{4|1}}$$

$$\frac{d\varphi x \,.\, d^2\varphi x \,.\, d^3\varphi x}{1 \,.\, 1^{2|1} \,.\, 1^{3|1}}$$

$$\frac{d^2\varphi x \,.\, d^2\varphi x \,.\, d^2\varphi x}{1^{2|1} \,.\, 1^{2|1} \,.\, 1^{2|1}}$$

Ma questi prodotti non sono i soli la cui riunione forma la differenziale domandata, poichè la prima soluzione $1+1+4$ dell' equazione indeterminata

$$6 = p1 + p2 + p3$$

ammette tre permutazioni, cioè:

$$1+1+4, \quad 1+4+1, \quad 4+1+1.$$

e nelle formule (s) bisogna dare agli esponenti $p1$, $p2$, $p3$, ec., i valori che soddisfanno all' equazione (t) permutandogli in tutte le maniere possibili. Così, ciascuno dei prodotti di sopra deve trovarsi ripetuto tante volte quante gli esponenti delle differenze ammettono permutazioni, vale a dire che il primo dev' essere mollipliesto per 3; il secondo per 6, e l' ultimo per 1. (*Vedi* PERMUTAZIONI) Si avrà dunque

$$d^6\varphi x^3 = 1^{6|1}\left\{\frac{3d\varphi x \,.\, d\varphi x \,.\, d^4\varphi x}{1 \,.\, 1 \,.\, 1^{4|1}} + \frac{6d\varphi x \,.\, d^2\varphi x \,.\, d^3\varphi x}{1 \,.\, 1^{2|1} \,.\, 1^{3|1}} + \frac{d^2\varphi x \,.\, d^2\varphi x \,.\, d^2\varphi x}{1^{2|1} \,.\, 1^{2|1} \,.\, 1^{2|1}}\right\}$$

ovvero, dopo le riduzioni,

$$d^6\varphi x^3 = 90\left(d\varphi x\right)^2 . d^4\varphi x + 360 d\varphi x \,.\, d^2\varphi x \,.\, d^3\varphi x + 90\left(d^2\varphi x\right)^3.$$

Per $d^5\varphi x^3$, si otterrebbe nella stessa maniera, prima di tutto

$$5 = 1+1+3,$$
$$5 = 1+2+2,$$

combinazioni che ammettono ciascuna tre permutazioni; e quindi

$$d^5\varphi x^3 = 1^{5|1}\left\{\frac{3d\varphi x \,.\, d\varphi x \,.\, d^3\varphi x}{1 \,.\, 1 \,.\, 1^{3|1}} + \frac{6d\varphi x \,.\, d^2\varphi x \,.\, d^2\varphi x}{1 \,.\, 1^{2|1} \,.\, 1^{2|1}}\right\}$$

$$= 60\left(d\varphi\right)^2 . d^3\varphi x + 90 d\varphi x \,.\, \left(d^2\varphi x\right)^2.$$

65. Tra i geometri i quali si sono occupati dello sviluppo delle funzioni in serie, dobbiamo citare particolarmente l' Eulero, il Burman, l' Arbogast e il Kramp. Dobbiamo al Burman una generazione *relativa* assai degna di osservazione dei coefficienti del Paoli che faremo conoscere

a essendo il valore di x che rende $\varphi x = 0$, si ha

$$\left\{\frac{d\mathrm{F}x}{d\varphi x}\right\}_{(x=a)} = \left\{\frac{x-a}{\varphi x}\cdot\frac{d\mathrm{F}x}{dx}\right\}_{(x=a)},$$

$$\left\{\frac{1}{d\varphi x}\cdot d\left[\frac{d\mathrm{F}x}{d\varphi x}\right]\right\}_{(x=a)} = \left\{\frac{d\left[\left(\frac{x-a}{\varphi x}\right)^2\cdot\frac{d\mathrm{F}x}{dx}\right]}{dx}\right\}_{(x=a)},$$

$$\left\{\frac{1}{d\varphi x}\cdot d\left[\frac{1}{d\varphi x}\cdot d\left[\frac{d\mathrm{F}x}{d\varphi x}\right]\right]\right\}_{(x=a)} = \left\{\frac{d^2\left[\left(\frac{x-a}{\varphi x}\right)^3\cdot\frac{d\mathrm{F}x}{dx}\right]}{dx^2}\right\}_{(x=a)}$$

ec. = ec.,

l'indice $(x=a)$ indicando che bisogna fare $x=a$, dopo le differenziazioni. In virtù di quest'espressioni la serie generale (k) diventa

$$\mathrm{F}x = \mathrm{F}a + \frac{\varphi x}{1}\left\{\frac{x-a}{\varphi x}\cdot\frac{d\mathrm{F}x}{dx}\right\}_{(x=a)}$$

$$+\frac{\varphi x^2}{1\,.\,2}\left\{\frac{d\left[\left(\frac{x-a}{\varphi x}\right)^2\cdot\frac{d\mathrm{F}x}{dx}\right]}{dx}\right\}_{(x=a)}$$

$$+\frac{\varphi x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\left\{\frac{d^2\left[\left(\frac{x-a}{\varphi x}\right)^3\cdot\frac{d\mathrm{F}x}{dx}\right]}{dx^2}\right\}_{(x=a)}$$

$$+\text{ ec. } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (n).$$

Possiamo evitare la difficoltà attaccata alla determinazione della quantità a che rende $\varphi x = 0$, prendendo per φx la funzione $(fx - fa)$ nella quale f indica una funzione qualunque, ed a una quantità arbitraria; allora la serie (n) sarà

$$\mathrm{F}x = \mathrm{F}a + \frac{fx-fa}{1}\cdot\left\{\frac{x-a}{fx-fa}\cdot\frac{d\mathrm{F}x}{dx}\right\}_{(x=a)}$$

$$+\frac{(fx-fa)^2}{1\,.\,2}\left\{\frac{d\left[\left(\frac{x-a}{fx-fa}\right)^2\cdot\frac{d\mathrm{F}x}{dx}\right]}{dx}\right\}_{(x=a)}$$

$$+\frac{(fx-fa)^3}{1\,.\,2\,.\,3}\left\{\frac{d^2\left[\left(\frac{x-a}{fx-fa}\right)^3\cdot\frac{d\mathrm{F}x}{dx}\right]}{dx^2}\right\}_{(x=a)}$$

$$+\text{ ec. ec.}$$

Esaminando queste formule dello sviluppo, si vede, come l' abbiamo annunziato, che il coefficiente generale

$$\frac{1}{1^{\mu|1}}\left\{\frac{d^{\mu-1}\left[\left(\frac{x-a}{\varphi x}\right)^{\mu}\frac{dFx}{dx}\right]}{dx^{\mu-1}}\right\}_{(x=a)}$$

non presenta che una generazione *relativa* delle quantità che esso rappresenta, poichè questa generazione dipende dalle differenziali della funzione ausiliare $\frac{x-a}{\varphi x}$, differenziali di cui la legge non è conosciuta. Qualunque cosa sia, la formula del Burman è superiore a quelle trovate da altri geometri, e possiamo considerarla come un passaggio tra l' espressioni iniziali del Paoli e l' espressioni finali del signor Wronski.

26. La bella formula del Lagrange, impiegata principalmente per *il ritorno delle serie*, non è che un caso particolare di quella del Burman, quello dove la funzione φx è $\frac{x-a}{fx}$. Infatti dalla relazione

$$\varphi x = \frac{x-a}{fa},$$

si deduce

$$fa = \frac{x-a}{\varphi x},$$

e sostituendo in (*u*) si ottiene immediatamente

$$Fx = Fa + \frac{\varphi x}{1}\left(fa\,.\,\frac{dFa}{da}\right)$$

$$+\frac{\varphi x^2}{1\,.\,2}\,\frac{d\left(fa^2\,.\,\frac{dFa}{da}\right)}{da}$$

$$+\frac{\varphi x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{d^2\left(fa^3\,.\,\frac{dFa}{da}\right)}{da^2}$$

$$+\frac{\varphi x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\frac{d^3\left(fa^4\,.\,\frac{dFa}{da}\right)}{da^3}$$

$$+ \text{ ec.}$$

formula identica con quella trovata dal Lagrange, per ottenere lo sviluppo di una funzione qualunque di una variabile x data dall' equazione

$$x = a + yfx,$$

poichè indicando, come esso, le derivate differenziali con gli accenti ′, ″, ‴ ec., e sostituendo di più φx con y, l' espressione precedente diventa

$$Fx = Fa + y\left(fa \cdot F'a\right) + \frac{y^2}{1 \cdot 2}\left(fa^2 \cdot F'a\right)'$$

$$+ \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(fa^3 \cdot F'a\right)''$$

$$+ \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\left(fa^4 \cdot F'a\right)'''$$

$$+ \text{ec.}$$

vale a dire l' espressione di cui il Lagrange ha dato una deduzione nella sua *Teoria delle funzioni*, e che esso ha applicata al ritorno delle serie nella nota XI della sua *Risoluzione dell' equazioni numeriche*.

27. Nelle formule dello sviluppo del Kramp e dell' Arbogast, i coefficienti son dati in funzioni dei coefficienti delle potenze di un polinomio ausiliare formato con le differenziali della funzione Fx, che si tratta di sviluppare, e quelle della funzione φx presa per misura. Non possiamo riprodurre in questo Dizionario tali formule, la deduzione delle quali ci porterebbe troppo lontano, e le quali d' altra parte non rappresentano che processi indiretti. La prodigiosa estensione che il signor Wronski ha dato alla teoria delle *serie*, l' alto grado di perfezione delle sue formule, la generalità assoluta dei suoi resultamenti e la chiarezza inaspettata che esso ha gettato sopra l' oscura metafisica di questo ramo tanto importante dell' algoritmia, non permettono più al giorno d' oggi di citare i resultamenti dei calcoli di derivazione se non che per la storia della scienza.

Tutte le leggi precedenti si estendono con facilità ai casi di più variabili dependenti o indipendenti, ma non potremmo entrare in queste particolarità senza passare i limiti strettissimi che ci sono imposti; dobbiamo dunque rinviare ai trattati del calcolo differenziale, per ciò che riguarda il teorema del Taylor, e alla *Filosofia della tecnia* del signor Wronski, per le leggi universali dovute a questo sapiente. In altra parte tratteremo della sommazione delle serie. (*Vedi* SOMMAZIONE.)

28. L' uso delle *serie* non risale più alto del secolo 17, e il Mercator sembra che sia stato il primo ad esercitare tersitu per ottenere la generazione di una quantità derivata; ma il Newton e il Leibnizio debbono considerarsi come i fondatori di quest' algoritmo; il Newton, mediante la scoperta del suo celebre *binomio*, il Leibnizio, mediante i suoi lavori sopra un gran numero di serie numeriche delle quali insegnò a trovare la somma, e delle quali fece rilevare l' importanza. Ciò non ostante non devesi dimenticare che uno dei mezzi impiegati da Archimede per quadrare la parabola consiste nella somma di una progressione geometrica decrescente continuata all' infinito.

I tentativi del Leibnizio, pubblicati nel 1682 e 1683, impegnarono i geometri ad occuparsi delle serie; i due illustri fratelli Giovanni e Giacomo Bernoulli si esercitarono ben tosto allo stesso genere di ricerche facendosi parte delle loro scambievoli scoperte, e quando il Taylor ebbe prodotto il suo teorema, questi gran geometri e inseguito l' Eulero si elevarono a questioni che si erano credute fino allora intrattabili.

Dobbiamo al teorema del Taylor, dice il signor Wronski, nel suo *Prodrome du messianisme*, propriamente il principio delle matematiche moderne, delle quali l' Eulero, munito di questo potente instrumento ha fissato, per così dire, da sè solo, tutta la sfera. — « Quanto lungi poteva estendersi l' applicazione

del Teorema del Taylor, direttamente o indirettamente, tanto lungi l' Eulero ha svelato la verità. — Non si sa ciò che si dovrebbe desiderare più, che l'Eulero avesse impiegato il suo genio a compire tanto perfettamente l' edifizio di un altro, ovvero che esso lo avesse impiegato a stabilire i fondamenti di un edifizio più vasto ancora. È sempre però certo che, cominciando a sentire l' insufficienza del teorema del Taylor, questo gran geometra profetizzò un nuovo modo di generazione universale.

» Quest' insufficenza si faceva soprattutto sentire nella risoluzione dell' equazioni infinite e in quello che i geometri chiamavano *ritorno delle serie*. Per supplirci, il Lagrange, illuminato da questi lavori dell' Europa sapiente, fece la scoperta del suo famoso teorema, che, a questo riguardo completa il sistema del Taylor, e che, per altri riguardi, è di già superiore al teorema di quest' ultimo, il quale non si trova più essere che un caso particolare del teorema del Lagrange.

» Fu in questo modo che si sviluppò insensibilmente questo maestoso sistema di sapere, che senza contradizione, è uno dei titoli più belli dell' umanità, come è uno dei suoi più potenti instrumenti. — Ma quello che vi è in ciò di ammirabile, è che facendo astrazione dal Newton e dal Leibnizio, fondatori di questo sistema, si trova che gli ultimi resultamenti si concentrano in tre punti principali: 1° il teorema del Taylor, come principio della generazione delle quantità, quando esse sono date *immediatamente* o per le loro funzioni; 2° il teorema del Lagrange, come principio della generazione delle quantità, quando esse sono date *mediatamente* o per le loro equazioni; e finalmente 3° la realizzazione di questo sistema mediante l' Eulero, e il *passaggio* operato così dall' uno all' altro di questi due teoremi, con un legame teleologico.

» Effettivamente a ciò si riduce quest' immensa raccolta di sapere matematico che è la proprietà presente dell' umanità. — Chiunque non conoscesse questa riduzione esatta e generale, non potrebbe lusingarsi, ci sembra, di avere approfondito la scienza della quale parliamo. Infatti tutto vi si concentra, in una maniera esplicita, o almeno in una maniera implicita: non esiste alcuna proposizione matematica conosciuta che non si possa riportare ad uno dei tre punti che abbiamo indicati.

» Ma per meglio apprezzare questo stato presente delle matematiche bisogna, risalendo così ai principii, scoprire il principio unico che deve necessariamente servire di base a questo sistema. Possiamo, in questo punto limitarci a indicare questo principio; e perciò osserveremo che il complesso delle matematiche moderne, dopo il Leibnizio e Newton consiste nella generazione universale delle quantità mediante il solo algoritmo della Somma indefinita, che costituisce le Serie.

» Tutto ciò che dà il calcolo differenziale, questo grande instrumento del pe-
» riodo moderno delle matematiche, non serve infatti che per giungere a questa
» universale generazione algoritmica per *somma indefinita*; mentre il piccolis-
» simo numero dell' integrazioni teoriche che abbiamo potuto ottenere merita
» appena di essere rammentato, e l' unico mezzo dei geometri moderni, per
» giungere in tutti i casi alla conoscenza delle quantità, consiste notoriamente
» nell' uso, diretto o indiretto, di questo algoritmo ». (*Filosofia della tecnia*, seconda sezione pagina 633).

I nostri lettori hanno potuto vedere alle parole Matematiche e Filosofia che le serie non sono il solo algoritmo tecnico che dà la generazione universale delle quantità, e le parole che abbiamo citate ci serviranno a far meglio comprendere alla parola Tecnia la riforma che il signor Wronski vuole operare nella scienza.

SERPENTARIO od OFIUCO (*Astron.*). Costellazione boreale composta di 74 stelle nel Catalogo britannico: essa vien rappresentata sulle carte celesti da un uomo che tiene in mano un serpente, come accenna anco l'etimologia del suo nome.

SERPENTE (*Astron.*). Costellazione boreale che contiene 64 stelle nel Catalogo britannico. Questo serpente vien rappresentato tra le mani di Ofiuco o del Serpentario, altra costellazione.

SESQUI. Espressione usata da alcuni autori per indicare un certo rapporto particolare: come

Sesqui-altero, che è il rapporto di due quantità, una delle quali contiene l'altra una volta e mezzo.

Sesqui-duplo, che è il rapporto di due quantità, una delle quali contiene l'altra due volte e mezzo.

Sesqui-quadrato. Si dava in astronomia questo nome all'aspetto di due pianeti lontani l'uno dall'altro di quattro segni e mezzo o di 135°, ossia 120°+15°.

SESSAGESIMALE. (*Aritm.*). Si chiama *frazione sessagesimale* quella il cui denominatore è una potenza di 60. Per esempio, $\frac{2}{60}$, $\frac{4}{360}$, $\frac{25}{21600}$, ec. sono frazioni sessagesimali.

La *divisione sessagesimale* è ugualmente quella che si opera con potenze di 60; così la divisione del circolo in 360 gradi, la quale comprende le suddivisioni del grado in 60 minuti, quelle del minuto in 60 secondi, ec. è una divisione sessagesimale.

SESTANTE (*Geom.*) Nome che si dà alla sesta parte di una circonferenza, ossia all'arco che comprende 60°.

SESTANTE (*Astron.*). Strumento usato in astronomia, e che è composto di una sesta parte di circolo munita di due canocchiali (*Tav.* CCXXX, *fig.* 1), uno dei quali serve a prendere le altezze degli astri dall'orizzonte fino a 60 gradi, e l'altro da 30 gradi fino allo zenit. In mare si chiama sestante anco il quarto di riflessione di Hadley. *Vedi* Quarto di Riflessione.

SESTANTE (*Astron.*). È il nome di una costellazione boreale introdotta da Evelin per riunire 12 stelle oniformi che egli aveva osservate tra l'Idra e il Leone.

SETTENTRIONE (*Astron.*). Regione del cielo che è dalla parte del polo artico o dell'Orsa maggiore, alla qual costellazione è stato dato pure il nome di *settentrione*, a motivo delle sette stelle che la compongono. *Settentrione* si dice pure il *nord*, ed è la parte opposta al *mezzogiorno* o al *sud*.

Da questo nome viene l'epiteto di *settentrionale*, che si dà a tutto ciò che ha rapporto al nord, come segni *settentrionali*, paralleli *settentrionali*, che sono al nord dell'equatore: questa denominazione deriva dall'essere la sfera terrestre e la sfera celeste divise in due emisferi terminati dall'equatore: quello che è dalla parte del *settentrione* si dice emisfero *settentrionale*, l'altro che rimane dalla parte di mezzogiorno dicesi emisfero *meridionale*; e tutto ciò che si trova in uno di questi emisferi ne conserva la denominazione. Così si dice latitudine *settentrionale* la latitudine di un luogo che si trova nell'emisfero settentrionale, ec.

SETTIMANA (*Cronologia*). Nome che si dà all'intervallo o periodo di sette giorni.

Sette giorni naturali o astronomici compongono una settimana, e si distinguono tra loro coi seguenti nomi: *Domenica*, *Lunedì*, *Martedì*, *Mercoledì*, *Giovedì*, *Venerdì*, *Sabato*. Secondo la Sacra Scrittura, le settimane debbono la loro origine dalla creazione del mondo, poichè Iddio la terminò in sei giorni e si riposò nel settimo. Quanto ai nomi dei giorni che le compongono, noi gli

abbiamo ricevuti dagli antichi astronomi, che avevano consacrato i giorni della settimana ai principali pianeti: cioè: il primo, al Sole, che chiamavano *Dies Solis*, e che i cristiani hanno chiamato *Giorno del Signore*, *Dies Dominica*, in italiano *Domenica*; il secondo alla Luna, detto per questa ragione *Dies Lunae*, in italiano *Lunedì*; il terzo a Marte, detto *Dies Martis*, in italiano *Martedì*; il quarto a Mercurio, detto *Dies Mercurii*, in italiano *Mercoledì*; il quinto a Giove, detto *Dies Jovis*, in italiano *Giovedì*; il sesto a Venere, detto *Dies Veneris*, in italiano *Venerdì*; e finalmente il settimo a Saturno, detto *Dies Saturni*, in italiano *Sabato*.

SETTORE (*Geom.*). Parte di un circolo compresa tra due raggi e l'arco intercetto. Tale è la figura ACB (*Tav.* XLVII; *fig.* 3).

L'area di un settore di circolo sta all'area totale del circolo nel rapporto del suo arco alla circonferenza. Così conoscendo l'arco AmB che indichiamo con a, e il raggio AC che indichiamo con r, siccome la circonferenza il cui raggio è r è uguale a $2\pi r$ (*vedi* CIRCOLO), e che l'area del circolo è πr^2, avremo per l'area del settore ACB

$$\text{settore ACB} = \frac{1}{2}\, ar.$$

Allorquando l'arco a è dato in gradi, bisogna esprimerlo nelle stesse unità del raggio; supponiamo, per esempio, che si domandi la superficie di un settore il cui arco è di $32^\circ\ 30'$, in un circolo di 5 metri di raggio. Comincieremo da osservare che il rapporto dell'arco in questione alla circonferenza sta ugualmente che quello di $32^\circ\ 30'$, a 360°, o che quello dei numeri 1920 e 21600, riducendo tutto in minuti; così se si conoscesse in metri la lunghezza della circonferenza, si avrebbe quella dell'arco ugualmente in metri, moltiplicando la lunghezza della circonferenza per il rapporto $\frac{1920}{21600}$, ma poichè il raggio è 5, la circonferenza è $2\pi \times 5$, cioè circa $10 \times 3{,}1415 = 31{,}415$, e si ha per il valore dell'arco del settore in metri,

$$\frac{1920}{21600} \times 31{,}415 = 2^m{,}792\,;$$

l'area del settore è dunque

$$\frac{1}{2}\left(2^m{,}792\right).5 = 6^m{,}980 \text{ quadrati.}$$

Si chiamano *settori simili*, i settori di due circoli differenti i cui raggi comprendono angoli uguali.

In tutte le curve che hanno dei fuochi, lo spazio compreso tra due raggi vettori e l'arco intercetto prende ancora il nome di *settore*. Vi sono dunque dei *settori ellittici*, *parabolici*, *iperbolici*, ec.

SETTORE ASTRONOMICO. È uno strumento che serve a misurare la distanza di un astro dallo zenit (*Tav.* CCXXXI, *fig.* 1): se ne può vedere una dettagliata descrizione nel *Trattato di astronomia* di Lalande.

SEZIONE (*Geom.*). Luogo ove delle linee, dei piani, ec. si tagliano,

La comune *sezione* di due linee è un *punto*, quella di due superficie è una *linea*, e particolarmente una linea retta quando le superficie sono piane.

Si chiama ancora *sezione*, la linea o la superficie formata dall'incontro di due superficie, o di una superficie e di un solido.

Quando si taglia una sfera in un modo qualunque mediante un piano, la *sezione* è sempre un circolo (*Vedi* SFERA).

La sezione di un cono mediante un piano è un *circolo*, un'*ellisse*, una *parabola*, o un'*iperbola*, secondo la posizione del piano. (*Vedi* QUESTE DIVERSE PAROLA, e CONICO).

Quando una superficie curva è tagliata da un piano, la sezione che ne resulta, considerata rapporto ad uno dei suoi punti, prende il nome di *sezione normale* se il piano passa per la normale della superficie al detto punto, e quello di *sezione obliqua* nel caso contrario. Siccome si può condurre per un punto qualunque di una superficie curva un' infinità di piani di cui gli uni passano per la normale, e di cui gli altri non ci passano, esistono un' infinità di *sezioni normali* e *oblique*; ma tutte queste sezioni son legate con rapporti degni di osservazione, i quali servono a determinare la natura della superficie curva.

Sia M (*Tav.* CLXXXIX, *fig.* 4) un punto appartenente ad una superficie curva qualunque, ed MT una tangente della superficie a questo punto; conduciamo per questa tangente due piani secanti, l' uno che passi per la normale MN e l' altro obliquo. Avremo due sezioni: la prima A'MB' *normale* e la seconda AMB obliqua; il centro di curvatura della sezione normale al punto M, sarà necessariamente sopra la normale MN, e il centro di curvatura della sezione obliqua, allo stesso punto, sarà sulla retta MO condotta nel piano di questa sezione perpendicolarmente alla tangente MT. Ora quest' ultimo centro è il punto comune d' intersezione del piano di AMB, e dei due piani normali consecutivi che passano per i punti infinitamente vicini M ed M' della sezione; così il punto O intersezione delle tracce MO ed M'O dei due punti normali, è il centro di curvatura, ed MO ne è il raggio. Ma i due piani normali si tagliano seguendo una retta OO' perpendicolare ad MO, e la quale incontra la normale MN in un certo punto O'; poichè le rette MN ed OO' son situate tutte due nel piano condotto perpendicolarmente alla tangente MT per il punto M. Così il triangolo rettangolo OMO' dà

$$MO = MO' . \cos OMO' ,$$

relazione che scriveremo

$$R = \rho . \cos \omega \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

indicando con R il raggio di curvatura della sezione obliqua AMB, con ω l'angolo OMO', il quale non è altro che l'angolo dei piani delle due sezioni, e con ρ la parte MO' della normale. Non si tratta dunque più che di trovare il valore di questa parte ρ per aver quella del raggio di curvatura della sezione obliqua AMB. Ora la retta oO' intersezione dei due piani normali consecutivi, è determinata dall' equazioni

$$(x-x')\,dx' + (y-y')dy' + (z-z')\,dz' = o \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (2),$$
$$(x-x')\,d^2x' + (y-y')\,d^2y' + (z-z')\,d^2z' = du^2 \,.\,.\,.\, (3),$$

nelle quali x', y', z' esprimono le coordinate del punto M, e l'equazioni della normale MN sono

$$x-x' + p\,(z-z') = o \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (4),$$
$$y-y' + q\,(z-z') = o \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (5).$$

(*Vedi* RAGGIO). Dunque le coordinate del punto O' comune alle rette OO' ed MN sono i valori di x, y, z, i quali nello stesso tempo soddisfanno a queste

quattro equazioni ; e siccome l' equazione (2) è verificata direttamente dall' equazioni (4) e (5), perchè la curva AMB è sopra la superficie data alla quale le coordinate generali x, y, z appartengono, basta di combinare le tre equazioni (3), (4), e (5), e di ricavarne i valori di $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, per avere immediatamente la distanza dei due punti M ed O'; poichè l' espressione generale di questa distanza è (*Vedi* APPLICAZIONE DELL' ALGEBRA ALLA GEOMETRIA)

$$MO' = \rho = \sqrt{\left[\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2+\left(z-z'\right)^2\right]}.$$

Questi valori sono

$$z-z'=\frac{du^2}{d^2z-pd^2x-qd^2y},$$

$$y-y'=\frac{-qdu^2}{d^2z-pd^2x-qd^2y},$$

$$x-x'=\frac{-pd^2u}{d^2z-pd^2x-qd^2y},$$

e per conseguenza,

$$\rho=\frac{du^2\sqrt{1+p^2+q^2}}{d^2z-pd^2x-qd^2y}.$$

Quest' espressione basta senz' altro sviluppo, per insegnarci che ρ è il raggio di curvatura della sezione normale A'MB' (*vedi* RAGGIO), e osservando che MO è la projezione di MO' sul piano della sezione obliqua AMB, possiamo stabilire questo teorema osservabile scoperto dal Meunier:

Il raggio di curvatura di una sezione obliqua è la projezione sul piano di questa curva del raggio della sezione normale che passa per la stessa tangente.

Vedi, per quello che riguarda la curvatura delle sezioni e le conseguenze che se ne deducono per la curvatura delle superficie alle quali esse appartengono, una memoria del signor Poisson, fascicolo 21^ma^ del *Giornale della scuola Politecnica.*

SFERA (*Geom.*). Solido terminato da una sola superficie uniforme di cui tutti i punti sono ugualmente lontani da un punto preso nell' interno del solido e che si chiama il suo *centro*. Possiamo concepirlo come generato dalla rivoluzione di un semicircolo intorno del suo diametro; allora questo diametro si chiama l' *asse* della sfera e le sue due estremità prendono il nome di *poli*.

Le proprietà principali della sfera sono le seguenti:

1. Tutte le sezioni della sfera mediante un piano sono circoli. Se il piano passa pel centro, la sezione dicesi un *gran circolo*. Tutti i gran circoli della sfera sono uguali.

2. Il volume di una sfera è equivalente ai *due terzi* di quello del cilindro circoscritto, vale a dire, del cilindro la cui base è on gran circolo e che ha l' asse per altezza. È ancora equivalente ad un cono o ad una piramide che avrebbe per base la superficie intera della sfera, e per altezza la metà del suo asse o il suo *raggio*.

3. La superficie della sfera è equivalente a quattro volte quella di uno dei suoi gran circoli. Essa è, per conseguenza, ancora equivalente alla superficie di un circolo che avrebbe per raggio l' asse o il *diametro* della sfera.

4. Tutte le sfere sono figure simili.

5. I volumi di due sfere stanno tra loro come i cubi dei raggi o dei diametri.

Si chiama *segmento sferico* qualunque porzione di sfera separata da un piano, e *zona sferica* una parte di sfera compresa tra due piani secanti e paralleli tra loro.

Se indichiamo con r il raggio di una sfera, con c la circonferenza di uno dei suoi gran circoli, con S la sua superficie e con V il suo volume, π indicando sempre il rapporto del diametro alla circonferenza, ovvero la semi-circonferenza il cui raggio è 1, le proprietà precedenti daranno luogo all' espressioni

$$S = 2cr, \quad S = 4\pi r^2,$$

$$V = \frac{1}{3} Sr, \quad V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Per le valutazioni numeriche, sostituendo a π il suo valore 3,1415926, ec., possiamo impiegare le formule

$$S = (12,56637) . r^2, \qquad S = (0,3183) . c^2,$$

$$V = (4,18879) . r^3, \qquad V = (0,01688) . c^3.$$

Quanto ai segmenti e alle zone sferiche, conservando le precedenti denominazioni, e indicando di più con R il raggio della base di un segmento e con h la sua altezza, con R ed R′ i raggi di due basi di una zona e con h la sua altezza, avremo le seguenti formule:

Segmento sferico

$$\text{superficie} = (6,283185) . rh,$$

$$\text{volume} = (0,523599) . (3R^2h + h^3)$$

$$= (0,523599) . (cr - 2h).$$

Zona sferica.

$$\text{superficie} = (6,28318) . rh,$$

$$\text{volume} = (1,570796) . \left(R^2 + R'^2 + \frac{1}{3} h^2\right).$$

I rapporti tra la sfera, il cono e il cilindro circoscritto sono stati trovati da Archimede, come l' abbiamo detto in altra parte. Una particolarità degna assai di osservazione, è che il rapporto dei volumi della sfera e del cilindro è lo stesso di quello delle superficie di questi corpi, vale a dire 2 : 3.

SFERA (*Astron.*). In astronomia si dice sfera l' orbe immenso o l' estensione concava che circonda il nostro globo e alla quale sembrano attaccate le stelle fisse.

Il diametro della terra è sì piccolo, quando si paragona col diametro della sfera celeste, che il centro di questa sfera può indifferentemente supporsi in qualunque luogo uno si ponga. In tutti i tempi e in tutti luoghi, qualunque sia la posizione della terra nello spazio e quella degli osservatori sulla sua superficie, si hanno sempre le stesse apparenze della sfera celeste, vale a dire che le stelle fisse sembrano occupare lo stesso punto sulla superficie di questa sfera. Il nostro modo di giudicare della posizione degli astri consiste nell'immaginare delle linee rette condotte dall'occhio o dal centro della terra al centro dell'astro, e prolungate fino al loro incontro colla superficie della sfera; i punti in cui le linee incontrano questa superficie diconsi i *luoghi apparenti* degli astri. Per determinare questi luoghi, si sono immaginati differenti circoli fissi, ai quali i luoghi stessi si riferiscono. *Vedi* Armillare.

SFERICO. (*Geom. e Astr.*). Dicesi in generale di tutto quello che ha rapporto alla sfera. Un triangolo *sferico* è una parte della superficie di una sfera compresa fra tre archi di gran circoli della sfera i quali si tagliano due a due. Le proprietà di questi triangoli sono l'oggetto della *trigonometria sferica*. (*Vedi* Trigonometria)

SFEROIDE (*Geom.*). Solido generato dalla rivoluzione di una curva ovale intorno del suo asse. Se l'ovale è regolare, ovvero se essa è un'ellisse, la *sferoide* si chiama ancora *ellissoide*.

Si chiama *sferoide allungata* quella che è generata dalla rivoluzione dell'ovale intorno del suo grand'asse, e *sferoide schiacciata* quella che è prodotta dalla rivoluzione dell'ovale intorno del piccolo asse. La figura della terra sembra esser quella di una sferoide schiacciata. (*Vedi* Terra.)

Quando si ha l'equazione dell'ovale generatrice, possiamo facilmente ottenere la superficie e il volume della sferoide con i metodi esposti alle parole Cubatura e Quadratura.

SFORZO. (*Mec.*). *Vedi* Motore.

SGORGO DEI FLUIDI (*Idraul.*). Abbiamo dato, alla parola Idrodinamica, la teoria matematica dello *Sgorgo dei fluidi* fondata sopra l'ipotesi del parallelismo degli strati nel loro moto verticale, ipotesi che conduce al seguente teorema fondamentale:

La velocità di un fluido che esce da un vaso per un orifizio piccolissimo è uguale a quella di un corpo pesante che fosse liberamente caduto da tutta l'altezza, compresa tra il livello della superficie fluida nel vaso e il centro di quest'orifizio.

In questo articolo esamineremo le applicazioni di questo teorema e le modificazioni che esso riceve nella pratica, non tralasciando di riunire le diverse formule empiriche adottate dagli idraulici per la soluzione dei problemi relativi allo sgorgo dell'acqua.

Si presentano due casi generali: 1.° il livello dell'acqua, nel vaso di dove esce lo sgorgo, è costante; 2.° questo livello è variabile. Nel primo caso, si deve concepire che costantemente giunge alla superficie superiore del liquido una quantità d'acqua uguale a quella che sgorga; nel secondo, il vaso non ricevendo nuovo liquido, o non ricevendone che una quantità minore di quella che n'esce, si vuota. Tratteremo successivamente questi due casi.

§ I. Sgorgo a livello costante.

1. Il teorema del quale abbiamo rammentato l'enunciato si deve al Torricelli; questo celebre discepolo del Galileo lo ha pubblicato, nel 1643, come una conseguenza della legge della caduta dei corpi pesanti, scoperta dal suo maestro.

Ecco i ragionamenti sopra i quali lo ha stabilitu; gli riportiamo perchè essi sono iudipendauti da qualunque ipotesi sul moto del fluido nel vaso.

Se si forano degli orifizj M ed N (*Tav.* LXXXVI, *fig.* 9) sopra le facce orizzontali di un vaso ripieno d'acqua, il livello della quale è costautemente trattenuto alla medesima altezza, il fluido ne esce mediante getti verticali i quali si elevano, con pochissima differenza fino al livello AK dell'acqua nel serbatojo, e possiamo supporre che essi giungerebbero completamente a questo livello, se diverse cause che abbiamo digià indicate (*Vedi* Getto d'acqua) non concorressero a diminuire la velocità d'ascensione. Ma un corpo lanciato verticalmente non giunge ad una data altezza che perchè esso ha ricevuto un'impulsione capace di comunicargli una velocità iniziale eguale alla velocità finale che esso acquisterebbe cadendo liberamente da quest'altezza (*Vedi* Accelerato); dunque le molecule fluide, uscendo dagli orifizj M ed N, sono animate da velocità dovute all'altezze MG ed NH, ovvero, ciò che significa la stessa cosa, all'altezza del livello dell'acqua al di sopra degli orifizj M ed N.

Indicando dunque con v la velocità di uscita e con H l'altezza del livello al di sopra dell'orifizio, avremo, mediante le leggi della caduta dei corpi

$$v = \sqrt{2gH} \; . \; . \; . \; . \; . \; (a).$$

2. Quando si adattano dei tubi agli orifizj M ed N forati nelle pareti sottili del vaso, i getti si elevano meno alto; ma si è riconosciuto che, per tubi perfettamente uguali, le diminuzioni dell'altezza sono proporzionalmente le stesse, vale a dire che se l'altezza del getto NH si riducesse di un quarto, per esempio, quella del getto MG si ridurrebbe similmente di un quarto. In generale, m indicando il rapporto tra l'altezza del getto e quella del serbatoio, per un tubo qualunque, si ha

$$v = \sqrt{2gmH}\,,\quad v' = \sqrt{2gmH'}\,,$$

H ed H' essendo due altezze del serbatojo, e v e v' le velocità corrispondenti.

Si deduce da quest'espressioni

$$v : v' = \sqrt{H} : \sqrt{H'}\,,$$

vale a dire, che *le velocità di uscita per tubi uguali stanno sempre tra loro come le rudici quadrate dell'altezze del livello*, o *come le rudici quadrate dei carichi.*

3. Questi principii si applicano immediatamente ai casi in cui lo sgorgo avesse luogo per orifizj forati nella parete del fondo del vaso o nelle pareti verticali, poichè la velocità del fluido alla sua uscita è evidentemente indipendente dalla sua direzione.

4. La conoscenza della velocità con la quale una vena fluida esce da un orifizio qualunque, conduce a quella della quantità del fluido che sgorga in un tempo determinato, e che si chiama il consumo d'acqua dell'orifizio; infatti, se S rappresenta l'area dell'orifizio, e v la velocità, Sv rappresenterà il volume d'acqua sgorgato nell'unità di tempo; poichè Sv è il volume di un prisma avente S per base e v per altezza; così, indicando il consumo d'acqua con D, avremo

$$D = S\sqrt{2gH} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b).$$

Ma quest' espressione riposa sopra due ipotesi che non sono rigorose nè l'una nè l'altra; la prima, è che la velocità di uscita sia esattamente dovuta a tutto il carico H; la seconda, è che le molecule dell' acqua escano da tutti i punti dell' orifizio in fili paralleli: così la *velocità reale* cha dà l'esperienza si trova sempre minore di quella che si calcola per mezzo della formula (*b*), e che si chiama la *velocità teorica*.

5. La differenza che esiste tra la velocità taorica e la velocità reale proviene dalle direzioni concorrenti che prendono le molecule fluide nall' interno del vaso approssimandosi all' orifizio, e le quali operano una *contrazione* della vena fluida (*Vedi* Contrazione). Quando l'orifizio è forato in una parete sottile, la contrazione della vena rende la sua sezione più piccola dell' area dell' orifizio, il che conseguentemente diminuisce il consumo d' acqua; quando lo sgorgo si effettua pienamente, mediante un tubo cilindrico, la velocità d' uscita è più piccola di quella dovuta al carico, vi è dunque ancora diminuzione di consumo d' acqua; finalmente, questo consumo d' acqua può ancora trovarsi diminuito mediante una doppia diminuzione di velocità e di sezione, il che ha luogo in certi tubi conici. In tutti questi casi, la velocità reale è una frazione della velocità teorica, e possiamo porre

$$D = mS\sqrt{2gH} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (c),$$

m essendo un coefficiente da determinare mediante l'esperienza per ciascuna specie d' orifizio di sgorgo. Se si trattassa del consumo d' acqua in un tempo T, si avrebbe evidentemente

$$D = mST\sqrt{2gH}.$$

6. Cominciamo da esaminare il caso in cui l' orifizio sia forato in una parete sottile, vale a dire dove la sua grossezza sia piccolissima rapporto al suo diametro, e consideriamo in primo luogo un orifizio circolare. In questo caso gli effetti della contrazione sono esterni e possano essere facilmente osservati; si sa che alla sua uscita dall' orifizio la vena affetta una forma conoidale, e che dopo aver diminuito di larghezza fino ad una certa distanza dall' orifizio, essa diviene sensibilmente cilindrica. La fig. 8 della Tav. LXXXVI, rappresenta la forma della sua sezione longitudinale, dal diametro AB dell' orifizio fino al diametro il più contratto ab; al di là di ab la contrazione cessa, e la vena rimane cilindrica sopra una lunghezza più o meno grande. Mediante questa forma, è evidente che il consumo d' acqua reale dipende dalla grandezza della sezione contratta ab; poichè essa si compone del volume d' acqua che passa per questa sezione nell' unità di tempo. Siccome la velocità della sezione contratta è con pochissima differenza la stessa di quella che è dovuta al carico, si vede che basterebbe di conoscere l' area di questa sezione e di sostituirla ad S, nella formula (*b*), per determinare il consumo d' acqua reale.

7. Il Newton, che è stato il primo ad indicare i fenomeni della contrazione, aveva trovato, con considerazioni teoriche, che il rapporto della sezione dell' orifizio alla sezione della vena contratta era uguale a quello dei numeri $\sqrt{2} : 1$; dimodochè la sezione dell' orifizio essendo S, quella della vena contratta sarebbe

$$\frac{S}{\sqrt{2}} = 0,71\,S,$$

e si avrebbe per il consumo d'acque reale

$$D = 0,71\, S \sqrt{2gH},$$

ma l'esperienza fa conoscere che il coefficiente 0,71 è generalmente troppo grande.

8. Di tutte l'esperienze fatte per determinare il rapporto dei diametri AB ed *ab* delle due sezioni, tanto tra essi, quanto con la loro distanza CD, i più decisivi sembrano essere quelli dell'Eytelwein, i quali assegnano i rapporti

$$AB : ab : CD = 10 : 8 : 5.$$

Possiamo almeno considerare questi numeri come termini medii, poichè i rapporti variano con la grandezza degli orifizj e quella dei carichi. Ne resulta che le due sezioni stanno tra loro come $(10)^2 : 8^2$, ovvero come $1 : 0,64$, il che differisce poco dal coefficiente medio che si è ottenuto per la misura diretta dei consumi d'acque.

9. La determinazione esatta delle dimensioni della vena contratta presentando grandissime difficoltà è molto più semplice di osservare il consumo d'acqua reale di un orifizio conosciuto, e di concluderne il coefficiente di riduzione paragonandolo con la velocità teorica. Per dare un esempio di questo processo, tradurremo in misure metriche un'esperienza del Bossut: l'orifizio di sgorgo era un quadrato di 54 millimetri di lato, e il carico del serbatoio, o l'altezza del livello al di sopra del centro dell'orifizio, aveva $3^{m},81$; il serbatoio era trattenuto costantemente alla medesima altezza da un troppo pieno. Il volume d'acqua sgorgato in un minuto e raccolto con cura essendosi trovato di $74^{mc},6658$, il Bossut ne ha concluso che il consumo d'acqua reale in un secondo era stato

$$\frac{74{,}6658}{60} = 1^{mc},24443.$$

Ora, il consumo d'acqua teorico è

$$S\sqrt{2gH} = \left(0^{m},054\right)^2 \sqrt{2(9,8088)(3,81)} = 2^{mc},01364.$$

Così, il rapporto di questi consumi d'acque, o il coefficiente di riduzione, era

$$\frac{1,24443}{2,01364} = 0,618.$$

Simili esperienze hanno provato che il coefficiente di riduzione è più grande per i piccoli orifizj e i piccoli carichi, ma che esso non si eleva mai al di sopra di 0,70, e scende raramente al di sotto di 0,60. Nei casi ordinari della pratica, il suo valore è racchiuso tra i limiti 0,60 e 0,64; così, si è adottato per termine medio approssimativo 0,62, il che dà per la formula usuale dei consumi d'acque per orifizj in sottili pareti

$$D = 0,62\, S \sqrt{2gH},$$

ovvero, semplicemente,

$$D = 2,75\, S \sqrt{H}.$$

Quando gli orifizj sono forati nelle pareti verticali del vaso, bisogna fare H uguale all' altezza del livello al di sopra del centro dell' orifizio, affinchè $\sqrt{2gH}$ non si allontani dalla velocità media di tutti i fili della vena fluida.

La determinazione del seguito dei coefficienti relativi a diversi carichi e a diversi orifizj è stata effettuata nel 1826 e 1827 dai signori Poncelet e Lesbros, con l' aiuto di un gran numero di esperienze fatte sopra una scala molto più larga che tutto ciò che era stato tentato fino a quell' epoca. Gli orifizj erano rettangolari, tutti avevano $0^m,20$ di base sopra altezze che hanno variato da $0^m,01$ fino a $0^m,20$.

Ecco i coefficienti dedotti dall' osservazioni:

CARICO SUL CENTRO DELL' ORIFIZIO	ALTEZZA DEGLI ORIFIZJ					
	$0^m,01$	$0^m,02$	$0^m,03$	$0^m,05$	$0^m,10$	$0^m,20$
$0^m,01$	0,709					
0,02	0,698	0,660				
0,03	0,691	0,660	0,638			
0,04	0,685	0,659	0,640	0,612		
0,05	0,682	0,659	0,640	0,617		
0,06	0,678	0,658	0,640	0,622	0,590	
0,08	0,671	0,657	0,639	0,626	0,600	
0,10	0,667	0,655	0,638	0,628	0,605	
0,12	0,664	0,654	0,637	0,630	0,609	0,572
0,15	0,660	0,653	0,635	0,631	0,611	0,585
0,20	0,655	0,650	0,634	0,634	0,613	0,592
0,30	0,650	0,645	0,632	0,632	0,616	0,598
0,40	0,647	0,642	0,631	0,631	0,617	0,600
0,50	0,643	0,640	0,630	0,631	0,617	0,602
0,70	0,638	0,637	0,629	0,629	0,616	0,604
1,00	0,627	0,632	0,627	0,627	0,615	0,605
1,30	0,621	0,625	0,623	0,623	0,613	0,604
1,60	0,616	0,618	0,619	0,619	0,611	0,602
2,00	0,613	0,613	0,613	0,613	0,607	0,601
3,00	0,608	0,608	0,607	0,606	0,603	0,601

11. Quando gli orifizj non sono circolari, la forma della vena fluida varia a misura ch' essa se ne allontana e presenta diversi fenomeni singolari, ma sembra che ad eccezione del caso in cui il perimetro dell' orifizio offra degli angoli rientranti, la sua figura non eserciti alcun' influenza sul consumo d' acqua, e si ammette generalmente che il consumo d' acqua è lo stesso, sotto uno stesso carico,

per tutti gli orifizj le cui aree sono equivalenti. I coefficienti precedenti, quantunque relativi a orifizj rettangolari, possono dunque servire in tutti i casi, considerando semplicemente l'altezza del rettangolo indicato alla testa di ciascuna colonna come la più piccola dimensione dell'orifizio impiegato. Possiamo ancora, per maggiore esattezza, quando la dimensione dell'orifizio non si trova nella tavola, calcolare direttamente il consumo d'acqua mediante la formula seguente, dovuta al signor Lesbros:

$$D = lh \left\{ 2,63\sqrt{H - 0,136h} + 0,174\sqrt{h} - 0,2 \,.\, \mathrm{Log}\left(5h\right) . \sqrt{H} \right\},$$

l è la larghezza dell'orifizio, h la sua altezza, ed H il carico sul centro dell'orifizio. Se l'orifizio fosse circolare, si sostituirebbe la sua superficie ad lh ed il suo diametro ad h.

Questa formula non è valida che per gli orifizj la cui altezza è al di sopra di $0^m,05$. Il signor Lesbros ne ha data un'altra che abbraccia tutti gli orifizj fino a quello di $0^m,01$ di altezza inclusivamente; eccola:

$$Q = \alpha + \beta H' + \gamma \sqrt{H' + \delta},$$

H' è l'altezza del livello del serbatoio al di sopra del limite superiore dell'orifizio, ed α, β, γ, δ; hanno i seguenti valori:

$$\alpha = l \left\{ 0,63\sqrt{(h - 0,062)^2 + 0,0017} + 0,052h - 0,0044 \right\},$$

$$\beta = lh \,.\, \frac{0,00523 - 0,186(h - 0,125)^2}{h + 0,00489},$$

$$\gamma = lh\left(\frac{0,0554}{h + 0,113} + 2,48\right),$$

$$\delta = h\left(\frac{0,0043}{h + 0,028} + 0,339\right).$$

Dobbiamo fare osservare che quest'ultima formula non è applicabile che ai carichi che non superano $2^m,50$ per l'orifizio la cui altezza è $0^m,01$ e 4^m per tutti gli altri.

12. Quando si pone un tubo sull'orifizio di sgorgo, i fenomeni della contrazione si complicano di quelli dell'attrazione delle pareti, del tubo sopra le molecule fluide, non ostante può succedere che la vena lo attraversi senza toccarlo, ed allora esso non modifica per nulla la velocità e il consumo d'acqua; ma se la vena aderisce alle sue pareti e che lo sgorgo si faccia a pieno orifizio, ovvero, come si dice, ad *orifizio sfondato*, il che succede sempre quando il tubo è un poco più lungo della vena contratta, la velocità della vena aumenta, e il consumo d'acqua è più grande di quello che avrebbe luogo per l'orifizio in pareti sottili. L'esperienza dà 0,82 per il valore medio del coefficiente di riduzione

del consumo d'acqua teorico. Si ha dunque, nel caso di un tubo cilindrico,

$$D = 0,82S\sqrt{2gH}.$$

L'orifizio di uscita essendo lo stesso dell'orifizio della parete del serbatojo, la differenza tra il consumo d'acqua teorico e il consumo d'acqua reale non può provenire che da una diminuzione della velocità dovuta al carico. Così, indicando con v quest'ultima, e con u la velocità di uscita, si ha

$$u = 0,82v.$$

13. I tubi conici convergenti, vale a dire il cui orifizio di uscita è più piccolo che l'orifizio del serbatojo, aumentano ancora più il consumo d'acqua che i tubi cilindrici, quando ciò non ostante essi hanno delle dimensioni convenienti, poichè i loro effetti variano con l'*angolo di convergenza* o con l'angolo che formerebbero due lati opposti del tronco di cono prolungati fino al loro incontro. Quantunque queste sorte di tubi siano quasi esclusivamente impiegati nella pratica, non si aveva alcuna conoscenza esatta della loro influenza sopra il consumo d'acqua e sopra la velocità dello sgorgo, avanti le recenti esperienze dei signori d'Aubusson e Castel, pubblicate nel 1833 negli *Annali delle Mine*. Eccone i resultamenti medj.

ANGOLO DI CONVERGENZA	COEFFICIENTE	
	DEL CONSUMO D'ACQUA	DELLA VELOCITÀ
0° 00′	0,82	0,82
1 44	0,87	0,86
3 22	0,89	0,88
4 10	0,91	0,90
5 30	0,92	0,92
7 52	0,93	0,93
9 8	0,94	0,94
10 34	0,94	0,95
12 0	0,95	0,95
13 32	0,94	0,96
14 44	0,93	0,96
16 16	0,93	0,95
19 18	0,93	0,96
23 2	0,92	0,96
29 56	0,90	0,97
40 18	0,88	0,98
49 6	0,85	0,99

Da quest' esperienze e da alcune altre ancora fatte dal signor Castel, si può concludere, dice il signor d'Aubusson (*Idraul. degl' Ingegn.*):

» 1.° Che il consumo d'acqua reale, a partire da 0,82 del consumo d'acqua teorico, va gradatamente aumentando a misura che l'angolo di convergenza dei lati del tubo aumenta, ma fino a 12 o 13° solamente, dove il suo coefficiente e 0,95. Al di là esso diminuisce, assai debolmente in principio, come tutte le variabili, in vicinanza del *maximum*; a 20° il coefficiente è ancora 0,94 ovvero 0,93; ma inseguito la diminuzione è ben pronunziata, essa diventa continuamente più rapida, e il consumo d'acqua finirebbe per non essere più che quello che si ottiene dagli orifizj in parete sottile, ossia 0,65 del consumo d'acqua teorico.

» La spiegazione di questi fatti mi sembra assai naturale. Nei tubi conici il consumo d'acqua teorico è alterato da due cause: l'attrazione delle pareti che tende ad aumentarlo; e la contrazione della vena che tende a diminuirlo, diminuendo la velocità quando essa è interna, diminuendo la sezione della vena quando essa è esterna. Dall'esperienze del Venturi, la contrazione interna sembrerebbe dover essere costante, fino a 20° circa, quest' angolo essendo con pochissima differenza l'angolo di convergenza della vena contratta, e non si ha contrazione esterna avanti 12°. In conseguenza, fino a quest' angolo, l'attraziona delle pareti farà sola variare il consumo d'acqua; essa l'aumenterà continuamente a misura che le pareti convergeranno, poichè la loro distanza al luogo della più gran contrazione diventerà più piccola, e perchè l'attrazione agisce inversamente alle distanze. Ma, al di là di 12°, la contrazione esterna si manifesta e diventa continuamente più grande; poco dopo, a 20°, la contrazione interna sparisce; e i fenomeni dello sgorgo si ravvicinano, per tutti i riguardi, di quelli che hanno luogo per gli orifizj in parete sottile, orifizj con i quali i tubi conici convergenti si confondono sotto l'angolo di convergenza estrema 180°.

» 2.° Seguendo i coefficienti della velocità, si vedono, a partire da 0°, aumentare e presso a poco come quelli del consumo d'acqua, fino all'angolo del più gran consumo d'acqua; ma al di là, nel tempo che questi diminuiscono, essi continuano ad aumentare ravvicinandosi al limite che essi possono raggiungere e dal quale essi sono già vicinissimi a 40° e 50°.

» Questi fatti sono ancora una conseguenza dell' osservazione di sopra, che al di là di 20° di convergenza i fenomeni dei tubi conici si ravvicinano a quelli degli orifizj in parete sottile; così passato quest' angolo, i coefficienti del consumo d'acqua debbono ravvicinarsi a 0,65 e per conseguenza diminuire, e quelli della velocità di projezione debbono avvicinarsi ad 1 e per conseguenza aumentare. »

14. I tubi conici divergenti, o che hanno la loro più piccola base adattata all' orifizio del serbatoio sono pochissimo impiegati; essi presentano il fenomeno singolare di dare un consumo d'acqua più grande del consumo d'acqua teorico. Il Venturi, che ha fatto molte esperienze sopra questi tubi, ha trovato che quando la lunghezza del tronco di cono è uguale a nove volte il diametro della piccola base, e che l'angolo di dilatazione o di convergenza verso il serbatoio è di circa 5°, il consumo d'acqua reale è una volta e mezzo più grande della velocità teorica.

15. L'espressione del consumo d'acqua teorico (*b*) suppone che tutti i fili dei quali la vena fluida è composta abbiano la stessa velocità $\sqrt{2gH}$, ovvero che questa quantità $\sqrt{2gH}$ rappresenti la loro velocità media, il che non è per nulla esatto; poichè la velocità del file medio della vena, di quello che è sottoposto al carico medio H, non è la velocità media della vena, poichè le velocità re-

spettive dei diversi fili stanno tra loro nel rapporto delle radici quadrate dei carichi. La differenza tra la velocità media e quella del filo medio è poco sensibile quando l'altezza dell'orifizio è piccolissima rapporto al carico medio; ma essa non potrebbe essere trascurata nel caso contrario, e dobbiamo far conoscere i resultamenti teorici i quali si riferiscono alla velocità media di una vena fluida sgorgando da un serbatojo per un orifizio laterale. Sia dunque AB (*Tav.* LXXXVI, *fig.* 11) un vaso ripieno di un liquido qualunque trattenuto costantemente allo stesso livello ab, e il quale sgorga per l'orifizio in parete sottile $cdef$; la forma di quest' orifizio non avendo alcuna influenza sopra il consumo d'acqua, la supporremo rettangolare per maggior facilità; conduciamo le due rette MM, mm parallele ed uguali alla larghezza cf dell' orifizio, e facciamo

$$\text{HD}=\text{H},\quad \text{HE}=\text{H}',\quad \text{EP}=x,\quad \text{MM}=l.$$

Considerando la distanza Pp delle due rette MM, mm, come infinitamente piccola, e allora Pp è la differenziale di x, tutte le molecule fluide passando pel rettangolo elementare MmmM saranno sottoposte ad uno stesso carico

$$\text{HP}=\text{HE}+\text{EP}=\text{H}'+x,$$

e il consumo d'acqua per questo rettangolo sarà uguale alla sua area $\text{MM}\times\text{P}p=l.dx$, moltiplicata per la velocità $\sqrt{2g(\text{H}'+x)}$, dovuta all'altezza $\text{H}'+x$; ora il consumo d'acqua elementare

$$ldx\sqrt{2g(\text{H}'+x)},$$

è la differenziale del consumo d'acqua totale per l'orifizio $cdef$. Dunque

$$d\text{D}=ldx\sqrt{2g(\text{H}'+x)}.$$

Integrando quest' equazione, viene

$$\text{D}=l\sqrt{2g}\int dx\sqrt{\text{H}'+x}$$

$$=\frac{2}{3}l\sqrt{2g}\left[\left(\text{H}'+x\right)^{\frac{3}{2}}+\text{C}\right].$$

Il consumo d'acqua dovendo esser nullo quando $x=0$, si ha per determinare la costante, l'equazione

$$0=\frac{2}{3}l\sqrt{2g}\left[\text{H}'^{\frac{3}{2}}+\text{G}\right],$$

donde si ricava

$$\text{G}=-\text{H}'^{\frac{3}{2}};$$

così l' integrale completo è

$$D=\frac{2}{3}\,l\sqrt{2g}\left[\left(H'+x\right)^{\frac{3}{2}}-H'^{\frac{3}{2}}\right],$$

nel quale bisogna dare ad x il valore dell' altezza totale dell' orifizio

$$ED=HD-HE=H-H'.$$

Si ha dunque definitivamente

$$D=\frac{2}{3}\,l\sqrt{2g}\left[H\sqrt{H}-H'\sqrt{H'}\right]\ldots\ldots(e).$$

Tale è l' espressione generale del consumo d' acqua teorico.

16. Possiamo dedurre da quest' espressione la velocità media della vena fluida, osservando che l' area dell' orifizio è $l(H-H')$, e che così, v indicando la velocità media, si ha

$$v=\frac{2}{3}\sqrt{2g}\,\frac{H\sqrt{H}-H'\sqrt{H'}}{H-H'}.$$

Per determinare il carico che produce la velocità media, basta sostituire questo valore di v nell' espressione generale

$$h=\frac{v^2}{2g};$$

chiamando H'' l' altezza cercata, si trova

$$H''=\frac{4}{9}\left(\frac{H\sqrt{H}-H'\sqrt{H'}}{H-H'}\right)^2.$$

17. Degli esempii numerici ci daranno un' idea della differenza dei risultamenti delle formule (b) ed (e).

I. *Si domanda qual sarebbe il consumo d' acqua teorico di un orifizio rettangolare di 0^m,5 di altezza sopra 1^m di larghezza, e avente un carico di 2 metri sul suo livello superiore.*

In questo caso

$$H'=2,\ H=2,+0,5=2,5\ \text{e}\ l=1.$$

Sostituendo questi valori nella formula (e), si ottiene

$$D=\frac{2}{3}\sqrt{2g}\left[2,5\sqrt{2,5}-2\sqrt{2}\right]=3^{mc},2934.$$

La formula (b) darebbe, impiegando il carico medio $\frac{1}{2}\left(H+H'\right)=2,25$,

$$D=0,5\sqrt{2g(2,25)}=3^{mc},3218.$$

Faremo osservare che l' altezza dell' orifizio è quasi il quarto del carico medio.

II. *L' orifizio rettangolare avendo 0^m,1 di altezza sopra 0,5 di larghezza*,

si domanda il consumo d' acqua teorico per un carico di $1^m,05$ *sul livello inferiore.*

Si ha $H = 1,05$, $H' = 1,05 - 0,1 = 0,95$ ed $l = 0,5$.

Questi valori sostituiti nella formula (*e*), danno

$$D = \frac{2}{3}\left(0,5\right)\sqrt{2g}\left[1,05\sqrt{1,05} - 0,95\sqrt{0,95}\right]$$

$$= 0^{mc},221444.$$

Il carico medio essendo $\frac{1}{2}\left(H + H'\right) = 1$, la formula (*b*) darebbe

$$D = \left(0,5\right)\left(0,1\right)\sqrt{2g} = 0^{mc},221459.$$

In questo caso l' altezza dell' orifizio è la decima parte del carico medio, e si vede che i valori calcolati con le due formule differiscono tanto meno quanto l' altezza dell' orifizio è più piccola rapporto a quella del carico.

18. Nella pratica, bisogna applicare alla formula (*e*) un coefficiente di riduzione, col fine di avere il consumo d' acqua reale; ecco quelli che resultano dall' esperienze dei signori Poncelet e Lesbros, citati di sopra; essi abbracciano tutti i casi ordinarj.

CARICO SUL CENTRO	ALTEZZA DEGLI ORIFIZI					
	$0^m,01$	$0^m,02$	$0^m,03$	$0^m,05$	$0^m,10$	$0^m,20$
$0^m,01$	0,712					
0,02	0,700	0,667	0,644			
0,03	0,693	0,663	0,644			
0,04		0,661	0,643	0,624		
0,05		0,660	0,643	0,625		
0,06			0,642	0,627	0,611	
0,08			0,640	0,628	0,612	
0,10			0,638	0,630	0,613	
0,12				0,631	0,614	0,592
0,15				0,631	0,615	0,597
0,20				0,631	0,616	0,599
0,30					0,617	0,601
0,50					0,617	0,603
1,00						0,605

I coefficienti del n.º 10 dando con la formula (*b*) dei risultamenti quasi identici con quelli che si ottengono dai precedenti con la formula (*e*), ordinariamente

ci serviamo della prima formula, molto più semplice e molto più facile a calcolare dell' ultima.

19. Le leggi dello sgorgo per i risciacquatoj o per l' incavature rettangolari praticate alla parte superiore di una delle pareti di un serbatojo non sono che essi particolari di quelle per gli orifizj verticali. Il carico sulla parte superiore dell' orifizio essendo nullo, basta fare $H' = o$ nella formula (*e*) per ottenere immediatamente

$$D = \frac{2}{3} l \sqrt{2g} \, . \, H \sqrt{H} \, ,$$

e per il consumo d' acqua reale

$$D = \frac{2}{3} ml \sqrt{2g} \, . \, H \sqrt{H} \, . \, . \, . \, . \, . \, (f),$$

m essendo il coefficiente di riduzione.

Dobbiamo osservare che il carico H della parte inferiore dell' orifizio o del *soglio del risciacquatojo* è sempre più grande dell'altezza del livello dell'acqua al di sopra di questo soglio, perchè la vena fluida devii avanti di raggiungere il risciacquatojo. Per esempio se AB (*Tav.* CCXXIV, *fig.* 1) è l' altezza del livello generale del serbatojo al di sopra del soglio, l' altezza DB dell' acqua al di sopra di questo stesso soglio sarà più piccola di AB, per conseguenza del moto delle molecule fluide che cominciano a scendere in E avanti di aver raggiunto l' orifizio. La quantità H della formula (*f*) è dunque AB e non DB, e nei calcoli relativi ai risciacquatojo, il carico si misura mediante la distanza tra il soglio e il livello dell' acqua in riposo.

Premesso ciò, la quantità $\frac{2}{3} m \sqrt{2g}$ essendo costante per ciascuno risciacquatojo la rappresenteremo con μ, ed avremo semplicemente per l' espressione del consumo d' acqua reale per un risciacquatojo la cui larghezza dal soglio è l, la formula generale

$$D = \mu l H \sqrt{H}.$$

L' esperienze dei signori d' Aubusson e Bidone, quella dell' Eytelwein, e le ultime dei signori Poncelet e Lesbros si accordano per assegnare al coefficiente μ il valore medio 1,80, dimodochè possiamo generalmente ammettere

$$D = 1{,}80 l H \sqrt{H} \, . \, . \, . \, . \, . \, (g).$$

Applichiamo quest' ultima espressione alla soluzione di alcuni problemi pratici.

I. *Avendo una vasca mantenuta costantemente piena da un corso di acqua che somministra* $1^{mq},500$ *per secondo, si domanda a qual profondità al di sotto del livello della vasca bisogni stabilire un risciacquatojo che avesse* $1^{m},60$ *di larghezza per fare sgorgare la quantità di acqua somministrata dalla corrente.*

H essendo in questo caso la quantità domandata, cominciamo dal ricavarla dalla formula (*g*), avremo

$$H = \sqrt[3]{\left(\frac{D}{1{,}80 \, l}\right)^2},$$

ora dai dati della questione, $l=1,60$ e $D=1,50=1,50$; così

$$H=\sqrt[3]{\left(\frac{1,50}{1,80\times1,60}\right)^2}=0,647.$$

Bisognerà dunque situare il soglio a $0^m,647$ al di sotto del livello al quale l'acqua dev'essere mantenuta nella vasca.

II. *Si domanda la larghezza che deve avere un risciacquatojo il cui soglio è a* $0^m,60$ *al di sotto del livello costante di un pezzo di acqua per ottenere un consumo d'acqua di 2 metri cubi per secondo.*

Abbiamo in questo caso $H=0,60$, $D=2=2$, e si tratta di determinare l. L'equazione (g), risoluta rapporto ad l, dà

$$l=\frac{D}{1,80H\sqrt{H}}.$$

Sostituendo i valori numerici, otterremo

$$l=\frac{2}{1,80\times0,60\times\sqrt{0,60}}=2^m,391.$$

20. Succede molto spesso che i serbatoj sono alimentati da correnti d'acqua, le quali giungono direttamente alla parete sopra la quale è aperto l'orifizio o il risciacquatojo, lo sgorgo si fa allora non solamente in virtù del carico H, ma ancora in virtù della velocità iniziale delle molecole fluide; in questo caso, la quantità H deve esprimere l'altezza intera dovuta alla velocità dello sgorgo, vale a dire la somma del carico sull'orifizio e dell'altezza dovuta alla velocità iniziale; dando ad H questa significazione, non ci è niente da cangiare alla formula generale (c) del consumo d'acqua per gli orifizj, ma la formula (f) del risciacquatoj può presentare delle difficoltà che cercheremo di rischiarare. Per riconoscere facilmente la funzione particolare di ciascuna quantità in questa formula, mettiamola sotto la forma

$$D=mlH\sqrt{2g\left(\frac{4}{9}H\right)}\quad\ldots\ldots(h).$$

e vedremo immediatatamente, che astrazione fatta dal coefficiente di riduzione m, essa si compone di due fattori generali lH e $\sqrt{2g\left(\frac{4}{9}H\right)}$ il primo dei quali lH esprime l'area del risciacquatojo, e il secondo $\sqrt{2g\left(\frac{4}{9}H\right)}$ la velocità media dello sgorgo, poichè il consumo d'acqua si compone generalmente del prodotto dell'area dell'orifizio per la velocità media del fluido: $\frac{4}{9}$ H è dunque l'altezza generatrice della velocità media, e a questa sola quantità dobbiamo aggiungere l'altezza che spetta alla velocità iniziale media del fluido nel serbatojo. Così, chiamando u questa velocità, l'altezza che gli è dovuta essendo $\frac{u^2}{2g}=0,051u^2$, la formula

dei risciacquatoj divente

$$D = mlH\sqrt{\left[2g\left(\frac{4}{9}H + 0,051u^2\right)\right]},$$

il che può mettersi sotto la forme

$$D = \frac{2}{3}m\sqrt{2g} \cdot lH\sqrt{H + 0,115u^2}.$$

Se ora indichiamo con v la velocità alle superficie della corrente, che è la più facile ad osservare, e se prendiamo $u = 0,94v$, quest' ultima formula diventerà

$$D = 1,78\,lH\sqrt{H + 0,1v^2} \quad \ldots\ldots (i),$$

l'esperienza avendo fatto conoscere che il valore medio del coefficiente $\frac{2}{3}m\sqrt{2g}$ è 1,78. Dovremo servirci delle formula (i) tutte le volte che la sezione della corrente non supererà dieci a dodici volte lH; negli altri casi, la velocità v non esercita alcuna influenza sensibile sopra il consumo d'acqua, ed è inutile di tenerne conto.

Faremo osservare di volo che resulta dall' espressione (h), che la velocità media della vena fluida è i due terzi della velocità al soglio del risciacquatojo.

§ II. Sgorghi a livello variabile.

21. La teoria degli sgorghi e livello variabile è molto meno avanzata di quella degli sgorghi a livello costante, per la quale in conseguenza dobbiamo continuamente ricorrere all' esperienza. L'ipotesi del parallelismo degli strati (*vedi* Idrodinamica) che serve di base a questa teoria, è evidentemente insufficiente, poichè se possiamo ammettere che al principio dello sgorgo la superficie superiore del fluido nel vaso si abbassi parallelamente a se stessa, non succede più così quando gli strati fluidi son giunti nella sfera di attività dell' orifizio; essi prendono allora delle direzioni concorrenti verso quest' orifizio, e quando non rimane più che poco liquido nel vaso, ci si forma un imbuto di cui l'aria occupa il mezzo, il consumo d'acqua diminuisce considerabilmente, e finalmente lo sgorgo non si opera più che goccia a goccia quando l'altezza dell' acqua è ridotta ad alcuni millimetri. Le figure 10 della *Tav.* LXXXVI, e 2 a 3 della *Tav.* CCXXIV, rappresentano le inflessioni della superficie superiore del fluido. Quest' ultimi fenomeni non sono ancora stati sottoposti al calcolo, ma nella pratica è raro di avere da considerare il caso dove un serbatojo si vuota completamente, e possiamo ancora modificare le formole teoriche con coefficienti di riduzione dedotti dall' esperienza.

22. Senza ricorrere alle considerazioni teoriche delle quali abbiamo indicato il poco valore, e le quali conducono a formule differenziali integrabili in un piccolo numero di casi, osserviamo che si può ammettere che ad un istante dato la velocità di uscita per un orifizio praticato nel fondo di un vaso prismatico è dovuta all' altezza corrispondente del liquido nel serbatojo; così, indicando con H, H', H'', ec., le altezze successive del livello al di sopra del centro dell' orifizio, le velocità corrispondenti dello sgorgo sarebbero rappresentate da

$$\sqrt{2gH},\quad \sqrt{2gH'},\quad \sqrt{2gH''},\quad \text{ec.},$$

vale a dire che esse staranno tra loro come le radici quadrate delle altezze; *lo sgorgo si effettua dunque mediante un moto uniformemente ritardato*, e diventa facile paragonare la quantità d'acqua che sgorga in un tempo dato con quella che sarebbe sgorgata se il moto fosse stato uniforme. Si sa, infatti, che quando un corpo si muove con un moto uniformente accelerato, acquista, in un tempo qualunque, una velocità capace di fargli descrivere in questo medesimo tempo uno spazio doppio di quello che ha già percorso; e, reciprocamente, che quando esso si muove con un moto uniformeote ritardato, esso percorre in un tempo determinato uno spazio metà più piccolo di quello che avrebbe descritto uniformemente in virtù della sua velocità iniziale. Così, considerando il volume di acqua sgorgato come un prisma il cui orifizio è la base e che ha per altezza lo spazio che percorrerebbero con un moto uniformemente ritardato le prime molecule uscite, si vede che il volume di questo prisma è la metà di ciò che esso sarebbe stato se le molecule avessero conservato la loro velocità iniziale, poichè allora lo spazio che esse avrebbero percorso, vale a dire, l'altezza del prisma, sarebbe stata doppia.

Ne resulta che *il volume di acqua uscito da un orifizio di un vaso prismatico il quale si vuota non è che la metà di quello che si sarebbe avuto nello stesso tempo, se lo sgorgo si fosse effettuato costantemente sotto il carico che aveva luogo all' origine del moto.*

Indichiamo con H il carico iniziale ovvero l'altezza del livello al di sopra del fondo avanti che lo sgorgo sia cominciato, con A la sezione orizzontale o l'area della base del vaso prismatico, e con T il tempo nel quale tutta l'acqua il cui volume è AH è sgorgata. Mediante il precedente teorema, il volume di acqua che sarebbe sgorgato nel tempo T sotto il carico costante H sarebbe stato 2AH, ma in queste medesime condizioni il consumo d'acqua è espresso da

$mST\sqrt{2gH}$ (n.° 5); dunque

$$2AH = mST\sqrt{2gH} \quad \ldots\ldots (k).$$

Tale è l'equazione fondamentale dello sgorgo per gli orifizj praticati nel fondo dei vasi prismatici; ricavando il valore di T dall'equazione (*k*) si ha la relazione

$$T = \frac{2A\sqrt{H}}{mS\sqrt{2g}} \quad \ldots\ldots (l).$$

23. Ciò che importa principalmente di conoscere per la pratica, è il tempo che il livello di una vasca mette ad abbassarsi di una data quantità. Possiamo ottenerlo come segue: sia *t* il tempo nel quale l'altezza primitiva H si è ridotta ad H'; se indichiamo con T' il tempo che bisognerebbe alla vasca per vuotarsi completamente a partire dal momento in cui l'altezza del suo livello è divenuta H', avremo, in virtù della relazione generale (*l*),

$$T' = \frac{2A\sqrt{H'}}{mS\sqrt{2g}},$$

e per conseguenza

$$T - T' = t = \frac{2A\sqrt{H}}{mS\sqrt{2g}} - \frac{2A\sqrt{H'}}{mS\sqrt{2g}};$$

donde si ha definitivamente

$$t = \frac{2A}{mS\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H}-\sqrt{H'}\right) \ldots\ldots (m).$$

24. Per dare un esempio di applicazione, cominceremo dal citare un' esperienza del Bossut, fatta con una vasca prismatica la cui sezione orizzontale era un quadrato di $0^m,975$ di lato, e forata in basso con un orifizio circolare di $0^m,0541$ di diametro; avendo ripieno di acqua fino ad un' altezza di $3^m,79$, esso ha osservato che dopo uno sgorgo di 5′6″, il livello dell' acqua si era abbassato di $2^m,92$. Prendiamo questi dati e determiniamo, per mezzo della formula (m), il tempo necessario per produrre un abbassamento di livello di $2^m,92$.

Abbiamo

$$A = 0^m,975 \times 0^m,975 = 0^{mq},9506,$$

$$S = \frac{1}{4}\pi\left(0,0541\right)^2 = 0^{mq},0023,$$

$$H = 3^m,79,\ H' = 3^m,79 - 2^m,92 = 0,87.$$

Prendendo per il coefficiente di riduzione 0,60, come l' indica la tavola del n.° 10, e sostituendo tutti questi valori nella formula, avremo

$$t = \frac{2 \times 0,9506}{0,60 \times 0,0023\sqrt{2g}}\left(\sqrt{3,79}-\sqrt{0,87}\right),$$

il che dà, eseguendo i calcoli,

$$t = 430'' = 7',10'',$$

resultamento che poco differisce da quello dell' esperienza. Si è osservato che in tutti i casi in cui l' abbassamento di livello non è assai considerabile per produrre un imbuto (n.° 21), la formula (m) si accorda benissimo con i fatti.

25. Se si trattasse di determinare l' abbassamento di livello $H-H'$ che ha luogo in un intervallo dato di tempo t, bisognerebbe ricavare il valore $H-H'$ dalla formula (m), il che si ottiene con una semplice trasformazione. Diamo alla formula (m) la forma

$$\frac{mtS\sqrt{2g}}{2A} = \sqrt{H}-\sqrt{H'},$$

e moltiplichiamo i due membri di quest' uguaglianza per $\sqrt{H}+\sqrt{H'}$, verrà

$$\frac{mtS\sqrt{2g}}{2A}\left(\sqrt{H}+\sqrt{H'}\right) = H - H'.$$

Sostituendo in luogo di $\sqrt{H'}$ il valore

$$\sqrt{H'} = \sqrt{H} - \frac{mtS\sqrt{2g}}{2A},$$

ricavato dalla formula (m), otterremo

$$h = \frac{mtS\sqrt{2g}}{A}\left(\sqrt{H}-\frac{mtS\sqrt{2g}}{4A}\right) \ldots\ldots (n),$$

h indicando la differenza di livello ovvero la grandezza dell' abbassamento.

26. Basta osservare che il volume d'acqua sgorgato nel tempo t è uguale al prisma la cui altezza è h e la base A, per avere immediatamente l'espressione del consumo d'acqua nel tempo t, poichè avendo $D = Ah$, si ha ancora

$$D = mtS\sqrt{2g}\left(\sqrt{H} - \frac{mtS\sqrt{2g}}{4A}\right) \ldots\ldots (o).$$

Non crediamo necessario di dare esempii numerici.

27. Esaminiamo ora il caso in cui la vasca sia alimentata da un corso di acqua che gli somministri una quantità di fluido minore di quella che sgorga per il suo orifizio. Sia Q il volume dell'acqua che entra nella vasca in un secondo di tempo, ed x la grandezza dell'abbassamento del livello nel tempo t. Nell'istante infinitamente piccolo dt che segue il tempo t, il livello si abbassa di una quantità infinitamente piccola dx, e per conseguenza la quantità di acqua sgorgata nell'istante dt si compone: 1.° del volume Adx che esisteva nella vasca al principio di quest'istante; 2.° del volume Qdx ricevuto nel recipiente nella durata di tempo dt. Il volume d'acqua realmente uscito è dunque $Adx + Qdx$.

Ma questo stesso volume è ancora espresso da $mSdt\sqrt{2g(H-x)}$, in virtù della formula (d). Dunque

$$Adx + Qdx = mSdt\sqrt{2g(H-x)},$$

facendo $H - x = H'$, il che dà $-dx = dH'$, e ricavando il valore di dt, viene

$$dt = \frac{-dH'(A-Q)}{mS\sqrt{2gH'}},$$

il cui integrale completo è

$$t = \frac{2A}{(mS\sqrt{2g})^2}\left\{mS\sqrt{2g}\left(\sqrt{H} - \sqrt{H'}\right) + M\right\} \ldots\ldots (p),$$

espressione nella quale la quantità M è data dalla relazione

$$M = 2{,}303\, Q \,.\, Log\left(\frac{mS\sqrt{2gH} - Q}{mS\sqrt{2gH'} - Q}\right),$$

La caratteristica *Log* indica un logaritmo volgare.

Ecco un esempio dell'applicazione di questa formola dato dal signor D'Aubusson.

Uno stagno riportato alla forma prismatica ha 3600 metri quadrati di superficie e $3^m,50$ di profondità: esso è alimentato da un ruscello che dà $0^{mc},95$ di acqua per ogni secondo; la cateratta del fondo, quando la pala è interamente levata, ha $1^m,10$ di larghezza e $0^m,60$ di altezza. Si domanda il tempo che lo stagno metterà a vuotarsi fino a $0^m,10$ al di sopra del limite superiore del foro. (Abbiamo fatto osservare che le formole precedenti non potrebbero rendere il il tempo dell'abbassamento quando il livello del fluido non è più che ad una piccola altezza al di sopra dell'orifizio di uscita).

Si ha in questo caso per il carico al di sopra del centro di quest'orifizio, nel momento della levata della cateratta,

$$H = 3^m,50 - \frac{1}{2} \,.\, 0^m,60 = 3^m,20,$$

per il carico alla fine

$$H' = 0{,}10 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}60 = 0{,}40\ ;$$

di più

$$S = 1{,}10 \times 0{,}60 = 0{,}66\ ;$$
$$A = 3600\ ;$$
$$Q = 0{,}95\ ;$$
$$m = 70:$$

per conseguenza,

$$mS\sqrt{2g} = 2{,}0462\ ;$$

$$\mathrm{Log}\left(\frac{mS\sqrt{2gH}-Q}{mS\sqrt{2gH'}-Q}\right) = \mathrm{Log}\,\frac{2{,}7105}{0{,}3442} = 0{,}8962.$$

Mediante ciò l'equazione diventa

$$t = \frac{2 \times 3600}{(2{,}0462)^2}\left\{2{,}0462\left(\sqrt{3{,}2}-\sqrt{0{,}4}\right)\right.$$
$$\left. + 2{,}303 \times 0{,}95 \times 0{,}8962\right\}$$
$$= 7442'' = 2^{or}\ 6''\ 2''.$$

questo è il tempo domandato.

28. Succede spesso nella pratica che i recipienti donde si ricava l'acqua hanno delle forme irregolari, come gli stagni, per esempio; per poter applicare le formule, bisogna allora levare il profilo dei recipienti, poi supporgli divisi in un dato numero di strati paralleli orizzontali di una grossezza al più di un mezzo metro; si prende la larghezza media di questi strati sopra i profili, si moltiplicano per la grossezza adottata, e si ha così un dato numero di recipienti prismatici soprapposti, per ciascuno dei quali si determina il tempo che impiegherà a vuotarsi. La somma di questi tempi parziali dà approssimativamente il tempo dello sgorgo del recipiente irregolare.

29. Quando lo sgorgo ha luogo mediante un risciacquatojo, e che il recipiente non riceve nuova acqua, si ottiene per l'espressione del tempo t, con l'aiuto di considerazioni analoghe a quelle delle quali abbiamo fatto uso di sopra

$$t = \frac{3A}{ml\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{H'}} - \frac{1}{\sqrt{H}}\right) \ldots\ldots (p'),$$

A indicando sempre la sezione orizzontale del recipiente, H l'altezza del livello al principio del tempo t, ed H' la sua altezza alla fine di questo stesso tempo l è la larghezza del risciacquatojo. L'applicazione di questa formula, per la quale si ha generalmente $m = 0{,}61$, non presenta veruna difficoltà.

30. Ci rimane da considerare il caso in cui l'acqua di un serbatojo sgorghi in un altro mediante un orifizio che si apre sotto l'acqua contenuta in questo secondo serbatojo. In questo caso, mediante le leggi dell'equilibrio dei fluidi (*Vedi* IDROSTATICA), l'acqua del secondo serbatojo oppone allo sgorgo una resistenza uguale alla forza che la farebbe scappare essa stessa per l'orifizio comune,

se il primo serbatojo fosse vuoto; non è dunque che io virtù del suo eccesso di forza che l'acqua di questo primo serbatojo può penetrare nel secondo. Ora, la forza o pressione donde dipende la velocità di sgorgo essendo rappresentata dal carico, vale a dire dall'altezza del livello al di sopra del centro dell'orifizio, se si chiami H il carico del primo serbatojo ad un istante determinato ed H' quello del secondo, al medesimo istante, la velocità di sgorgo, in quest'istante sarà dovuta alla differenza dei carichi, ed avremo

$$v = \sqrt{2g\left(H - H'\right)}.$$

Così, *quando un fluido passa da un serbatojo in un oltro per un orifizio ricoperto dal fluido che è in quest' ultimo, il carico effettivo sopra questo orifizio, è l' altezza dovuto allo velocità di uscito, in un istante qualunque, è la differenza di livello dei due serbatoj a questo medesimo istante.*

Questo caso particolare dello sgorgo dei fluidi può presentarsi con tre differenti circostanze: 1.° due serbatoj conservano sensibilmente i loro stessi livelli io tutta la durata dello sgorgo; 2.° il livello del secondo serbatojo è variabile, quello del primo rimanendo costante; 3.° i due livelli sono variabili.

31. Quando i due livelli sono costanti, la velocità è costante ed uguale a $\sqrt{2g\left(H - H'\right)}$, ove S indicando l'area dell'orifizio, il consumo d'acqua nell'unità di tempo è

$$Q = mS\sqrt{2g\left(H - H'\right)}.$$

Diverse esperienze hanno insegnato che si poteva adottare per il coefficiente di riduzione m il numero 0,625, così

$$Q = 0{,}625\,S\sqrt{2gh} \;\ldots\ldots (q),$$

h indicando la differenza dei livelli.

32. Quando il primo livello è solo costante, l'acqua che si eleva nel secondo serbatojo aumenta successivamente il suo carico e diminuisce per conseguenza la velocità dello sgorgo; possiamo dunque riportare questo caso a quello di un serbatojo il quale si vuota liberamente nell'aria, poichè la velocità si trova ancora in questo caso uniformente ritardata, ma i fenomeni si presentano in un ordine inverso, vale a dire che il livello del secondo serbatojo è spinto dal basso in alto mediante una forza continuamente decrescente uguale a ciascun istante alla differenza dei livelli. Se indichiamo con H la differenza dei livelli all'origine dello sgorgo, e con h ciò che diventa questa differenza dopo un tempo t, avremo evidentemente

$$t = \frac{2A}{mS\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right) \;\ldots\ldots (r),$$

A essendo la sezione orizzontale del vaso che si riempie, ed S l'area dell'orifizio. Lo sgorgo dovendo cessare quando i livelli sono gli stessi, avremo ancora, T indicando il tempo del riempimento completo del secondo vaso

$$T = \frac{2A}{mS\sqrt{2g}}\sqrt{H} \;\ldots\ldots (s).$$

Si hanno frequenti occasioni di applicare queste due formule nel moto dell'acque dei canali. Ma bisogna osservare che il coefficiente di riduzione m, che è 0,625 quando lo sgorgo si effettua mediante un solo orifizio, si abbassa a 0,548 quando l'acqua scappa da due orifizj nello stesso tempo, o per i due furi di una pescaja.

Il calcolo del riempimento di una pescaja si divide in due parti, poichè l'acqua contenuta nel canale superiore comincia da sgorgare senza incontrare resistenza, fin da quando le cateratte sono aperte, e va a riempire la parte del sasso della pescaja che forma la sua caduta fino a tanto che essa giunga all'altezza della cateratte, ed è allora solamente che la resistenza esterna si sviluppa. Si deve dunque calcolare il riempimento fino al momento in cui l'acqua si sia elevata al centro dell'orifizio, mediante le formule dello sgorgo nell'aria, e a partire da questo momento fino a quello in cui l'acqua della pescaja raggiunga il livello dell'acqua del canale mediante la formula (s).

33. Quando i due livelli sono variabili, il che succede tutte le volte che i due serbatoj comunicanti sono limitati, che il primo non riceve nuova acqua e che il secondo conserva quella che gli è somministrata, il livello del secondo serbatojo si eleva a misura che quello del primo si abbassa, e lo sgorgo dura fintantochè i due livelli siano i medesimi.

Indichiamo con A e B le sezioni orizzontali rispettive dei due serbatoj, e con S l'area dell'orifizio o la sezione del tubo di comunicazione. Indichiamo inoltre con x l'altezza del livello del primo serbatojo dopo che lo sgorgo ha durato il tempo t e con y l'altezza del livello dell'altro allo stesso momento.

Nell'istante infinitamente piccolo dt che segue il tempo t, l'acqua sale nel secondo recipiente della quantità dy e scende nel primo della quantità dx; il volume d'acqua perduto da questo è dunque Adx e il volume d'acqua guadagnato dall'altro Bdy. Questi due volumi essendo necessariamente uguali, abbiamo

$$Adx = Bdy,$$

ovvero piuttosto

$$Adx = -Bdy \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

poichè x diminuisce quando y e t aumentano.

Ma nel tempo dell'istante infinitamente piccolo dt, possiamo considerare i livelli come costanti, così (n.° 31)

$$Bdy = mS\sqrt{2g\left(x-y\right)} \, . \, dt,$$

e per conseguenza

$$Adx = -mS\sqrt{2g\left(x-y\right)} \, . \, dt \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Integrando l'equazione (1) supponendo che all'origine dello sgorgo o quando $x = H$, $y = h$; viene

$$Ax + By = AH + Bh,$$

il che dà per il valore di y

$$y = \frac{AH + Bh - Ax}{B}.$$

Sostituendo questo valore nell' equazione (2), integrando e determinando la costante mediante la condizione che $x=H$ quando $t=0$, si ottiene definitivamente

$$t=\frac{2A\sqrt{B}}{mS(A+B)\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{B\left(H-h\right)}\right.$$

$$\left.-\sqrt{\left(A+B\right)x-AH-Bh}\right\}\ldots.(t).$$

Se si trattasse di determinare il tempo che il fluido metterebbe per giungere ad uno stesso livello nei due vasi, si farebbe in quest' equazione

$$x=y=\frac{AH+Bh}{A+B},$$

ed essa si ridurrebbe a

$$t=\frac{2AB\sqrt{H-h}}{mS(A+B)\sqrt{2g}}\ldots\ldots(u).$$

Nell' applicazioni, si sceglierà il coefficiente di riduzione, il quale, nella tavola del n.° 10, si riporterà all' altezza dell' orifizio a al carico iniziale H.

34. Sgorgo dei fluidi aeriformi. Quando un gas è compresso in un vaso chiuso, e che si fora un orifizio ad una delle pareti di questo vaso, il gas esce per l' orifizio in un modo analogo allo sgorgo dei fluidi, e con una velocità che dipende dalla differenza delle pressioni interne ed esterne e dal peso specifico del gas. Possiamo dunque riportare lo sgorgo dei gas a quello dei liquidi, considerando il gas che sgorga come un liquido di uguale densità sottoposto ad una pressione equivalente a quella della pressione interna diminuita della pressione esterna; in questo modo, bisogna, per trovare la velocità, calcolare l' altezza della colonna liquida il cui peso sarebbe uguale alla pressione che produce lo sgorgo, poichè questa velocità è uguale a quella che acquisterebbe un corpo pesante cadendo liberamente da quest' altezza. Proponiamoci per esempio di determinare la velocità con la quale dell' aria a 0° di temperatura sgorgherebbe nel vuoto sotto la pressione media dell' atmosfera $0^m,76$. In questo caso, la pressione esterna dell' atmosfera essendo nulla, la pressione che produce lo sgorgo è $0^m,76$; e per conseguenza, l' altezza della colonna liquida, di una densità uguale a quella dell' aria, il cui peso produrrebbe un simile sgorgo, dev' essere all' altezza della colonna di mercurio $0^m,76$, la quale misura la pressione in ragione inversa del rapporto della densità dell' aria alla densità del mercurio. Ora, la densità dell' aria è 0,0013, quella dell' acqua essendo 1, nel mentre che la densità del mercurio è 13,598; così, abbiamo la proporzione

$$x : 0^m,76 = 13,598 : 0,0013,$$

x indicando l' altezza della colonna liquida cercata. Si deduce da questa proporzione:

$$x=\frac{0,76\times13,598}{0,0013}=7949^m,6.$$

Sostituendo questo valore nell' espressione della velocità dovuta all' altezza x,

$$v=\sqrt{2gx},$$

si ottiene

$$v=\sqrt{\left[2\times7949,6\times9,8088\right]}=394^{m},91.$$

L'aria sgorgherebbe dunque nel vuoto, sotto la pressione ordinaria, con una velocità di $394^{m},91$ per secondo.

35. Le densità di uno stesso gas alla medesima temperatura essendo proporzionali alle pressioni, e l'altezze delle colonne liquide, i cui pesi sono equivavalenti alle pressioni, essendo esse stesse proporzionali a queste pressioni, ne resulta che *alla stessa temperatura, e qualunque sia la pressione, uno stesso gas sgorga nel vuoto con la medesima velocità.*

Se lo sgorgo non ha luogo nel vuoto, ma in un altro gas, questa permanenza di velocità non ha più luogo, perchè allora l'altezza della colonna liquida, al peso della quale si riporta la velocità di sgorgo, è proporzionale alla differenza delle pressioni interna ad esterna, e in ragione inversa della densità del gas, la qual densità è essa stessa proporzionale alla somma delle pressioni che il gas prova.

36. Determinando l'altezza della colonna liquida della medesima densità di un gas, e il cui peso è equivalente alla forza che lo farebbe sgorgare nel vuoto, in funzione della densità del gas, della pressione e della temperatura, si ottiene questa formula generale:

$$v=394^{m}\sqrt{\left(\frac{1}{d}\right)\left(1+t\left(000037,5\right)\right)},$$

nella quale v è la velocità dello sgorgo, d la densità del gas a 0^{o} di temperatura, e sotto la pressione media $0^{m},76$, e t la temperatura del gas nel tempo dello sgorgo. Resulta da questa formula, verificata mediante numerose esperienze, che *la velocità di sgorgo dei gas nel vuoto è in ragione inversa della radice quadrata della loro densità, qualunque sia la pressione e la temperatura, purchè questa temperatura sia la stessa in tutto il tempo dello sgorgo.*

37. Nello sgorgo dei gas, la vena fluida si contrae come nello sgorgo dei liquidi, e per calcolare il consumo di gas reale, bisogna impiegare dei coefficienti di riduzione i quali sono, secondo il signor d'Aubusson, 0,65 per gli orifizj in parete sottile, 0,93 per un tubo cilindrico corto, e 0,95 per un tubo conico. Così, S essendo la superficie dell'orifizio, v la velocità data dalla formula precedente, ed m il coefficiente di riduzione, si ha generalmente per il consumo di gas reale D

$$D=mSv.$$

Quando i gas sgorgano per lunghi tubi, le velocità di sgorgo è sempre più piccola che per orifizj in parete sottile. La sua diminuzione è tanto più considerabile quanto è essa stessa più grande, e che i tubi sono più lunghi, e più considerabile quanto è essa stessa più grande, e che i tubi sono più lunghi e più stretti. Non facciamo che indicare di volo queste circostanze, le quali sono state esaminate in altra parte (*Vedi* Pneumatica).

38. Lo sgorgo dei fluidi mediante un orifizio produce sulla parete opposta del vaso una pressione in senso contrario che si può paragonare al ritorno dell'armi a fuoco. Questa pressione è assai grande per imprimere al vaso, se esso è sufficientemente mobile, un moto in una direzione opposta al getto. Le macchine idrauliche dette a reazione son fondate sopra questi fenomeni. Ne abbiamo stabilite le leggi alla parola Reazione.

SGRAVESANDE. *Vedi* Gravesande.

SHARP (Abramo), matematico inglese, nato nel 1651 a Little-Horton nell' Yorkshire, fu aggregato all' Osservatorio reale di Greenwich, ove ajutò Flamsteed nella formazione del suo famoso Catalogo delle stelle fisse. Sharp eseguì pure nel 1689 per questo astronomo la divisione del gran murale che doveva esser collocato a Greenwich, e che, esaminato nel 1786 da Smeaton, fu trovato così esattamente diviso come poteva comportare lo stato delle arti contemporanee. Nel 1717 pubblicò, col titolo di *Geometry improved by A. S. Philomath*, parecchie sue ricerche, tra le quali sono da notarsi un trattato sui poliedri, e un ristretto dei migliori metodi conosciuti pel calcolo dei seni, delle secanti e delle tangenti, nel quale si vede calcolato, per mezzo di due diverse serie, il rapporto esatto fino alla settantesima seconda cifra decimale della circonferenza al diametro. Sharp morì ad Horton nel 1742.

SIDERALE o SIDEREO (*Astron.*). Dicesi *siderale* tuttociò che è relativo alle stelle, dalla parola latina *sidus*, *stella*: così si dice *anno siderale*, *rivoluzione siderale*, *tempo siderale*, ec. *Vedi* Anno, Rivoluzione, Tempo.

SIFONE (*Mecc.*) Strumento semplicissimo e conosciutissimo di cui si fa uso per travasare i liquidi. È formato di un tubo ricurvo di vetro o di metallo, e del quale uno dei bracci è più lungo dell' altro. S' immerge il braccio più corto nel vaso che contiene il liquido, quindi si aspira l' acqua dall' altro braccio: allora lo sgorgo comincia e non termina che quando l' estremità del braccio corto non sia più immersa nel liquido. Alla parola Aria abbiamo già esposto le cause dell' azione di questo strumento.

SIGORGNE (Pietro), fisico e matematico valente, nato nel 1719 a Rambercourt-les-Pots, in Lorena, e morto a Mâcon nel 1809. Gli scritti suoi principali sono: I *Institutions newtoniennes*, *ou introduction à la philosophie de Newton*, Parigi, 1747, 2 vol. in-8; ivi, 1769; II *Astronomiae physicae juxta Newtonis principia breviarium*, ivi, 1748, in-12. È un compendio dell' opera precedente, ed ebbe voga grandissima in Germania, dove è stato ristampato più volte col titolo di *Praelectiones astronomiae Newtonianae ad usum studiosae juventutis*. L' edizione di Tubinga, 1769, è aumentata di una lettera nella quale l' autore risponde alle objezioni di Eulero. Tale opera è stata tradotta in francese, ed inserita dal p. Bertier dell' Oratorio ne' suoi *Principes de physique*. Era stata tradotta in italiano da Giulio Carbonara, Lucca, 1757 in-8.

SIMI (Niccolò), astronomo, nato a Bologna verso l' anno 1530, fece gli studj nell' università di essa città, e fatto venne dottore in filosofia nel 1548. Si applicò soprattutto all' astronomia, che egli professò nelle scuole pubbliche fino all' anno della sua morte, avvenuta il 1 Ottobre 1564. Le sue opere sono: I *Theorica planetarum in compendium redacta*, Venezia, 1551, e Basilea, 1555; II *Ephemerides annorum XV, ab anno Christi* 1554 *ad* 1568, *ad meridianum Bononiae. Canones*, *usum ephemeridum explicantes*, Venezia, 1554; III *Tractatus de electionibus*, *de mutatione aeris*, *de revolutionibus annorum et alia*, ivi, 1554, in-4; IV *Introductorium ac sommarium totius geographiae*, Bologna, 1563, in-8. La libreria dell' Istituto di Bologna conserva alcune opere inedite dello stesso autore. *V.* Fantuzzi, *Notizie degli scrittori bolognesi*, t. VIII, p. 8.

SIMILE. (*Geom.*). Si chiamano *figure simili*, le figure i cui angoli sono uguali, e i lati delle quali sono respettivamente proporzionali. (*Vedi* Similitudine.)

SIMILITUDINE (*Geom.*). Relazione di due figure o di due solidi simili. (*Vedi* Triangolo e Solido.)

SIMMETRICO. (*Geom.*) *Poliedri simmetrici*. Nome dato dal Legendre a due poliedri, i quali, avendo una base comune, sono costruiti similmente l' uno al di sopra del piano di questa base, l' altro al di sotto, con questa condizione che i

vertici degli angoli solidi omologhi siano situati a uguali distanze dal piano della base, sopra una stessa retta perpendicolare a questo piano. Questi poliedri hanno tutte le loro parti simili in senso inverso, come un oggetto e la sua immagine veduti in uno specchio piano.

Due poliedri simmetrici sono uguali in volume. (*Vedi* Legendre Geometria).

Funzione simmetrica. Si dà questo nome in algebra a qualunque funzione di più quantità nella quale queste quantità entrano in un modo talmente identico, che possiamo cangiare il loro ordine o permutarle l'una in luogo dell'altra senza cangiare il valore della funzione. Per esempio, se si hanno le quattro quantità a, b, c, d indipendenti tra esse, la loro somma $a+b+c+d$, la somma delle loro potenze $a^n+b^n+c^n+d^n$, quella dei loro prodotti due a due $ab+ac+ad+bc+bd+cd$, ec., ec. sono *funzioni simmetriche* di queste quattro quantità.

Tutte le funzioni simmetriche delle stesse quantità hanno tra esse delle relazioni determinate, le quali permettono di esprimerle le une per mezzo delle altre, il che somministra diversi teoremi importantissimi per la teoria dell'equazioni. Daremo la deduzione di quello di questi teoremi che possiamo considerare come il fondamento della teoria delle funzioni simmetriche.

Siano m quantità a, b, c, d, e, ec.; indichiamo da una parte con A_1 la loro somma, con A_2 la somma dei loro prodotti *due a due*, con A_3 quella dei loro prodotti *tre a tre*, ec., e in generale con A_μ quella dei loro prodotti μ a μ;

indichiamo da un'altra parte con S_1 la somma di queste medesime quantità, con S_2 la somma delle loro seconde potenze, con S_3, quella delle loro terze potenze, ec., e in generale con S_μ quella delle loro potenze del grado μ.

Premesso ciò, x essendo una quantità variabile qualunque, se formiamo il prodotto di μ fattori $(1+ax)$, $(1+bx)$, $(1+cx)$, ec. avremo evidentemente. (*Vedi* Moltiplicazione n.° 16)

$$\left(1+ax\right).\left(1+bx\right).\left(1+cx\right).\left(1+dx\right)\ldots\text{ ec.} =$$

$$= 1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\text{ ec.}\ldots\ldots\ldots\ldots A_\mu x^\mu .$$

Così, indicando per abbreviare il secondo membro di quest'uguaglianza con X e prendendo i logaritmi naturali,

$$LX = L\left(1+ax\right)+L\left(1+bx\right)+L\left(1+cx\right)+\text{ec.}$$

Ora si ha generalmente, (*Vedi* Logaritmi).

$$L\left(1+z\right)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\text{ec.}$$

e, per conseguenza

$$L\left(1+ax\right)=ax-\frac{1}{2}a^2x^2+\frac{1}{3}a^3x^3-\frac{1}{4}a^4x^4+\text{ec.}$$

$$L\left(1+bx\right)=bx-\frac{1}{2}b^2x^2+\frac{1}{3}b^3x^3-\frac{1}{4}b^4x^4+\text{ec.}$$

$$L\left(1+cx\right)=cx-\frac{1}{2}c^2x^2+\frac{1}{3}c^3x^3-\frac{1}{4}c^4x^4+\text{ec.}$$

$$L\left(1+dx\right)=dx-\frac{1}{2}d^2x^2+\frac{1}{3}d^3x^3-\frac{1}{4}d^4x^4+\text{ec.}$$

$$\text{ec.}=\text{ec.}$$

La somma di questi logaritmi sarà dunque uguale a

$$S_1.x-\frac{1}{2}S_2.x^2+\frac{1}{3}S_3.x^3-\frac{1}{4}S_4.x^4+\frac{1}{5}S_5.x^5-\text{ec.}$$

e si avrà generalmente

$$LX=S_1.x-\frac{1}{2}S_2.x^2+\frac{1}{3}S_3.x^3-\frac{1}{4}S_4.x^4+\text{ec.}$$

uguaglianza che diventa, differenziando i suoi due membri,

$$\frac{dX}{X.dx}=S_1.-S_2.x+S_3.x^2-S_4.x^3+S_5.x^4-\text{ec.}$$

Ma d'altra parte abbiamo, rimettendo in luogo di X il polinomio che esso rappresenta e effettuandone la differenziazione,

$$\frac{dX}{dx}=A_1+2A_2x+3A_3x^2+4A_4x^3+\text{ec.}$$

Ne resulta dunque definitivamente

$$\frac{A_1+2A_2x+3A_3x^2+4A_4x^3+5A_5x^4+\text{ec.}}{1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\text{ec.}}=$$

$$=S_1-S_2.x+S_3.x^2-S_4.x^3+S_5x^4-\text{ec.}$$

Moltiplicando il secondo membro pel denominatore del primo ed uguagliando inseguito i coefficienti delle medesime potenze di x, si ottiene,

$$\left.\begin{aligned}&S_1=A_1\\&S_2=A_1.S_1-2A_2\\&S_3=A_1.S_2-A_2.S_1+3A_3\\&S_4=A_1.S_3-A_2.S_2+A_3.S_1-4A_4\\&\text{ec.}=\text{ec.}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(a).$$

Quest'espressioni importanti sono state date per la prima volta, senza dimostrazione, dal Newton nella sua *Aritm. Universale.*

Se sostituiamo, nel polinomio X, x con $\frac{1}{x}$, e se uguagliamo il resultamento a *zero*, avremo l'equazione

$$x^{\mu}+A_1x^{\mu-1}+A_2x^{\mu-2}+\text{ec.}\ldots.+A_{\mu}=0,$$

le cui radici saranno $-a$, $-b$, $-c$, ec. Così l'espressioni (a) somministrano i mezzi di ottenere successivamente la somma delle radici, quella dei loro qua-

drati, quella dei loro cubi, ec. di un' equazione i cui coefficienti sono conosciuti.

Tutte le altre funzioni simmetriche che possiamo formare con le μ quantità a, b, c, d, ec., si esprimono senza difficoltà con l'aiuto delle somme delle potenze S_1, S_2, S_3; ec., donde resulta il teorema *che qualunque funzione simmetrica razionale e intera delle radici di un' equazione può, senza che si conoscano queste radici, essere valutata per mezzo dei coefficienti dell' equazione.* Non possiamo entrare nelle particolarità di questa teoria della quale il Lagrange ha fatto la base di un metodo per ottenere l'espressione teorica delle radici dell' equazioni del terzo e del quarto grado. Questo metodo, come tutti quelli conosciuti fin qui, non si adattano più all' equazioni del quinto grado.

Prendendo invece delle quantità a, b, c, d, ec., il seguito dei numeri naturali 0, 1, 2, 3, ec., fino ad $m-1$, e esprimendo allora generalmente S_μ con $M(m)_\mu$ e A_μ con $(m\,l\,\mu)$; si ricavano dall' espressioni (a) le relazioni

$$\left(ml1\right)=M\left(m\right)_1$$

$$2\left(ml2\right)=M\left(m\right)_1\cdot\left(ml1\right)-M\left(m\right)_2$$

$$3\left(ml3\right)=M\left(m\right)_1\cdot\left(ml2\right)-M\left(m\right)_2\cdot\left(ml1\right)+M\left(m\right)_3$$

ec. = ec.

delle quali abbiamo fatto uso in altra parte. (*Vedi* FACOLTÀ n.° 18).

SIMPSON (TOMMASO), matematico inglese, celebre per l'importanza e pel numero de' suoi scritti, nacque a Bosworth, nella contea di Leicester, nel 1710. I suoi genitori, poveri industrianti, non poterono procurarli una diligente educazione. Gli fecero soltanto imparare a leggere e a scrivere: ma le felici disposizioni di Simpson e l'attiva sua curiosità, che lo spingeva a leggere tutte le opere che gli capitavano nelle mani, finirono col farlo trionfare di tutti gli ostacoli che si opponevano alla sua istruzione. La sua vita fu agitata, e noi lasceremo ad altri biografi la cura di riferire i diversi aneddoti di cui fu l'eroe. Noi dobbiamo limitarci a dire che giunto a forza di fatica e di merito ad occupare un posto distinto tra i geometri del secolo XVIII, Simpson divenne nel 1743 professore di matematiche all' accademia militare di Woolwich, e due anni dopo, nel 1745, fu fatto membro della Società Reale di Londra. Ei morì il 14 Maggio 1761 a Bosworth, ove poco tempo avanti si era ritirato per consiglio dei medici, nella speranza di ricuperare una salute da troppo assidui e faticosi lavori rovinata. Le sue opere, scritte tutte in inglese, sono: I *Nuovo trattato delle flussioni*, 1737, in-4; è la prima opera alquanto compiuta che l'Inghilterra abbia avuta nella sua lingua sull' analisi infinitesimale diretta ed inversa; II *Trattato della natura e delle leggi della probabilità, colla soluzione compiuta di due problemi importanti, aggiunti alla seconda ediziona della* Dottrina degli azzardi *di Moivre, e di due nuovi metodi per la sommazione delle serie*, 1740, in 4; III *Saggi sopra diversi soggetti curiosi ed importanti nelle matematiche pure ed applicate*, 1740, in-4; IV *Trattato delle annualità e delle tontine, corredato di tavole assai utili per tal genere di calcoli*, 1742, in 8; V *Dissertazioni matematiche sopra diversi soggetti di fisica e di analisi*, 1743, in-4;

VI *Trattato di algebra*, 1745, in-8; e 1755, seconda edizione correttissima; VII *Geometria*, 1747, in-8: nell'edizione susseguente del 1760 ne fece un'opera affatto nuova; VIII *Trigonometria rettilinea e sferica*, 1748: è corredata di un trattatello sulla costruzione dei logaritmi; IX *Dottrina delle flussioni*, 1750, 2 vol. in 8: è un opera ben diversa dal suo primo trattato sullo stesso argomento, ed è commendevolissima pel numero e per la scelta delle applicazioni che vi fa di tale metodo di calcolo; X *Esercizi scelti pei giovani studenti di matematica*, 1752, in-8; XI *Miscellonee*, 1757, in-4: è questa la più importante delle sue opere. Tutti questi scritti attestano senza contrasto le cognizioni e l'attitudine di Simpson per tutti i rami delle matematiche: che se non può esser paragonato con Newton, Eulero, d'Alembert ed altri geometri di primo ordine, fu però un matematico distinto per molte idee semplici e nuove, e per una grande facilità a tentare problemi in apparenza difficilissimi. Le sue opere elementari sono state al suo tempo utilissime, e possono essorlo tuttavia per la diligenza che ha impiegato ad arricchirle di numerosi problemi ottimamente scelti e con somma eleganza risoluti, parte in cui sono estramamente difettose le opere elementari più stimate di oggigiorno. Quanto alle sue ricerche originali, vi si distingueranno sempre numerosi metodi per determinare la somma di varie classi di serie, e quelle che ha fatte sulle rifrazioni astronomiche e sulla determinazione delle aree delle curve per approssimazione.

SIMSON (Roberto), celebre matematico scozzese, nacque nel 1687 a Kirton-Hall nell'Ayrshire. Fu dapprima destinato allo stato ecclesiastico, ma inviato all'università di Glascow, i grandi progressi che vi fece nelle scienze e nelle lettere lo chiamarono ad altri destini. Al pari della maggior parte degli uomini d'ingegno di cui la storia della scienza ci ha lasciato ricordanza, il giovine Simson giunse da se solo alla cognizione delle parti più elevate delle scienze matematiche. Il solo suo maestro fu Euclide, dei cui *Elementi* gli capitò per esso un esemplare nelle mani; il suo talento fece il resto. Divenuto professore di matematiche nel collegio di Christ's-Hospital a Glascow, esercitò per cinquanta anni tali utili ed onorevoli funzioni, e le sue opere hanno giustificato la fama che non cessò di meritarvi. Ei morì il primo Ottobre 1768. La maggior parte delle sue opere o non portano il suo nome o sono state impresse dopo la sua morte dal conte di Stanhope, suo discepolo e suo amico. Gli scritti che generalmente si attribuiscono a Simson sono i seguenti: I *Due proposizioni generali di Pappo*, in cui si contengono parecchi dei porismi di Euclide; tali due proposizioni comparveru da principio nel 1723 nel volume XXXII delle *Transazioni filosofiche*, e furono poi unite ad altre opere di Simson, pubblicate per cura del conte di Stanhope; II *Dell'estrazione delle rodici approssimative dei numeri per serie infinite*, inserita nel 1753 nel vol. LXXIII delle *Transazioni filosofiche*; III *Delle sezioni coniche*, 1735, in-4; IV I *loci plani* d'Apollonio ristabiliti, 1749, in-4; V *Elementi di Euclide*, tradotti in inglese, 1756, in-4. Tale edizione non comprende che i primi sei libri, più l'undecimo e il dodicesimo; una terza edizione, pubblicata nel 1767, in-8, contiene inoltre il libro dei *Dati* di Euclide. Tra le opere postume di Simson, che il conte di Stanhope fece stampare a proprie spese nel 1776, indicheremo: 1.° *Sezione determinata di Apollonio*; 2.° *Trattato dei Porismi*; 3.° *Trattato dei logaritmi*. 4.° *Dei limiti delle quantità, dei rapporti e delle proporzioni*; 5.° *Problemi geometrici*. Tra i manoscritti lasciati da Simson al collegio di Glascow, si osserva una edizione delle opere di Pappo, che era pressochè terminata all'epoca della sua morte, e che sarebbe stata certamente pubblicata se avesse vissuto più a lungo.

SINCRONISMO. Espressione che serve a indicare l'identità del tempo nel quale si eseguiscono più cose.

SINCRONO. In meccanica si fa uso di questa parola, che deriva da χρόνος *tempo*, e σὺν *insieme*, per indicare i movimenti che si effettuano contemporeneamente e in uno stesso intervallo di tempo.

Giovanni Bernoulli ha chiamate *curva sincrona* una curva tale che un corpo pesante partendosi dal centro C (*Tav.* CCXXXI, *fig.* 2) e descrivendo successivamente le curve CM, *Cm*, ec. giunga ai punti M, *m*, ec. di questa curva nel medesimo tempo e nel più piccolo intervallo di tempo possibile. Si vedano gli *Atti* di Lipsia per l' anno 1697, e il primo volume delle opere del Bernoulli, impresse a Losanne nel 1743, 4 vol. in-4.

SINODICO (*Astron.*). Nome che si dà alle rivoluzioni dei pianeti considerati relativamente alle loro congiunzione col sole; cosicchè il tempo che scorre tra una congiunzione e la congiunzione successiva si dice *rivoluzione sinodica*. La rivoluzione sinodica della luna dicesi particolarmente *mese sinodico*.

Questa espressione viene dalla parola *sinodo*, derivata da συνοδος *assemblea*, che nell' antica astronomia si dava alle congiunzioni degli astri.

SINTESI. Metodo di ragionamento che procede dal cognito all' incognito per via di composizione, o partendo dagli elementi per giungere al composto. Esso è l' inverso dell' *analisi* che procede per via di decomposizione scendendo dal composto agli elementi (*Vedi* ANALISI).

SIRIO (*Astron.*). Nome della più brillante tra le stelle fisse: è situata nella gola del Cane. Credesi che il suo nome venga da Osiride, divinità egiziana, o dal Nilo che chiamavasi *Siris*. Gli Arabi la chiamano *Aschere*, *Scera*, *Alhabor*, *Alieminii*, *Loelaps*, i Greci σειριος, ἀστροκυων, e i Latini *Canicula*.

SISTEMA. Nel senso generale, questa parola serve a indicare un complesso di cognizioni le cui diverse parti sono tra loro collegate e dipendono da un solo principio. Così si dice: *un sistema di filosofia*, *un sistema di astronomia*, *un sistema di fisica*, ec. Le riunione delle verità che concernono uno degli oggetti dell' umano sapere non merita propriamente il nome di scienza che quando presenta un' *unità sistematica*, ossia quando forma un *sistema*. Il grande scopo della ragione è di scoprire il principio supremo donde derivano i principj generali delle diverse scienze, e di elevarsi alla cognizione del *sistema assoluto* che deve in fine coordinare e stabilire irrevocabilmente tutte le verità. *Vedi* FILOSOFIA.

SISTEMA, *in astronomia*. Gli astronomi indicano col nome di *sistema del mondo* ogni ipotesi sull' ordine e sulle disposizione delle parti che compongono l' universo, per mezzo della quale si possano spiegare i fenomeni o apparenze dei corpi celesti.

I più celebri *sistemi del mondo* sono, nell' ordine cronologico, quello di Tolomeo, quello di Copernico, e quello di Ticone Brahé. Il sistema di Copernico non è più oggi una semplice ipotesi, il cui merito principale consista nel trovarsi d'accordo coi fatti, ma è una verità appoggiata a dimostrazioni geometriche rigorose e che partecipa della sublime certezza delle verità matematiche. Noi passeremo ad esporre in brevi parole le particolarità di questi diversi sistemi.

SISTEMA *di Tolomeo*. Questo sistema, nel quale si suppone la terra immobile nel centro dell' universo, conta tra i suoi aderenti: Platone, Eudosso, Aristotile, Ipparco, Sosigene, Vitruvio, Plinio, e finalmente Tolomeo, del quale ha preso il nome perchè l' *Almagesto* di questo grande astronomo è la sola opera estesamente particolarizzata che sia giunta fino a noi sulle cognizioni astronomiche degli antichi. Tolomeo pone i pianeti intorno alla terra nell' ordine seguente: la Luna ☾, Mercurio ☿, Venere ♀, il Sole ☉, Marte ♂, Giove ♃, e Saturno ♄. Tale è precisamente la disposizione della figura 2 della tavola XLIX.

Deve certamente far maraviglia che Tolomeo abbia rigettata l' ipotesi degli Egiziani, riferita da Macrobio, i quali facevano girare Mercurio e Venere intorno al Sole. Questa ipotesi, rappresentata dalla figura 4 della Tav. XLIX, accordavasi assai meglio della sua colle apparenze del moto di questi pianeti, ed era ancora stata già adottata da molti de' suoi predecessori, nel numero dei quali dobbiamo citare particolarmente Vitruvio, che la espone nel nono libro della sua *Architettura.*

In questo sistema della terra immobile, tutti i pianeti, tutte le stelle fisse, girano in 24 ore intorno alla terra, e non si può a meno di rimanere sbigottiti al considerare l' orribile rapidità dei loro moti, poichè il Sole dovrebbe percorrere più 2500 leghe in un *secondo* di tempo, e Saturno più di 24000 nello stesso intervallo. Quanto alle stelle fisse poste in prossimità dell' equatore, dando loro una parallasse sensibile, dovrebbero percorrere più di *cinquecento milioni di leghe in un secondo!*

Sistema *di Copernico.* Questo sistema, nel quale la terra al pari di tutti gli altri pianeti gira intorno al Sole, era stato intraveduto fino dalla più remota antichità. Alcuni autori, e tra gli altri Diogene Laerzio, attribuiscono a Filolao, discepolo di Pitagora, l' idea di far girare la terra intorno al sole; ma sembra che questo filosofo non abbia avuto che il merito di avere il primo divulgato i precetti del suo maestro, poichè Eusebio afferma positivamente che Filolao era stato il primo ad esporre in scritto il sistema di Pitagora; e Plutarco ci avverte che Timeo di Locri, discepolo anch' esso di Pitagora, aveva seguito la stessa opinione, e che quando diceva che i pianeti erano animati, e dava loro il nome di differenti misure del tempo, intendeva » che il sole, la luna e gli altri pia» neti servissero a misurare il tempo colle loro rivoluzioni, e che la terra non » dovesse immaginarsi sempre stabile nello stesso luogo, ma mobile di un moto » circolare, come in seguito è stato insegnato da Aristarco di Samo e da Se» leuco. » *Plutarco*, Tom. 2.

Questo Aristarco di Samo viveva circa trecento anni prima di G. C. e fu uno dei principali difensori del moto della terra. Archimede, nel suo libro *De Arenario*, dice » che Aristarco, scrivendo su questo soggetto contro alcuni filosofi » del suo tempo, aveva posto il sole immobile nel centro di un' orbita ch'ei fa» ceva percorrere dalla terra con un moto circolare ». *Vedi* Aristarco.

Teofrasto ha scritto una storia dell' astronomia che non è giunta fino a noi, ma nella quale si trovava riferito, dietro una citazione di Plutarco, che Platone, che aveva sempre insegnato che il sole girava intorno alla terra, erasi ritrattato da questo errore in un'età più avanzata, e si era pentito di non aver posto il sole nel centro del mondo, come il luogo il più conveniente per questo astro, e di avervi invece collocato la terra contro l' ordine il più naturale e più ragionevole.

Non può dubitarsi che tutte queste idee non servissero di guida a Copernico, quando si accinse a stabilire un sistema del mondo più conforme alla realtà dei fenomeni di quello di Tolomeo, combattuto ogni giorno dalle osservazioni, ma sarebbe veramente un riconoscere assai male ciò che la scienza deve a quest' uomo sommo, se si supponesse, come i suoi detrattori hanno voluto far credere, che egli non abbia fatto altro che riprodurre una verità da lungo tempo caduta nell' oblio. Vi è certamente una gran distanza tra l' opinione degli antichi spogliata di ogni prova, e che può soltanto considerarsi come una specie di presentimento della verità, e gl' immensi lavori coi quali Copernico imprese a darle una solida base: poichè, come già abbiamo detto altrove, Copernico consacrò l' intera sua vita alle osservazioni e agli studj che dovevano confermare le sue scoperte, e non imprese ad esporne il vasto edifizio, che quando ebbe acquistato la certezza completa della loro verità. *Vedi* Copernico.

I principali caratteri del sistema di Copernico essendo stati già riferiti all' articolo biografico di questo grande astronomo, ci limiteremo ad esporne qui sotto il riepilogo alla parole SISTEMA SOLARE.

SISTEMA *di Ticone Brahé*. Considerando come un fortissimo argomento contro il sistema di Copernico alcuni passi delle Sacra Scrittura che male aveva interpretati, Ticone Brahé, osservatore troppo perspicace per non vedere che tutti i pianeti girano intorno al sole, cercò di sostituire al sistema di Tolomeo, ormai non più sostenibile, un sistema misto nel quale ei pone la terra immobile nel centro dell' universo. Intorno alla terre gira prima la luna, e poi il sole, intorno al quale girano Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno, in orbite che vengono seco lui trasportate nello spazio nella sua rivoluzione intorno alla terra. Questo sistema, che soddisfaceva benissimo a tutti i movimenti apparenti allora conosciuti, esige la stessa rapidità di movimenti che abbiamo riscontrata nelle ipotesi di Tolomeo e degli Egiziani, e d' altronde non può più oggi accordarsi col fenomeno dell' *aberrazione delle stelle*. *Vedi* ABERRAZIONE.

SISTEMA SOLARE. Sotto questo nome s' indice oggigiorno il complesso del sole e dei corpi che gli sono subordinati. Il sole è posto nel centro di gravità del sistema, intorno al quale ruota egli stesso, mentre tutti i pianeti circolano intorno a lui nell' ordine seguente: 1 *Mercurio*, 2 *Venere*, 3 *la Terra*, 4 *Marte*, 5 *Vesta*, 6 *Giunone*, 7 *Cerere*, 8 *Pallade*, 9 *Giove*, 10 *Saturno*, 11 *Urano*. Si consultino nel Dizionario gli articoli concernenti questi diversi pianeti.

Oltre il loro moto di traslazione intorno al sole, tutti i pianeti hanno un moto di rotazione intorno a se stessi: questo moto di rotazione della terra, la cui durata è di 24 ore, produce l' apparenza di un moto generale, in senso inverso, di tutta la sfera celeste, come il moto di traslazione della terra produce quelle apparenze bizzarre delle stazioni e delle retrogradazioni dei pianeti, che gli antichi astronomi non sapevano spiegare, e di cui non potevano rendersi conto che per mezzo di un sistema complicato di circoli eggirantisi gli uni negli altri senza motivo alcuno ragionevole. *Vedi* TERRA.

Le diverse particolarità del *Sistema solare* formano il soggetto di molti articoli, ai quali dobbiamo rimandare il lettore (*Vedi* ATTRAZIONE, GRAVITÀ, PIANETA, PERTURBAZIONE, COMETA, *ec.*). Il complesso del sistema solare è rappresentato nella Tavola L, fig. 1.

SIZIGIE (*Astron.*). Espressione che serve per indicare la congiunzione e l'opposizione di un pianeta col sole. Questo termine però si usa più particolarmente parlando della luna. *Vedi* LUNA.

SNELL (WILLEBRORD DA ROYEN), in latino *Snellius* e in italiano *Snellio*, geometra, nato nel 1591 a Leida, dimostrò fin dalla puerizia une inclinazione particolare alle scienze esatte, e suo padre, professore di matematiche, coltivò con somma cura le di lui felici disposizioni. Non più tardi del 1608, in età di diciassette anni, il giovine Snellio osò tentare di riparare alla perdite dell' opera di Apollonio: *De sectione determinata*, e pubblicò il suo saggio col nome di *Apollonius Batavus*. Tale lavoro, cui ha fatto porre in dimenticanza quello infinitamente migliore di Roberto Simpson, fece molto onore al suo autore, che prese nuovo ardore e proseguire i suoi studj. Nel 1610 prese a spiegare i tre primi libri dell' *Almagesto* di Tolomeo: ma desideroso di ampliare e perfezionare le sue cognizioni, si recò in Germania ove per tre anni ascoltò le lezioni di Kepplero e di Ticone Brahé. Tornato in patria, prese possesso della cattedra rimasta vacante pel ritiro di suo padre, e dedicossi con assiduità senza pari ai doveri del suo ufizio e alla composizione di opere utili alla scienza. Ma il lavoro eccessivo logorò ben presto la sua salute: primaticce infermità lo assalsero, e dopo aver languito parecchi anni, morì il 31 Ottobre 1626 in età di 35 anni.

Una morte così immatura impedì che Snellio traesse a termine molti lavori che aveva cominciati, e che certamente fatto lo avrebbero annoverare tra i primi geometri. Sembra che egli sia stato il primo a trovare la vera legge della refrazione. Vossio e Huygens lo affermano; ma l'opera, nella quale rende conto della sua scoperta, rimase incompluta e non fu pubblicata. Una gloria che non gli si può contrastare quella si è di avere il primo determinata la grandezza della terra colla misura geometrica ed astronomica di un arco del meridiano. L'inesattezza del suo resultato dipenda unicamente dalla imperfezione degli strumenti che allora si usavno, ma egli entrò il primo nella buona strada; poichè la misura che si attribuiva a Fernel, e che Lalande provò non essere stata mai eseguita, non era meno strana nell'invenzione che grossolana nall'applicazione che si era preteso di averne fatta. Oltre un'edizione delle *Observationes Hassiacae*, e delle traduzioni latine di alcune opere di Stevino, di Ludolfo Van Ceulen o Keulen, si ha di Snellio: I *De re nummaria liber singularis*, Anversa, 1613, in-8; ristampato nel tom. IX del *Thesaur. antiq. graec.* del Gravio. È una esposizione del sistema monetario degli antichi; II *Eratosthenes Batavus de terrae ambitus vera quantitate suscitatus*, Leida, 1617, in-4. E questa l'opera più importante di Snellio. Ei vi tratta del vero metodo da usarsi per misurare un arco del meridiano. Il suo libro servì poi a tutti gli astronomi che presero a determinare la grandezza e la figura della terra. Snellio si era ingannato nell'applicazione che ne aveva fatta per misurare la distanza terrestre e l'arco celeste fra le città di Alemaer e di Bergopzoom: ma riconobbe da se stesso il proprio errore, e lo rettificò con nuovi calcoli, che doveano comparire in una seconda edizione dell'opera sua, che la morte gl'impedì di pubblicare (*Vedi* Delambre, *Storia dell'astronomia moderna*, tom. II, pag. 92-119); III *Descriptio cometae, qui anno 1618 mense Novembri primum effulsit*, ivi, 1619, in-4; IV *Cyclometricus, seu de circuli dimensione*, ivi, 1621, in-4: in quest'opera sulla misura approssimativa del circolo tiene una via più breve di quella di Van Keulen. Si consulti il ragguaglio che ne dà Montucla nella sua *Storia delle matematiche*, tom. II, pag. 8; V *Typhis Batavus, sive de cursu navium et re navali*, ivi, 1624, in-4; VI *Doctrinae triangulorum canonicae, libri quatuor*, ivi 1627.

SOBIESCHI (Scudo di) (*Astron.*). Costellazione introdotta da Evelio per riunire alcune stelle informi tra l'Aquila, Antinoo e il Serpentario, in vicinanza del Capricorno.

SOFFIETTO. (*Mec.*). Si chiamano *soffietti* o *macchine soffianti* gli organi meccanici che producono un getto d'aria atmosferica per animare la combustione. Altre volte non ci si serviva nelle ferriere e altre fucine metallurgiche che di gran soffietti ordinari che tutti conoscono; attualmente s'impiegano generalmente corpi di tromba nei quali si muove uno stantuffo di cuoio che scaccia l'aria davanti ad esso. Nei paesi dove si hanno delle cadute d'acqua, ci serviamo ancora di trombe; queste sono cilindri verticali e vuoti, leggermente ristretti un poco al di sotto della loro parte superiore, e nei quali cade una corrente d'acqua che trasporta con essa l'aria nel cilindro per piccole aperture praticate al di sotto della contrazione. Quest'aria si sprigiona in una cassa inferiore dove terminano i cilindri, e v'esce per un orifizio o apertura disposta a quest'effetto. (*Vedi* il *Trattato della composizione delle macchine* del Borgnis, e l'*Idraulica degli ingegneri* del d'Aubusson).

SOLARE (*Astron.*). Dicesi adiettivamente di tutto ciò che si riferisce al sole. *Vedi* Sole, Sistema e Anno.

SOLE (*Astron.*). Corpo sferico, luminoso di per se stesso, centro e regolatore dei movimenti della terra e degli altri pianeti.

Il sole, sorgente principale del calore e della luce, e, come tale, principio vi-

vificante di tutto ciò che vegeta, è per noi l' astro il più importante dell' universo. Lo splendore dei suoi raggi non può sostenersi ad occhio nudo, e solo coll' indebolirli mediante l' interposizione di un vetro annerito col fumo si rende possibile il fissare lo sguardo sul suo disco, che allora ci comparisce schiacciato, illusione ottica che il ragionamento tosto rettifica, considerando che questa apparenza è quella di tutti i corpi rotondi veduti da lontano. Projettato al pari della luna sulla volta celeste, e di una grandezza apparente che poco differisce da quella di quest' astro, potrebbe supporsi a prima vista che le distanze di questi due corpi dalla terra fossero presso a poco le stesse; ma sarebbe questa una nuova illusione, poichè la distanza media del sole dalla terra è circa 400 volte più grande di quella della luna.

Esaminando il sole con telescopj di un sufficiente potere amplificante e muniti di vetri colorati, si scorgono spesso sul suo disco dalle macchie nere di una forma irregolare e circondate da una specie di orlo meno oscuro. Nell' intervallo di alcuni giorni ed anco di alcune ore, queste macchie si estendono o si ristringono, cangiano di forma e scompariscono del tutto; le più permanenti sembra che attraversino il disco del sole, nel qual tragitto impiegano circa 14 giorni. Giunte ad uno degli orli, cessano di esser visibili per ricomparire di nuovo dopo 14 giorni dall'orlo opposto. Questi fenomeni hanno fatto congetturare al celebre Herschel che il corpo del sole sia un globo solido e oscuro, del quale alcune parti sono messe allo scoperto per effetto delle oscillazioni dell'atmosfera luminosa che lo circonda. In questa ipotesi, che sembra la più probabile, le macchie sarebbero il corpo stesso del sole, e il loro moto apparente di traslazione sarebbe cagionato dalla rotazione del sole sul suo asse. Infatti, dietro appunto l' osservazione della durata uniforme del cammino di rivoluzione di tutte le macchie, si è potuto concludere che il sole gira intorno a se stesso in un periodo di 25 giorni e mezzo. Delambre lo fissa a 25^g,01154, ma non si può considerare questa durata come determinata con una precisione sufficiente.

Qualche volta, in vicinanza delle grandi macchie, si osservano dei larghi spazi coperti di righe ben distinte, più luminose del resto del disco. Queste righe o strisce diconsi *facule* o *fiaccole*, e si possono considerare come le creste più elevate di flutti immensi nelle regioni luminose dell' atmosfera. Frequentemente si formano delle macchie in vicinanza delle fiaccole dove per l' avanti non ve n' erano. Le macchie però non si manifestano che in una regione che non si estende a più di 30 gradi da una parte e dall' altra dell' equatore solare, il che si accorderebbe perfettamente coll' origine che loro abbiamo assegnata, poichè necessariamente, verso l' equatore solare, ove il moto di rotazione è più rapido, l' atmosfera deve provare più violente agitazioni.

Gli antichi, il cui ingegno ha in molti punti preceduto il cammino lento delle osservazioni, poterono ben congetturare che i pianeti fossero corpi simili alla terra e com' essa suscettibili di essere abitati da esseri organizzati; ma siccome credettero che il sole fosse un globo di fuoco, l'immaginazione sola dei loro poeti potè popolarlo di creature che non avevano tipi analoghi tra noi. Al presente, se questa questione non può per anche ammettere una soluzione soddisfacente, è almeno possibile il discuterla senza paradosso, poichè le osservazioni moderne ci forniscono degli argomenti di cui la ragione può valersi.

Così, ammettendo con Laplace che il globo stesso del sole sia infiammato, e che le macchie non siano che vaste eruzioni di fuochi, meschinamente rappresentate dai nostri vulcani terrestri, non si può certamente supporre che esso contenga alcun essere vivente nelle condizioni della nostra fisica esistenza, pure, se si crede di poter concludere, da certe induzioni non prive di fondamento, che la temperatura della superficie visibile del sole sia più elevata di tutte le

temperature prodotte artificialmente, o per mezzo di fornelli, o per mezzo di processi chimici, non ne consegue necessariamente che il corpo del sole debba essere in uno stato d'ignizione. E, secondo l'ipotesi di Herschel, che opina che gli strati luminosi dell'atmosfera siano sostenuti molto al di sopra del globo o nocciolo solido da altri strati nebulosi separati anch'essi dal nocciolo da un mezzo elastico trasparente, può essere che gli strati nebulosi siano dotati di un potere reflettente abbastanza considerabile da proteggere il corpo del sole contro i raggi emanati dagli strati superiori. Allora nulla impedirebbe di supporre che questo globo immenso fosse abitato da esseri, se non interamente simili all'uomo, viventi almeno di una vita subordinata alle condizioni della sua.

L'ipotesi che nella massa del sole regni un calore intensissimo è quella che generalmente si crede la più probabile, sul fondamento che per la poca densità di questa massa le parti centrali debbono essere dotate di una grande elasticità per poter resistere all'enorme pressione che esse sostengono. Nulladimeno si potrebbe objettare che la densità conosciuta del sole è soltanto la densità media del suo globo solido e della sua atmosfera riuniti insieme, e che per conseguenza se questa atmosfera, come tutto porta a crederlo, si estende ad una gran distanza intorno al globo, questo globo, le cui dimensioni ci sono ignote, può avere una densità eguale ed anco superiore a quella della terra.

Tutte queste ipotesi, dobbiamo pur dirlo, sono assai più ingegnose che solidamente fondate, ed affatto gratuitamente si ammette l'alta temperatura dell'atmosfera luminosa del sole; poichè dal semplice fatto che i raggi solari producono il calore è tutt'altro che filosofico il concludere che il sole stesso sia in ignizione. L'acqua che infiamma la calce viva, l'acido solforico che accende gli zolfini detti *ossigenati*, non sono in ignizione, eppure sviluppano il principio ignoto del fuoco che contengono questi corpi. La maggior parte delle combinazioni chimiche ci presentano egualmente il fenomeno di non produzione di calore intensissimo, quantunque la temperatura delle sostanze che agiscono le une sulle altre sia bassissima. Lo stesso è dei raggi solari: i fatti ci dimostrano chiaramente che essi concorrono allo sviluppo del calore combinandosi col principio calorifico dei corpi esposti alla loro azione, ma che a questa combinazione sola è dovuto il calore, calore che non si deve attribuire unicamente più ai raggi che ai corpi stessi. Queste considerazioni debbono farci rigettare come un giuoco dell'immaginazione tutti i calcoli in forza dei quali si è creduto di poter determinare la temperatura dei diversi pianeti; temperatura che si è supposta più o meno elevata secondo la loro distanza dal sole, mentre bastano certe modificazioni nelle atmosfere per rendere la temperatura media uniforme in tutto il nostro sistema. Ma abbandoniamo le regioni delle ipotesi fisiche che non offrono ancora nulla di veramente soddisfacente, ed entriamo in quelle dei fenomeni astronomici, nei quali tutto è preciso, determinato e certo.

Il sole è il più grande di tutti i corpi celesti: il suo volume supera di molto la somma dei volumi di tutti i pianeti: posto nel fuoco comune delle ellissi che questi corpi descrivono intorno a lui, oltre il suo moto di rotazione intorno a se stesso, sembra che abbia un moto di traslazione nello spazio che lo porta, insieme con tutto il nostro sistema planetario, verso la costellazione di Ercole. *Vedi* STELLA.

La rivoluzione annua della terra intorno al sole produce ai nostri sguardi un moto apparente del sole nell'orbita stessa percorsa dalla terra. Infatti, per effetto del moto della terra, il raggio condotto dal nostro occhio al centro del sole cambia continuamente di direzione e va a segnare nel cielo, tra le stelle, un punto sempre diverso. Così, nel corso di una intera rivoluzione, il sole ci sembra descrivere da occidente in oriente un circolo massimo della sfera ce-

leste. Oltre un tal moto apparente, che si dice il *moto proprio del sole*, quest' astro ne ha un altro che non è di questo più reale, ed è il *moto comune*, dovuto alla rotazione della terra sul suo asse, in virtù del quale tutti i corpi celesti sembrano girare in 24 ore da oriente in occidente intorno alla terra. Si può rappresentare la combinazione di questi due moti, immaginando un circolo che giri intorno al suo centro da destra a sinistra, mentre un punto che sia posto sulla circonferenza e che partecipi così del moto generale, si muove da sinistra a destra su questa circonferenza.

Siccome tutte le apparenze dovute al moto della terra sono per l' astronomia e per le scienze che ne dipendono più importanti del moto reale in se stesso, si ha particolarmente bisogno di conoscere ad ogni istante il *luogo del sole*, vale a dire il punto del circolo massimo della sfera celeste nel quale si projette il raggio visuale condotto dal nostro occhio al suo centro: perciò nella teoria si suppone che la terra sia immobile nel fuoco dell' ellisse che il sole sembra percorrere, e si attribuiscono a quest' ultimo le celerità variabili del moto del nostro globo. In ciò che saremo per dire ci conformeremo a quest' uso.

L' orbita del sole non è il circolo massimo della sfera celeste che quest' astro sembra percorrere, quantunque quest' orbita e questo circolo massimo siano ambedue indicati collo stesso nome di *ecclittica*; ma è un' ellisse situata nel piano di questo circolo massimo e della quale è facile il determinare le dimensioni relative, poichè il diametro apparente del sole variando continuamente di grandezza, ne consegue che questo astro ora è più vicino ed ora più lontano dalla terra. Si sa che il massimo diametro apparente (*Vedi* DIAMETRO) è di 32' 35'',6, e il minimo di 31' 31''. Così, per le leggi dell' ottica, le distanze dovendo essere in ragione inversa dei diametri, se si esprime con D la massima distanza del sole dalla terra e con d la minima distanza, si avrà

$$D : d :: 32' \, 35'',6 : 31' \, 31'' :: 1955'',6 : 1891''.$$

Rappresentando dunque la massima distanza col numero 1955,6, la minima sarà rappresentata col numero 1891, e, per conseguenza, la distanza media con 1923,3; perciò, dividendo questi tre numeri per 1923,3, si avranno, per rappresentare respettivamente la massima, la media e la minima distanza, i numeri

$$1,016794; \quad 1,000000; \quad 0,983206;$$

donde è facile concludere che prendendo per *unità* il semiasse maggiore dell' ellisse, il semiasse minore è eguale a 0,999858, e l' eccentricità a 0,016794.

I rapporti precedenti nulla ci fanno conoscere sulle dimensioni assolute dell' orbita solare: l' osservazione sola della parallasse può determinare queste dimensioni. Ora si sa (*Vedi* PARALLASSE) che questa parallasse è di circa 8'',6, e che per conseguenza la distanza media del sole dalla terra non è minore di 23984 volte la lunghezza del semidiametro della terra, il che fa presso a poco 34000000 di leghe.

Questo dato importante ci fa pure conoscere le dimensioni proprie del sole, che si deducono immediatamente dalla sua distanza e dall' angolo che misura il suo diametro apparente. Il diametro reale di quest' astro è di 320000 leghe, o presso a poco quattro volte la distanza della terra dalla luna. Se si vogliono confrontare le dimensioni del sole con quelle della terra, si trova che il semidiametro solare sta al semidiametro della terra come $111\frac{1}{2}$ sta ad 1, e che il volume di questo globo prodigioso equivale a 1384472 volte quello della terra.

La massa del sole dedotta dalla teoria dell'attrazione è rappresentata col numero 354936, prendendo per unità la massa della terra. Confrontando la massa col volume, si ottiene la *densità* (*Vedi* DENSITÀ); così la densità media del sole sta a quella della terra come 0,2543 sta ad 1.

Se l'orbita del sole fosse un circolo che esso percorresse con un moto uniforme, basterebbe conoscere la sua situazione in un istante determinato per potere calcolare quindi la sua situazione in un altro istante qualunque, ma ciò non è così: l'osservazione dimostra che la celerità del suo moto è continuamente variabile: per esempio, verso il 31 Dicembre, percorre esso in 24 ore un arco di 1° 1′ 9″,9, mentre verso il 1° Luglio l'arco che descrive nello stesso intervallo di tempo non è che di 0° 57′ 11″,5. Bisogna dunque saper ridurre il moto medio ed uniforme che si prende per base dei calcoli al moto reale e diseguale; il che si eseguisce con facilità dagli astronomi per mezzo delle *tavole del sole*, ove sono considerate tutte le circostanze di questi diversi moti. Noi non possiamo adesso che indicare la base di queste operazioni.

La durata di una rivoluzione completa del sole, o il suo ritorno alla stessa stella, che dicesi l'*anno sidereo*, essendo di 365^g, 6^{or} 9′ 10″, 75 = 365^g,2563744, e in questa durata percorrendo esso i 360° dell'ecclittica, se la sua celerità fosse uniforme, percorrerebbe in un giorno 59′ 8″, 33022. Così, conoscendo il *luogo* del sole sull'ecclittica in un giorno determinato, che dicesi l'*epoca*, si avrebbe il suo luogo in tutti i giorni seguenti, aggiungendo 59′ 8″, 33022 per ogni giorno decorso dall'*epoca* in poi. Il luogo ottenuto in questa guisa non sarebbe il vero, ma servirebbe a trovarlo riducendo il moto circolare al moto ellittico, come abbiamo esposto alla parola ANOMALIA. Ordinariamente si prende per *epoca* la mezzanotte, in tempo medio, che separa un anno dal precedente, vale a dire la mezzanotte che termina il 31 Dicembre e principia il 1° Gennajo. Conosciuto il luogo medio, o, come comunemente suol dirsi, la *longitudine media* del sole per questo istante, è facile calcolare la longitudine media per un giorno ed un istante qualunque dell'anno. La differenza tra la longitudine media e la longitudine del perigeo dell'orbita solare dà l'*anomalia media*, e quest'ultima serve a calcolare l'*equazione del centro*, che è ciò che deve aggiungersi alla longitudine media per ottenere la *longitudine vera*. È inoltre necessario il tener conto delle perturbazioni che resultano dall'attrazione dei pianeti, perturbazioni i cui effetti sono calcolati nelle tavole.

Secondo gli ultimi lavori di Bessel, la *longitudine media del sole nell'epoca*, per l'anno 1800+T, è

$$280^\circ\ 23'\ 35'',525 + 27'',605844.T + 0'',0001221805.T^2 - M,$$

ove T indica il numero degli anni decorsi dopo il 1800: per avere M, si divide T per 4, e secondochè il resto della divisione è

0 si ha M =	59′	8″,	330
1 . . . . . M =	14	47	,083
2 . . . . . M =	29	34	,166
3 . . . . . M =	44	21	,248

Secondo lo stesso astronomo, per l'*epoca* dell'anno 1800+T, la longitudine del perigeo è

$$279^\circ\ 30'\ 8'',39 + 61'',5171.T + 0,0002037965.T^2.$$

Quando si conosce la *longitudine vera*, si può calcolare facilmente l'*ascensione retta* e la *declinazione*, risolvendo un triangolo sferico. *Vedi* ASCENSIONE RETTA *e* DECLINAZIONE.

Per tutto ciò che può aver rapporto col sole si consultino gli articoli Anno, Calendario, Eclittica, Equazione del tempo, Parallasse, Passaggio, Perturbazione, Sistema e Zodiacale.

SOLIDITÀ. (*Geom.*) Quantità di spazio occupata da un corpo solido. La *solidità* e il *volume* sono la stessa cosa.

SOLIDO. (*Geom.*) Estensione che ha le tre dimensioni, vale a dire, lunghezza, larghezza e profondità. L'estensione di tutti i corpi è quella che spesso s'indica ancora col nome di *solidi*.

Ogni corpo terminato da superficie piane si chiama *solido poliedro*, ovvero semplicemente *poliedro* (*vedi* questa parola).

Di tutti i solidi terminati tanto da superficie curve, quanto da combinazioni di superficie piane e curve, la geometria elementare non considera che i tre corpi chiamati *cono*, *cilindro* e *sfera*. (*Vedi* Queste parole).

Si chiama generalmente *solido di rivoluzione* qualunque solido che possiamo concepire come generato dalla rivoluzione di un piano di figura qualunque intorno di un asse. Il *cono retto*, il *cilindro retto* e la *sfera* sono solidi di rivoluzione.

Per paragonare i solidi tra loro e determinare di quanto uno è più grande dell'altro, è necessario di riportargli ad un' *unità* di misura; ora quest'unità dev'essere essa stessa un *solido*, poichè l' *unità* presa per termine di paragone tra due grandezze qualunque della stessa natura non potrebbe essere di una natura differente da quella di queste grandezze. Mediante ciò per misurare le *linee* si sceglie *una linea*, e per misurare le *superficie* si sceglie *una superficie*. (*Vedi* Area).

La grandezza di un solido, ovvero ciò che si chiama il suo *volume* non può dunque essere determinato che paragonando questo volume ad un altro *volume* conosciuto. Il *cubo* (*vedi* questa parola) essendo il corpo regolare il più semplice e il più facile a costruire, è quello che si è scelto per servire di *unità*. Così si conosce il *volume* di un corpo quando si conosce il numero delle volte che esso può contenere il cubo preso per unità. Nel sistema metrico l'unità del solidi è il *cubo* il cui lato ha un *metro* di lunghezza.

Per render conto di questo modo di misurare, supponiamo che il cubo *abcdefg* (*Tav.* XLVII, *fig.* 11) sia l'unità di misura, e proponiamoci di determinare il *volume* del parallelepipedo rettangolo ABCDEFG. Il lato *ef* del cubo essendo l'*unità lineare*, portiamo quest'unità sopra i lati EF ed FG della base del parallelepipedo, e supponiamo per maggior semplicità che il lato EF contenga 6 volte esattamente quest'unità e che il lato FG la contenga 5 volte. La superficie della base del parallelepipedo sarà dunque espressa da $6\times5=30$, vale a dire, essa conterrà 30 volte la base del cubo, poichè questa base non è altra cosa che l'unità di superficie (*Vedi* Area). Sopra ciascuno dei 30 quadrati della base EG possiamo situare il cubo *abcdefg*; e se si suppone ancora che l'altezza AE contenga 4 volte l'unità lineare, diviene evidente che soprapponendo sopra questi 30 cubi un altro strato di 30 cubi, poi sopra questo secondo un terzo, e sopra questo terzo un quarto, questi 4 strati di 30 cubi riempiranno esattamente il parallelepipedo, dimodochè il suo volume sarà rappresentato dal numero $4\times30=120$. Se il cubo *abcdefg* ha per lato un *metro*, o se questo è il metro cubo, il volume del parallelepipedo sarà dunque di 120 metri cubi.

Ritornando ora sopra l'operazione che ci ha fatto trovare il numero 120, vediamo che è stato necessario misurare, con l'unità lineare, le tre dimensioni del parallelepipedo; cioè, la sua lunghezza EF, la sua larghezza FG e la sua altezza o profondità AE; che moltiplicando la lunghezza per la larghezza ab-

biamo ottenuto il numero che esprime l'*area* della base e che finalmente moltiplicando quest'*area* per l'altezza, ne è resultato il numero che esprime il *volume*. Possiamo dunque concluderne, poichè il ragionamento sarebbe lo stesso qualunque sieno i numeri che esprimono le misure lineari delle dimensioni, che *il volume di un parallelepipedo rettangolo è uguale al prodotto delle sue tre dimensioni*, ovvero, ciò che significa la stessa cosa, *al prodotto delle sua base per la sua altezza.*

Si dimostra in tutti i trattati di geometria, che:

1.° *Un parallelepipedo qualunque è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo dello medesimo altezza e di base equivalente.*

2.° *Un parallelepipedo qualunque può sempre essere decomposto in due prismi triangolari equivalenti tra loro.*

3.° *Due prismi qualunque, le cui basi sono equivalenti e che hanno la medesima altezza sonò equivalenti.*

4.° *Due piramidi qualunque, che hanno basi equivalenti e altezze uguali sono equivalenti.*

5.° *Una piramide triangolare è il terzo di un prisma dello stesso base e dello stesso altezza.*

Resulta da queste proposizioni, che:

1.° *Il volume di un parallelepipedo qualunque è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

2.° *Il volume di un prisma qualunque è uguale al prodotto dello suo base per la suo altezza.*

3.° *Il volume di una piramide qualunque è uguale al terzo del prodotto della suo base per la sua altezza.*

Il cilindro potendo considerarsi come un prisma la cui base è un poligono regolare di un numero infinito di lati, e il cono come una piramide la cui base è ugualmente un poligono di un numero infinito di lati, possiamo ancora concludere, che:

1.° *Il volume di un cilindro è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

2.° *Il volume di un cono è uguale al terzo del prodotto della sua base per la sua altezza.*

Quanto al volume della sfera, *vedi* Sfera.

Quello che precede è sufficiente per misurare il volume di qualunque solido che si può decomporre in prismi o in piramidi. I corpi le cui superficie sono ripiene d'ineguaglianze offrono difficoltà spesso insuperabili, ma ci contentiamo di ottenere approssimativamente i loro valori quasi nella stessa maniera che si ottiene l'area delle figure i cui perimetri sono assai irregolari. Ciò non ostante quando si tratta di corpi piccolissimi, i fisici impiegano il seguente processo, capace di una grande esattezza.

Si prepara un vaso cubico o parallelepipedo di una capacità conosciuta, e dopo averlo ripieno d'acqua vi s'immerga il corpo che si vuole misurare. Nell'immersione questo corpo scaccia un volume d'acqua uguale al suo; per conseguenza misurando il volume di quest'acqua così scacciata, si ha quello del corpo. Ma siccome sarebbe difficile di raccogliere esattamente l'acqua che cade dal vaso, si dispone ordinariamente sopra la sua altezza una scala le cui divisioni fanno conoscere il volume dell'acqua compreso tra il fondo e ciascuna di esse; così dopo avere immerso il corpo e fatto sgorgare l'acqua che esso sposta, si ritira, il che cagiona un voto uguale in volume all'acqua sgorgata, ovvero al corpo. Le divisioni della scala fanno conoscere immediatamente questo volume.

Per la misura del volume dei solidi di rivoluzione, *vedi* Cubatura.

Solidi simili. Si chiamano così quei solidi che hanno volumi differenti, ma nei quali la relazione dei limiti è la stessa. Per esempio due poliedri son *simili* quando tutti i loro angoli solidi sono uguali e similmente situati, e che le loro facce situate nella stessa maniera son simili.

Due poliedri simili stanno tra loro come i cubi dei loro lati omologhi.

Angolo solido. Si chiama così quello che è formato mediante l'intersezioni di più piani i quali s'incontrano in uno stesso punto; questo punto è il vertice dell'angolo. I diversi vertici dei poliedri sono angoli solidi.

Due angoli solidi sono uguali quando gli angoli dei piani che gli formano sono uguali e similmente disposti.

Problema solido. Gli antichi davano questo nome ai problemi i quali conducono ad un'equazione del terzo grado.

SOLITARIO (*Astron.*). Nome di una costellazione meridionale introdotta da Lemonnier. È situata tra la Libbra, lo Scorpione e l'Idra.

SOLSTIZIO (*Astron.*). Istante in cui il sole giunge ad uno dei tropici e si trova così alla massima sua distanza dall'equatore. Gli si dà questo nome da *solis statio*, perchè, quando il sole è in prossimità del tropico, sembra che per alcuni giorni avanti e dopo il solstizio conservi presso a poco la stessa altezza meridiana. Il solstizio avviene due volte l'anno, cioè il 20 o il 21 Giugno, giorno in cui il sole giunge al primo punto del segno del Cancro, che è il punto in cui l'ecclittica tocca il tropico del Cancro, e il 20 o 21 Dicembre, giorno nel quale il sole giunge al primo punto del Capricorno, che è il punto dell'ecclittica che tocca il tropico del Capricorno (*Vedi* Armillare). Il primo di questi giorni è il principio della nostra estate; perciò il solstizio che le corrisponde dicesi *Solstizio d'estate*. L'altro è quello in cui comincia il nostro inverno, ed è perciò che il solstizio corrispondente prende il nome di *Solstizio d'inverno*. Il contrario ha luogo per gli abitanti dell'emisfero meridionale.

SOLUZIONE. Nelle *matematiche* ciò equivale alla risposta ad una questione o alla quantità che soddisfà alle condizioni di un problema. (*Vedi* Risoluzione).

SOMMA (*Alg.*). Nome che si dà alla quantità resultante da un'*addizione*. (*Vedi* Questa parola).

SOMMATORIO. *Calcolo sommatorio* (*Alg.*). Ramo dell'algebra che ha per oggetto la somma dei termini delle serie e di tutte le altre quantità, qualunque esse siano, legate mediante una legge.

I primi tentativi di sommazione delle serie sembra si debbano al Leibnizio; si trovano in una memoria intitolata: *De proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus*, e pubblicata negli *Atti di Lipsia* dell'anno 1682. Questo scritto, il quale contiene un gran numero di proposizioni curiosissime ed in quell'epoca molto inattese, attirò l'attenzione dei geometri sopra questo genere di ricerche la cui importanza si fece sentire sempre più, e bentosto il *calcolo sommatorio* fu considerato come un ramo particolare della scienza dei numeri. Esso non è in realtà che un'applicazione del *calcolo delle differenze*. Esporremo in questo punto le sue leggi generali.

1. Siano A, B, C, D, ec., un seguito di quantità qualunque che possiamo sempre considerare come i valori successivi di una funzione Fx, nella quale x riceve successivamente uno stesso accrescimento ξ, vale a dire, supponiamo che ponendo $Fx = A$, si abbia $F(x+\xi) = B$, $F(x+2\xi) = C$, ec. Mediante la natura della differenze (*vedi* questa parola), avremo dunque

$$\Delta Fx = \Delta A = F(x+\xi) - Fx = B - A$$
$$\Delta F(x+\xi) = \Delta B = F(x+2\xi) - F(x+\xi) = C - B$$
$$\Delta F(x+2\xi) = \Delta C = F(x+3\xi) - F(x+2\xi) = D - C$$
$$\text{ec.} = \text{ec.}$$

Prendendo l' accrescimento ξ negativo, avremo

$$\Delta A = A - B$$
$$\Delta B = B - C$$
$$\Delta C = C - D$$
$$ec. = ec.$$

e, per conseguenza

$$\Delta^2 A = \Delta A - \Delta B = A - 2B + C$$
$$\Delta^2 B = \Delta B - \Delta C = B - 2C + D$$
$$\Delta^2 C = \Delta C - \Delta D = C - 2D + E$$
$$ec. = ec.$$

$$\Delta^3 A = \Delta^2 A - \Delta^2 B = A - 3B + 3C - D$$
$$\Delta^3 B = \Delta^2 B - \Delta^2 C = B - 3C + 3D - E$$
$$\Delta^3 C = \Delta^2 C - \Delta^2 D = C - 3D + 3E - F$$
$$ec. = ec.$$

È facile, proseguendo queste costruzioni, di concludere, per induzione, che generalmente si ha

$$\Delta^n A = A - nB + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} C - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} D + ec. \ldots\ldots (a).$$

Questa formula è identica con quella che abbiamo dato (*Vedi* DIFFERENZA) per l' espressione della differenza dell' ordine n di una funzione qualunque φx.

2. La formula (a), sussistendo per tutti i valori dell' esponente n, diventa, quando si fa n negativa

$$\Delta^{-n} A = A + nB + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} C + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} D + ec.$$

serie la quale non può arrestarsi se non che nel caso in cui i termini A, B, C, ec. svaniscono in qualche parte da loro stessi.

Ora, la *differenza* a esponente negativo Δ^{-n} è la stessa cosa della *somma* dell' ordine n; così l' espressione precedente può ancora scriversi

$$\Sigma^n A = A + nB + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot C + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot D + ec. \ldots\ldots (b),$$

il che forma il teorema fondamentale donde dipendono tutte le sommazioni di un ordine qualunque.

Così per trovare la somma della serie che forma il secondo membro dell' espressione (b), non rimane che da trovare l' espressione generale della differenza $\Delta^n A$ e mettere in quest' espressione $-n$ invece di $+n$. Supponiamo, per esempio, che le quantità A, B, C, D, ec., siano i termini consecutivi della progressione geometrica $1, r, r^2, r^3, r^4$, ec., avremo

$$A = 1$$
$$\Delta A = 1 - r$$
$$\Delta^2 A = 1 - 2r + r^2 = (1-r)^2$$
$$\Delta^3 A = 1 - 3r + 3r^2 - r^3 = (1-r)^3$$
$$ec. = ec.$$

e, in generale

$$\Delta^n A = (1-r)^n.$$

Facendo n negativo, viene dunque

$$\left(1-r\right)^{-n}=1+nr+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}r^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}r^3+\text{ec.}$$

Questo è infatti ciò che dà il binomio dal Newton, nel caso dell' esponante negativo.

3. Facendo $n=1$, le precedenti espressioni danno

$$\Delta^{-1}A=\Sigma A=A+B+C+D+E+\text{ec.}$$

vale a dire che $\Delta^{-1}A$ è la somma di tutti i termini proposti. Si otterrà dunque questa somma facendo $n=-1$ nell' espressione della differenza $\Delta^n A$.

4. x indicando l' indice dei termini di una serie, si chiama *termine sommatorio* una funzione di x, nella quale, se si sostituisce successivamente in luogo di x i numeri 1, 2, 3, 4, ec., avremo la somma di altrettanti termini quante unità avrà il numero sostituito.

Esprimiamo con A_0, A_1, A_2, A_3, ec., i termini successivi di una serie il cui *termine generale* è A_x, e per S_x il termine sommatorio di questa serie. S_x dev' essere tale, che si abbia

$$S_0=A_0$$
$$S_1=A_0+A_1$$
$$S_2=A_0+A_1+A_2$$
$$\text{ec.}=\text{ec.}$$
$$S_x=A_0+A_1+A_2+\text{ec.}\ldots\ldots+A_x.$$

Mediante questa costruzione si ha

$$S_{x-1}+A_x=S_x;$$

donde

$$A_x=S_x-S_{x-1}=\Delta S_{x-1},$$

l' accrescimento di cui dipende la differenza essendo 1.

Prendendo la *somma* o l' integrale dell' uguaglianza

$$\Delta S_{x-1}=\Delta x,$$

si ottiene

$$S_{x-1}=\Sigma A_x+\textit{costan.}$$

e per conseguenza

$$S_x=\Sigma A_x+A_x+\textit{costan.}\ldots\ldots(c).$$

Così, il *termine sommatorio* si ottiene aggiungendo all' integrale finito del termine generale questo termine generale esso stesso.

5. Applichiamo questo teorema alla somma dei numeri figurati. Si cominci dalla serie dei numeri naturali

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \text{ec.}$$

x indicando sempre l' *indice* dei termini, il termine generale è semplicemente x, e si ha

$$S_x=\Sigma x+x+\textit{cost}.$$

Ora, l' accrescimento delle differenze di x essendo l' unità, Σx è uguale a

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$ (*Vedi* Integrale n.° 3), donde

$$S_x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + x = \frac{x(x+1)}{2},$$

non vi è bisogno di aggiungere costante perchè Σx dev'essere o quando $x = o$.

Questo termine sommatorio è nello stesso tempo il termine generale della serie dei numeri triangolari

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \text{ec.}$$

poichè si sa che questa serie è formata dalle somme successive dei termini della serie dei numeri naturali. Otterremo dunque il termine sommatorio della serie dei numeri triangolari, facendo nella formula (*c*)

$$A_x = \frac{x(x+1)}{2}.$$

Così, siccome (Integrale, n.° 3)

$$\Sigma \frac{x(x+1)}{2} = \frac{1}{2}\Sigma\left[x^2+x\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2.3}x^3 - \frac{1}{2.3}x,$$

avremo in questo caso

$$S_x = \frac{1}{2.3}x^3 - \frac{1}{2.3}x + \frac{x(x+1)}{2} = \frac{x^3 - x + 3x(x+1)}{2.3}$$

$$= \frac{x(x+1)(x+2)}{2.3}$$

non vi è bisogno di aggiungere costante;

Questo termine sommatorio è ancora il termine generale della serie dei *numeri piramidali* o della serie dei numeri figurati del terz' ordine; così, operando nella stessa maniera, troveremo per il termine sommatorio di quest' ultima serie l' espressione

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{2.3.4},$$

donde potremo dedurre il termine sommatorio della serie dei numeri figurati del quart' ordine, e così di seguito.

Per considerare questo problema in tutta la sua generalità, proponiamoci di trovare il termine sommatorio della serie il cui termine generale è

$$\frac{x(x+i)(x+2i)\ldots\ldots(x+(\mu-1)i)}{1.2.3\ldots\ldots\mu},$$

ovvero semplicemente

$$\frac{x^{\mu|i}}{1^{\mu|1}}$$

servendoci della notazione delle fattorielle. (*Vedi* Questa parola.)

Abbiamo veduto (*Vedi* DIFFERENZA) che la differenza progressiva dell' ordine n della fattoriella $x^{\mu|i}$ è

$$\Delta^n x^{\mu|i} = \mu^{n|-1} \cdot i^n \cdot \left(x+ni\right)^{\mu-n|i}$$

facendo dunque in quest' espressione $n=-1$, otterremo

$$\Delta^{-1} x^{\mu|i} = \Sigma x^{\mu|i} = \frac{(x-i)^{\mu+1|i}}{(\mu+1)i}.$$

Così, indicando semplicemente il termine sommatorio cercato con S, verrà

$$S = \frac{(x-i)^{\mu+1|i}}{1^{\mu|1} \cdot (\mu+1)i} + \frac{x^{\mu|i}}{1^{\mu|1}}$$

$$= \frac{(x-i)^{\mu+1|i} + (\mu+1)i \cdot x^{\mu|i}}{(\mu+1)i \cdot 1^{\mu|1}}.$$

Ma

$$\left(x-i\right)^{\mu+1|i} = \left(x-i\right) \cdot x^{\mu|i}$$

e

$$x-i+\left(\mu+1\right)i = x+\mu i;$$

di più

$$\left(x+\mu i\right) \cdot x^{\mu|i} = x^{\mu+1|i};$$

dunque si ha definitivamente

$$S = \frac{x^{\mu+1|i}}{1^{\mu+1|1} \cdot i} + cost.$$

Facendo in quest' espressione $i=1$, e sopprimendo la costante, se ne deducono i termini sommatori di tutte le serie dei numeri figurati. Basta perciò di fare μ uguale al numero che indica l' ordine della serie.

6. Possiamo dedurre assai facilmente dalle precedenti formule il termine sommatorio della serie generale inversa di quella che abbiamo trattato, vale a dire, della serie il cui termine generale è

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \ldots \mu}{x(x+i)(x+2i) \ldots (x+(\mu-1)i)} = \frac{1^{\mu|1}}{x^{\mu|1}}.$$

Infatti, se in $\Sigma x^{\mu|i}$ si fa μ negativo, si ottiene

$$\Sigma x^{-\mu|i} = \Sigma \frac{1}{(x-\mu i)^{\mu|i}} = \frac{(x-\mu i)^{-\mu+1|i}}{(1-\mu)i},$$

ovvero

$$\Sigma \frac{i}{(x-\mu i)^{\mu|i}} = \frac{1}{(1-\mu)i \cdot (x-\mu i)^{\mu-1|i}},$$

sostituendo in quest' ultima espressione x ad $x-\mu i$, essa diventa

$$\Sigma\frac{1}{x^{\mu|i}}=\frac{1}{(1-\mu)i\,.\,x^{\mu-1|i}}.$$

Il termine sommatorio della serie proposta è dunque

$$-\frac{1^{\mu|1}}{(\mu-1)i\,.\,x^{\mu-1|i}}+\frac{1^{\mu|1}}{x^{\mu|i}},$$

ovvero, riducendo

$$S=-\frac{1^{\mu|1}}{(\mu-1)i\,.\,(x+i)^{\mu-1|i}}+cost.\;\ldots\ldots(d).$$

Se si trattasse della serie inversa dei numeri *triangolari* o figurati del *second' ordine*.

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{21},\ \frac{1}{28},\ \text{ec.}\ \ldots\ldots(e),$$

si farebbe $\mu=2$, e si avrebbe, i essendo uguale ad 1,

$$S=-\frac{1\,.\,2}{x+i}+cost.,$$

siccome si deve avere $S=1$ quando $x=1$, si ha per determinare la costante l'equazione

$$1=-\frac{1\,.\,2}{1+1}+cost.$$

donde, $cost.=2$, e per conseguenza

$$S=2-\frac{2}{x+1}=\frac{2x}{x+1}.$$

Questo valore di S riducendosi a 2 quando x è *infinito*, si vede che la somma totale della serie (e) prolungata all' infinito è uguale a 2.

L' espressione (d) non può servire per ottenere il termine sommatorio della serie inversa dei numeri naturali, poichè facendoei $\mu=1$, il fattore $1-1$ rende la sua parte variabile *infinita*. Questa serie è del genere delle serie dette *armoniche*, le quali sono state considerate per lungo tempo come lo scoglio dell'Algebra. Indicheremo un processo ingegnosissimo, dovuto al Kramp, con l' aiuto del quale si può sommare tutte le serie armoniche.

7. Consideriamo la serie delle fattorielle continuata fino all' infinito

$$a^{n|r}+\left(a-r\right)^{n|r}+\left(a-2r\right)^{n|r}+\left(a-3r\right)^{n|r}+\text{ec.}\;\ldots,$$

essa ci somministrerà le differenze,

$$\Delta\ a^{n|r}=a^{n|r}-\left(a-r\right)^{n|r}=nr\quad a^{n-1|r}$$

$$\Delta^2\,a^{n|r}=n\left(n-1\right)r^2\,.\,a^{n-2|r}$$

$$\Delta^3\,a^{n|r}=n\left(n-1\right)\left(n-2\right)r^3\,.\,a^{n-3|r}$$

ec. = ec.

Così, siccome bisogna in questo caso considerare come *negativo* l'accrescimento delle differenze, avremo in generale, (*vedi* DIFFERENZA)

$$\Delta^{\mu} a^{n|r} = n^{\mu|1} r^{\mu} \cdot a^{n-\mu|r}$$

e facendo $\mu = 1$

$$\Sigma a^{n|r} = \frac{a^{n+1|r}}{(n+1)r},$$

vale a dire, mediante il n.° 3, che la somma della serie in questione è, all' infinito, uguale ad

$$\frac{a^{n+1|r}}{(n+1)r}.$$

Se si considera il termine del posto $m+1$, cioè $(a-mr)^{n|r}$ come il primo della serie, la somma dei termini di questa stessa serie da $(a-mr)^{n|r}$ fino all' infinito sarà

$$\frac{(a-mr)^{n+1|r}}{(n+1)r}$$

e, per conseguenza, la somma degli m primi termini, vale a dire, da $a^{n|r}$ fino ad $(a-mr+r)^{n|r}$ inclusivemente, sarà uguale a

$$\frac{1}{(n+1)\cdot r}\left[a^{n+1|r} - \left(a-mr\right)^{n+1|r}\right].$$

Se vogliamo prendere l' ultimo termine per il primo e rovesciare la serie, si farà $a-mr+r=x$, donde $a=x+mr-r$, e si avrà per la somma della serie delle m fattorielle

$$x^{n|r} + \left(x+r\right)^{n|r} + \left(x+2r\right)^{n|r} + \text{ec.} \ldots + \left(x+mr-r\right)^{n|r},$$

l' espressione

$$\frac{1}{(n+1)\cdot r}\left[\left(x+mr-r\right)^{n+1|r} - \left(x-r\right)^{n+1|r}\right].$$

se si sostituisce invece di $+n$, $-n$, quest' espressione diventa

$$\frac{1}{(n-1)\cdot r}\left[\frac{1}{(x-nr)^{n-1|r}} - \frac{1}{(x-nr+mr)^{n-1|r}}\right],$$

ed essa rappresenta allora la somma delle m frazioni da $\frac{1}{(x-nr)^{n|r}}$, fino a

$\frac{1}{(x-nr+mr-r)^{n|r}}$.

Sostituendo $x-nr$ con la sola lettera x ed $n-1$ con n, si troverà dunque la somma delle m frazioni, da $\frac{1}{x^{n+1|r}}$ fino a $\frac{1}{(x+mr-r)^{n+1|r}}$, uguale a

$$\frac{1}{nr}\left[\frac{1}{x^{n|r}} - \frac{1}{(x+mr)^{n|r}}\right] \ldots \ldots (f),$$

e se si prende la somma di queste stesse frazioni all' infinito, essa avrà un valore

finito, uguale a

$$\frac{1}{nr \cdot x^{n|r}},$$

con questo metodo si trova, per esempio, che la somma delle frazioni . . .
$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \frac{1}{9.11} +$ ec. . . . all'infinito, è uguale ad $\frac{1}{2}$.

Che la somma delle frazioni $\frac{1}{1.4.7} + \frac{1}{4.7.10} + \frac{1}{7.10.13} + \frac{1}{10.13.16} +$ ec. all'infinito, è uguale a $\frac{1}{24}$. E così delle altre.

Quando si fa n infinitamente piccola le fattorielle diventano semplici potenze e si ha da une parte la *serie armonica*,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+r} + \frac{1}{x+2r} + \frac{1}{x+3r} + \frac{1}{x+4r} + \text{ec.}$$

nel mentre che dall' altra l' espressione (f) dei suoi m primi termini si complica di una quantità infinitamente piccola e diventa indeterminata. Ma abbiamo veduto (FACOLTÀ) che indicando con $\Delta \frac{r}{x+mr}$ la serie

$$\theta_1 \cdot \frac{r}{x+mr} + \theta_2 \cdot \frac{r^2}{(x+mr)^2} + \theta_3 \cdot \frac{r^3}{(x+mr)^3} + \text{ec.},$$

nella quale θ_1, θ_2, θ_3, ec., sono i numeri del Bernoulli, si ha

$$(x+mr)^{\frac{1}{\infty}|r} = 1 - \frac{1}{\infty}\left\{\text{Log}(x+mr) - \Delta \frac{r}{x+mr}\right\}.$$

Avremo dunque ancora, supponendo n infinitamente piccola,

$$\frac{1}{x^{n|r}} = 1 - n \,\text{Log}\, x + n \cdot \Delta \frac{r}{x},$$

$$\frac{1}{(x+mr)^{n|r}} = 1 - n \,\text{Log}(x+mr) + n \Delta \frac{r}{x+mr},$$

e sostituendo questi valori in (f), n sparirà. Con questo mezzo si ottiene per la somma degli m primi termini della serie armonica, l' espressione

$$\frac{1}{r}\left\{\text{Log}\left(\frac{x+mr}{x}\right) + \Delta \frac{r}{x} - \Delta \frac{r}{x+mr}\right\} \ldots\ldots (g).$$

La funzione Δy uguale a $\theta_1 . y + \theta_2 . y^2 + \theta_3 . y^3 +$ ec. è convergentissima quando y è una piccola frazione, e bastano i due primi termini $\theta_1 y + \theta_2 y^2$ ovvero $\frac{1}{2} y\left(1 + \frac{1}{6} y\right)$ per trovarne il valore con sette decimali esatti, purchè $\frac{1}{y}$ sia un poco al di sotto di $\frac{1}{10}$. Così per rendere questo processo perfettamente applicabile a tutti i casi, bisognerà calcolare a parte i *dieci* primi termini della

serie, aggiungerli insieme, e quindi impiegare le formule per trovare la somma degli altri. (*Vedi* Kramp. *Aritm. universale*).

Per esempio, si domanda la somma dei *cento* primi termini della serie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{ec.}$$

La somma dei 10 primi termini di questa serie è $2+\frac{2341}{2520}$, ovvero, in decimali, 2,9289682, rimane dunque da determinare la somma dei 90 altri.

Si farà in (g) $x=11$, $r=1$ e $m=90$, e la somma domandata sarà espressa da

$$\text{Log}\left(\frac{101}{11}\right)+\Delta\frac{1}{11}-\Delta\frac{1}{101},$$

eseguendo i calcoli, si trova

$$\text{Log } 101 = 4,6151205$$
$$\text{Log } 11 = 2,3978953$$
$$\Delta\frac{1}{11} = 0,0461433$$
$$\Delta\frac{1}{101} = 0,0045124.$$

La somma dei termini da $\frac{1}{11}$ fino ad $\frac{1}{100}$, sarà dunque 2,2588561 e quella di tutti i cento termini 5,1878243.

Giovanni Bernoulli è stato il primo a dimostrare in un modo ingegnosissimo, ma indiretto, che la somma totale di questa serie è una quantità infinitamente grande, verità che altri geometri inseguito hanno dimostrato con altri processi e che allora sembrava assai singolare in quanto che i termini vanno continuamente diminuendo. Per ottenere la somma di tutta la serie armonica continuata all'infinito, bisogna nell'espressione (g) fare $m=\infty$, e siccome allora $\log\left(\frac{x+mr}{x}\right)$ diventa *infinito*, nel mentre che $\Delta\frac{r}{x}$ rimane *finito* e che $\Delta\frac{r}{x+mr}$ sparisce, ne resulta che *la somma di tutta la serie armonica*, *continuata all' infinito*, *è essa stessa infinita*.

8. Nelle precedenti formule, il valore numerico della funzione indicata da Δy è ancora tanto difficile ad ottenersi quanto quello della *somma* della quale esso fa parte, quando y non è minore di $\frac{1}{10}$ e l'espressione (g) sarebbe di un debole soccorso se essa stessa non offrisse un processo semplicissimo per trovare Δy qualunque sia y. Infatti m essendo un numero arbitrario, se facciamo $m=10$ e $x=1$ e che indichiamo con S la somma delle 10 frazioni

$$1+\frac{1}{1+r}+\frac{1}{1+2r}+\frac{1}{1+3r}+\text{ec.}\ldots\ldots+\frac{1}{1+9r},$$

avremo in virtù della formula (g)

$$S=\frac{1}{r}\left\{\text{Log}\left(1+10r\right)+\Delta r-\Delta.\frac{r}{1+10r}\right\};$$

donde si deduce

$$\Delta r = rS - \text{Log}\left(1+10r\right) + \Delta \frac{r}{1+10r} \dots\dots (h).$$

Così, r essendo un numero qualunque; otterremo il valore numerico di Δr con l'aiuto di quello di $\Delta \frac{r}{1+10r}$, che i due primi termini della serie bastano per far conoscere con sette decimali.

Proponiamoci per esempio di trovare con sette decimali il valore numerico di $\Delta 4$. Cominceremo dal cercare la somma delle 10 frazioni $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}$ ec. .... $\frac{1}{37}$ il che ci darà $S = 1,6262894$. Calcoleremo inseguito

$$\Delta \frac{r}{1+10r} = \Delta \frac{4}{41} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{41} \cdot \left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{41}\right) = 0,0495737,$$

quanto al logaritmo naturale di $1+10r$ o di 41, le tavole danno $3,7135821$; così rostituendo tutti questi valori in (h) otterremo definitivamente

$$\Delta 4 = 2,8411592.$$

Cerchiamo per secondo esempio il valora numerico di $\Delta \frac{4}{3}$. Abbiamo mediante la formula (h),

$$\Delta \frac{4}{3} = \frac{4}{3} S - \text{Log} \frac{43}{3} + \Delta \frac{4}{43}.$$

Il prodotto $\frac{4}{3} S$ indicando la somma delle frazioni $\frac{4}{3} + \frac{4}{7} + \frac{4}{11} +$ ec. fino a $\frac{4}{39}$, eseguendo i calcoli verrà

$$\frac{4}{3} S = 3,4135340.$$

Troveremo di più

$$\Delta \frac{4}{43} = 0,0472327;$$

e riceome

$$\text{Log} \frac{43}{3} = 2,6625878,$$

ne resulterà

$$\Delta \frac{4}{3} = 0,7981789.$$

9. Se la somma di qualunque seria armonica, continuata all'infinito è una quantità infinitamente grande, la *differenza* di due serie armoniche continuate tutte due all'infinito, è sempre una quantità finita. Infatti mediante quello che

precede, la somma della serie

$$\frac{r}{x}+\frac{r}{x+r}+\frac{r}{x+2r}+\frac{r}{x+3r}+\text{ec.}\ldots\ldots \text{all'infinito, è}$$

$$\operatorname{Log}\left(\frac{x+mr}{x}\right)+\Delta\frac{r}{x}$$

e quella di qualunque altra serie armonica

$$\frac{r}{z}+\frac{r}{z+r}+\frac{r}{z+2r}+\frac{r}{z+3r}+\text{ec.}\ldots\ldots \text{all' infinito,}$$

è ugualmente

$$\operatorname{Log}\left(\frac{z+mr}{z}\right)+\Delta\frac{r}{z}$$

m essendo una quantità infinitamente grande.

La differenza di queste due serie, ovvero la serie

$$\frac{r}{x}-\frac{r}{z}+\frac{r}{x+r}-\frac{r}{z+r}+\frac{r}{x+2r}-\frac{r}{z+2r}+\text{ec.}\ldots\ldots (i),$$

avrà dunque per somma

$$\operatorname{Log}\frac{z}{x}+\Delta\frac{r}{x}-\Delta\frac{r}{z}\ \ldots\ldots (k).$$

Quest' ultima espressione dà i mezzi di determinare con la massima facilità i valori numerici di un' infinità di funzioni importantissime. L' applicheremo solamente alla serie osservabile,

$$\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}+\text{ec.}\ldots,$$

la quale esprime, come si sa, il rapporto del diametro alla circonferenza.

Abbiamo in questo caso $r=4$, $x=1$, $z=3$; così, sostituendo in (k), e indicando con π il valore della serie, avremo

$$\pi=\operatorname{Log}3+\Delta 4-\Delta\frac{4}{3},$$

ma

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}3&=1,0986123\\ \Delta 4&=2,8411592\\ \hline &\ \ 3,9397715\\ \Delta\frac{4}{3}&=0,7981789\\ \hline\end{aligned}$$

donque, $\pi=3,1415926.$

Bisognerebbe aggiungere insieme quasi 10000 termini di questa serie per ottenere un valore di π tanto approssimato quanto quello che resulta da questo calcolo tanto semplice.

10. Soltanto in un piccolissimo numero di casi possiamo ottenere tanto il *termine sommatorio*, quanto la *somma* intera delle serie sotto una forma finita, e si vede che il problema generale della sommazione della serie si riporta a quello

di trasformare una serie data, la cui convergenza non è tanto rapida, per far conoscere il suo valore numerico, in un'altra serie equivalente, la cui convergenza sia tale che basti un piccolo numero di termini per determinare il suo valore. Considerato sotto questo aspetto, questo problema è stato l'oggetto dei lavori dei più gran geometri, e siamo rincrescenti di non poter far conoscere le trasformazioni ingegnose con l'aiuto delle quali il Moivre, lo Stirling, l'Eulero, l'Herman, il Maclauriu, il Lagrange, il Simpson e tanti altri lo hanno risoluto in diverse maniere. Ciò non ostante crediamo dover esporre un processo singolarmente comodo, dovuto all'Hutton, per sommare per approssimazione, tutte le serie i cui termini sono alternativamente positivi e negativi.

Dopo aver ridotto in frazioni decimali dieci a dodici termini della serie proposta, si scrivono gli uni al di sotto degli altri, il che forma una colonna che indicheremo con A. Accanto della colonna A se ne formi una seconda B composta successivamente del primo termine A, della somma dei due primi, di quella dei 3 primi e così di seguito. Quindi si formi una terza colonna C prendendo il medio proporzionale aritmetico tra i due primi termini di B, poi tra il secondo a il terzo e così di seguito. Una quarta colonna D si compone, nella stessa maniera, dei medj proporzionali tra i termini di C. Finalmente si continua queste colonne di medj proporzionali, fino a tanto che si giunga ad un'ultima colonna la quale non conterrà più che un termine. Quest'ultimo termine sarà un valore approssimato della serie, tanto più esatto quanto avremo impiegato un maggior numero di termini. Con dieci o dodici solamente si ottengono ordinariamente sei a sette decimali esatti. Ecco un esempio di questi calcoli sopra la serie trattata di sopra:

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{ec.}$$

che è una di quelle la cui convergenza è la più lenta. Sappiamo d'altra parte che $\frac{1}{4}\pi = 0,785398$ . . . . .

A	B	C	D
+ 1,000000	1,000000		
		0,833333	
— 0,333333	0,666667		0,800000
		0,766667	
+ 0,200000	0,866667		0,780952
		0,795238	
— 0,142857	0,723810		0,787301
		0,779365	
+ 0,111111	0,834921		0,784415
		0,789466	
— 0,090909	0,744012		0,785969
		0,782473	
+ 0,076923	0,820935		0,785037
		0,787601	
— 0,066667	0,754268		0,785640
		0,783680	
+ 0,058824	0,813092		0,785228
		0,786776	
— 0,052632	0,760460		0,785540
		0,784305	
+ 0,047690	0.808150		

Giunti alla colonna D, l' ispezione dei suoi valori fa conoscere che gli ultimi termini convergono più rapidamente che i primi; allora per abbreviare, ci contenteremo di continuare il calcolo sopra i quattro ultimi termini, il che darà

D	E	F	G
0,785037			
	0,785338		
0,785640		0,785386	
	0,785434		0,785397
0,785228		0,785409	
	0,785384		
0,785540			

il valore G è esatto fino al quinto decimale. Prendendo alcuni termini di più e più decimali ci si avvicinerebbe maggiormente.

Questo processo può applicarsi con successo ancora a delle serie divergenti. La celebre serie *hyper-geometrica* dell'Eulero, $1-1+2-6+24-120+$ ec.; trattata in questo modo, dà 0,5963473+ ec. per la sua somma.

11. Consideriamo ora il problema della somma delle serie in un modo più generale, e, indicando con fx una funzione qualunque della variabile x, proponiamoci di trovare la somma o almeno il termine sommatorio del seguito,

$$fx+f\left(x-r\right)+f\left(x-2r\right)+f\left(x-3r\right)+\text{ec.}$$

In virtù del teorema del Taylor, avremo

$$fx=fx$$

$$f\left(x-r\right)=fx-\frac{dfx}{dx}\cdot\frac{r}{1}+\frac{d^2fx}{dx^2}\cdot\frac{r^2}{1\,.\,2}-\text{ec.}$$

$$f\left(x-2r\right)=fx-\frac{dfx}{dx}\cdot\frac{2r}{1}+\frac{d^2fx}{dx^2}\cdot\frac{4r^2}{1\,.\,2}-\text{ec.}$$

$$f\left(x-3r\right)=fx-\frac{dfx}{dx}\cdot\frac{3r}{1}+\frac{d^2fx}{dx^2}\cdot\frac{9r^2}{1\,.\,2}-\text{ec.}$$

$$\text{ec.}=\text{ec.}$$

Se si sottrae ciascuna di quest' uguaglianze da quella che la precede, verrà

$$\Delta fx=\frac{dfx}{dx}\cdot\frac{r}{1}-\frac{d^2fx}{dx^2}\cdot\frac{r^2}{1\,.\,2}+\frac{d^3fx}{dx^3}\cdot\frac{r^3}{1\,.\,2\,.\,3}-\text{ec.}$$

$$\Delta f\left(x-r\right)=\frac{dfx}{dx}\cdot\frac{r}{1}-\frac{d^2fx}{dx^2}\cdot\frac{3r^2}{1\,.\,2}+\frac{d^3fx}{dx^3}\cdot\frac{7r^3}{1\,.\,2\,.\,3}-\text{ec.}$$

$$\Delta f\left(x-2r\right)=\frac{dfx}{dx}\cdot\frac{r}{1}-\frac{d^2fx}{dx^2}\cdot\frac{5r^2}{1\,.\,2}+\frac{d^3fx}{dx^3}\cdot\frac{19r^3}{1\,.\,2\,.\,3}-\text{ec.}$$

$$\text{ec.}=\text{ec.}$$

Operando ugualmente sopra quest' ultime per avere le *seconde differenze*, poi sopra queste per avere le *terze differenze*, e così di seguito, si troverà

riunenendo i resultamenti,

$$\Delta fx = \frac{dfx}{dx}\cdot r - \frac{1}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}\cdot r^2 + \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{d^3fx}{dx^3}\cdot r^3 - \text{ec.}$$

$$\Delta^2 fx = \frac{d^2fx}{dx^2}\cdot r^2 - \frac{3}{3}\frac{d^3fx}{dx^3}\cdot r^3 + \frac{7}{3\cdot 4}\cdot\frac{d^4fx}{dx^4}\cdot r^4 - \text{ec.}$$

$$\Delta^3 fx = \frac{d^3fx}{dx^3}\cdot r^3 - \frac{6}{4}\frac{d^4fx}{dx^4}\cdot r^4 + \frac{25}{4\cdot 5}\cdot\frac{d^5fx}{dx^5}\cdot r^5 - \text{ec.}$$

$$\Delta^4 fx = \frac{d^4fx}{dx^4}\cdot r^4 - \frac{10}{5}\frac{d^5fx}{dx^5}\cdot r^5 + \frac{65}{5\cdot 6}\cdot\frac{d^6fx}{dx^6}\cdot r^6 - \text{ec.}$$

ec. = ec.

Esaminando i numeratori dei coefficienti numerici di quest'espressioni, si vede che essi sono identicamente gli stessi di quelli degli sviluppi delle fattorielle (*Vedi* QUESTA PAROLA) a esponenti negativi, poichè essi sono formati, come quest'ultimi per le differenze prime, seconde, terze, ec., delle potenze dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, ec. Indicando dunque, come l'abbiamo già fatto con (mIn) il coefficiente generale della fattoriella il cui esponte è m, e con $(m'In)$ quello della fattoriella il cui esponente è $-m$, avremo evidentemente per la differenza dell'ordine m della funzione fx l'espressione

$$\Delta^m fx = \frac{d^mfx}{dx^m}\cdot r^m - \frac{(m'I1)}{m+1}\cdot\frac{d^{m+1}fx}{dx^{m+1}}\cdot r^{m+1}$$
$$+ \frac{(m'I2)}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{d^{m+2}fx}{dx^{m+2}}\cdot r^{m+2}$$
$$- \frac{(m'I3)}{(m+1)(m+2)(m+3)}\cdot\frac{d^{m+3}fx}{dx^{m+3}}\cdot r^{m+3}$$
$$+ \text{ec.} \dots\dots\dots\dots\dots$$

Se facciamo $m = -1$, il secondo membro di quest' uguaglianza esprimerà la somma della serie proposta (*vedi* sopra n.° 4), e siccome il coefficiente numerico $(m'In)$ diventa (mIn) quando si cangia il segno di m, troveremo, indicando con S la somma delle funzioni

$$fx + f(x-r) + f(x-2r) + f(x-3r) + \text{ec.}$$

$$S = \frac{1}{r}\int fx\cdot dx + \frac{(1I1)}{0}\cdot fx - \frac{(1I2)}{0\cdot 1}\cdot\frac{dfx}{dx}\cdot r$$
$$+ \frac{(1I3)}{0\cdot 1\cdot 2}\cdot\frac{d^2fx}{dx^2}\cdot r^2$$
$$- \frac{(1I4)}{0\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{d^3fx}{dx^3}\cdot r^3$$
$$+ \text{ec.} \dots\dots\dots\dots \quad (l).$$

Il coefficiente (mIn) diventando zero tutte le volte che m è più piccolo di n

(*vedi* FATTORIELLE n.° 14), le quantità

$$\frac{(1\text{I}1)}{0},\quad \frac{(1\text{I}2)}{0},\quad \frac{(1\text{I}3)}{0},\quad \frac{(1\text{I}4)}{0},\ \text{ec.}$$

sono della specie di quelle che si riducono a $\frac{0}{0}$ per certi valori della variabile che essi contengono, ed esse sono comprese sotto la forma generale

$$\frac{(m\text{I}n)}{m-1};$$

poichè esse sono in realtà ciò che diventa quest' espressione nel caso di $m=1$. Così si otterrà il loro valore, considerando m come la variabile, e differenziando il numeratore e il denominatore (*vedi* DIFFERENZA), il che generalmente darà

$$\frac{d(m\text{I}n)}{dm}.$$

Questi coefficienti numerici sono dunque, nel caso di $m=1$, le derivate differenziali dei coefficienti della fattoriella del grado m. Procederemo alla determinazione di queste derivate differenziali la cui importanza si manifesta ancora in un gran numero di questioni interessanti.

12. Se nello sviluppo della fattoriella generale $a^{m|r}$, facciamo per maggior semplicità $a=1$, avremo (*vedi* FATTORIELLE n.° 14)

$$1^{m|r}=1+\left(m\text{I}1\right)r+\left(m\text{I}2\right)r^2+\left(m\text{I}3\right)r^3+\text{ec.},$$

i coefficienti $\left(m\text{I}1\right)$, $\left(m\text{I}2\right)$, ec., avendo i valori (b) nell' articolo citato.

Considerando m come una quantità variabile, otterremo, differenziando i due membri di quest' uguaglianza,

$$d\left(1^{m|r}\right)=r\,.\,d\left(m\text{I}1\right)+r^2\,.\,d\left(m\text{I}2\right)+r^3\,.\,d\left(m\text{I}3\right)+\text{ec.}\ \ldots\ldots (m).$$

Così, sviluppando in un' altra maniera $d\left(1^{m|r}\right)$ in serie procedente seguendo le potenze progressive di r, il paragone dei coefficienti potrà offrirci l' espressione particolare delle differenziali $d\left(m\text{I}1\right)$, $d\left(m\text{I}2\right)$, ec.

Ora, se indichiamo con n l' accrescimento infinitamente piccolo o la differenziale di m, l' accrescimento corrispondente subito dalla fattoriella, è

$$1^{m+n|r}-1^{m|r};$$

ma abbiamo (FATTORIELLA, n.° 3)

$$1^{m+n|r}=1^{n|r}\,.\left(1+nr\right)^{m|r},$$

il cui primo fattore $1^{n|r}$ si riduce ad $1-n\Delta r$, a motivo di $n=\frac{1}{\infty}$, (*vedi* FA-

COLTA) e di cui il secondo $\left(1+nr\right)^{m|r}$, essendo sviluppato, dà

$$\left(1+nr\right)^{m|r}=\left(1+nr\right)^{m}+\left(m11\right).\left(1+nr\right)^{m-1}.r$$
$$+\left(m12\right)\left(1+nr\right)^{m-2}.r^2+\text{ec.}$$

Osserviamo ora che lo sviluppo della potenza generale $\left(1+nr\right)^{\mu}$ si riduce ai suoi due primi termini $1+\mu nr$, trascurando i termini affetti dalle quantità infinitamente piccole degli ordini superiori n^2, n^3, ec., e, per conseguenza, possiamo dare a quest' ultima uguaglianza la forma

$$\left(1+nr\right)^{m|r}=\left(1+nr\right).\left\{+1\left(m11\right).r+\left(m12\right).r^2+\text{ec.}\right\}$$
$$-mr^2.\left\{\left(m11\right)+2\left(m12\right).r+3\left(m13\right).r^2+\text{ec.}\right\}.$$

Indichiamo ora con Π la serie

$$\left(m11\right)+2\left(m12\right).r+3\left(m13\right).r^2+4\left(m14\right).r^3+\text{ec.}$$

e l' espressione che abbiamo trovato sarà identica con

$$\left(1+nr\right)^{m|r}=\left(1+nr\right).1^{m|r}-mr^2.\Pi$$
$$=1^{m|r}+\left(nr.1^{m|r}-r^2.\Pi\right)m,$$

moltiplicando quest' ultima per $1-n\Delta r$, avremo definitivamente, sottraendo il termine affetto dalla quantità infinitamente piccola del second' ordine n^2,

$$1^{m+n|r}=1^{n|r}.\left(1+nr\right)^{m|r}$$
$$=1^{m|r}+\left(mr.1^{m|r}-r^2\Pi\right)n-n.1^{m|r}.\Delta r.$$

Così, sottraendo $1^{m|r}$ da una parte e dall'altra, e ad n sostituendo dm, otteremo per la differenziale della fattoriella $1^{m|r}$

$$d\left(1^{m|r}\right)=\left(mr.1^{m|r}-r^2.\Pi-1^{m|r}.\Delta r\right).dm.$$

Se invece delle quantità $1^{m|r}$, Π e Δr sostituiamo in quest' espressione i loro sviluppi

$$1^{m|r}=1+\left(m11\right).r+\left(m12\right).r^2+\left(m13\right).r^3+\text{ec.}$$

$$\Pi=\left(m11\right)+2\left(m12\right).r+3\left(m13\right).r^2+4\left(m14\right)r^3+\text{ec.}$$

$$\Delta r=\theta_1.r+\theta_2.r^2+\theta_3.r^3+\theta_4.r^4+\text{ec.}$$

Troveremo, effettuando i prodotti e ordinando secondo le potenze di r,

$$d\left(1^{m|r}\right)=A_1 r\,.\,dm+A_2 r^2\,.\,dm+A_3 r^3 dm+A_4 r^4 dm+\text{ec.}$$

le quantità A_1, A_2, A_3, ec. essendo

$$A_1=m-\theta_1$$

$$A_2=\left(m-1-\theta_1\right).\left(m|1\right)-\theta_2$$

$$A_3=\left(m-2-\theta_1\right).\left(m|2\right)-\theta_2.\left(m|1\right)-\theta_3$$

$$A_4=\left(m-3-\theta_1\right).\left(m|3\right)-\theta_2.\left(m|2\right)-\theta_3\left(m|1\right)-\theta_4$$

$$A_5=\left(m-4-\theta_1\right).\left(m|4\right)-\theta_2.\left(m|3\right)-\theta_3\left(m|2\right)-\theta_4\left(m|1\right)-\theta_5.$$

ec. = ec.

Paragonando quest' ultimo sviluppo col primo (m), si vede che

$$d\left(m|1\right)=A_1\,.\,dm,\quad d\left(m|2\right)=A_2\,.\,dm,\quad d\left(m|3\right)=A_3\,.\,dm,\ \text{ec.}$$

il che dà per la derivata differenziale del coefficiente generale $\left(m\,|\,\mu\right)$, l'espressione

$$\left.\begin{aligned}\frac{d(m|\mu)}{dm}=\left(m-\left(\mu-1\right)-\theta_1\right).\left(m|\mu-1\right)&-\theta_2.\left(m|\mu-2\right)\\ &-\theta_3.\left(m|\mu-3\right)\\ &-\theta_4.\left(m|\mu-4\right)\\ &-\text{ec.}\ \ldots\ldots\ldots\\ &-\theta_{\mu-1}.\left(m|1\right)\\ &-\theta_\mu\end{aligned}\right\}\ldots(n).$$

Non si deve dimenticare che in quest' espressione tutti i termini affetti dai numeri del Bernoulli a indici impari, eccettuato il primo θ_1, spariscono perchè tutti questi numeri sono *zero*.

13. Se nell' espressione precedente facciamo $m=1$, tutte le quantità ($m|1$), ($m|2$), ec. diventano o, e si ha semplicemente

$$\frac{d(m|\mu)}{dm}=-\theta_\mu,$$

donde, in generale,

$$\frac{(1\,I\,\mu)}{0}=-\theta_{\mu},$$

salvo la prima quantità $\frac{(1I1)}{0}$ che è $1-\theta_1=\frac{1}{2}$. Le altre sono dunque

$$\frac{(1I2)}{0}=-\theta_2,\quad \frac{(1I3)}{0}=-\theta_3=0,\quad \frac{(1I4)}{0}=-\theta_4,\quad \frac{(1I5)}{0}=0,$$

$$\frac{(1I6)}{0}=\theta_6,\quad \frac{(1I7)}{0}=0,\quad \frac{(1I8)}{0}=\theta_8,\ \text{ec., ec.}$$

Sostituendo questi valori nella serie sommatoria (l), essa diventa

$$S=\frac{1}{r}\int fx\,.\,dx+\frac{1}{2}fx+\theta_2\,.\,\frac{dfx}{dx}\,.\,\frac{r}{1}+\theta_4\,.\,\frac{d^3fx}{dx^3}\,.\,\frac{r^3}{2\,.\,3}$$

$$+\theta_6\,.\,\frac{d^5fx}{dx^5}\,.\,\frac{r^5}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}+\text{ec.}\ \ldots\ldots\ (o),$$

nella quale i numeri θ_2, θ_4, θ_6, ec. hanno i valori conosciuti

$$\theta_2=+\frac{1}{12},\quad \theta_4=-\frac{1}{120},\quad \theta_6=+\frac{1}{252},\quad \theta_8=-\frac{1}{240},\ \text{ec.}$$

(*vedi* FACOLTÀ, n.° 19).

14. Se si trattasse solamente di ottenere la *somma* degli m primi termini della serie, da fx fino a $f\Big(x-\Big(m-1\Big)r\Big)$, bisognerebbe evidentemente sottrarre da S la somma dei termini da $f\Big(x-mr\Big)$ fino all'infinito; ora quest'ultima somma, indicandola con S′, e facendo per abbreviare $x-mr=z$, è

$$S'=\frac{1}{r}\int fz.dz+\frac{1}{2}fz+\theta_2\,.\,\frac{dfz}{dz}\,.\,\frac{r}{1}+\text{ec.}$$

Così, la somma domandata, o il *termine sommatorio* della serie, può esser messo sotto la forma

$$\frac{1}{r}\left[\int fx\,.\,dx-\int fz\,.\,dz\right]+\frac{1}{2}\left[fx-fz\right]$$

$$+\theta_2\,.\,r\left[\frac{dfx}{dz}-\frac{dfz}{dz}\right]$$

$$+\frac{\theta_4\,.\,r^3}{1\,.\,2\,.\,3}\left[\frac{d^3fx}{dx^3}-\frac{d^3fz}{dz^3}\right]$$

$$+\frac{\theta_6\,.\,r^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\left[\frac{d^5fx}{dx^5}-\frac{d^5fz}{dz^5}\right]$$

$$+\text{ec.}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (p).$$

15. La serie decrescente

$$fx + f\left(x-r\right) + f\left(x-2r\right) + \text{ec.} \ldots\ldots \text{ fino a } f\left(x-mr+r\right)$$

è, facendo $x - mr = z$, e prendendo l'ultimo termine per il primo, la stessa cosa della serie crescente

$$f\left(z+r\right) + f\left(z+2r\right) + f\left(z+3r\right) + \text{ec.} \ldots\ldots \text{ fino a } f\left(z+mr\right).$$

Così per ottenere la somma degli m primi termini della serie crescente

$$fz + f\left(z+r\right) + f\left(z+2r\right) + f\left(z+3r\right) + f\left(z+4r\right) + \text{ec.},$$

vale a dire, dei termini da fz fino a $f\left(z+mr-r\right)$ inclusivamente, basta di aggiungere all'espressioni (p) il termine fz e di sottrarre il termine

$$f\left(z+mr\right) = fx;$$

quest'espressione diventa allora

$$\frac{1}{r}\left[\int fx \cdot dx - \int fz \cdot dz\right] + \frac{1}{2}\left[fz - fx\right]$$

$$+ \vartheta_2 \cdot r\left[\frac{dfx}{dx} - \frac{dfz}{dz}\right]$$

$$+ \frac{\vartheta_4 \cdot r^3}{2 \cdot 3}\left[\frac{d^3fx}{dx^3} - \frac{d^3fz}{dz^3}\right]$$

$$+ \text{ec.} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (q).$$

16. Applichiamo quest'ultima formula al caso degno di osservazione in cui la funzione f indica una potenza qualunque delle variabili x e z, vale a dire, al caso in cui si domandi l'espressione della somma delle m potenze

$$z^{\mu} + \left(z+r\right)^{\mu} + \left(z+2r\right)^{\mu} + \text{ec.} \ldots\ldots \text{ fino a } + \left(z+mr-r\right)^{\mu}.$$

Abbiamo in questo caso $x = z + mr$, e

$$fz = z^{\mu}, \quad fx = \left(z+mr\right)^{\mu},$$

$$\int fz \cdot dz = \frac{z^{\mu+1}}{\mu+1}, \quad \int fx \cdot dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} = \frac{(z+mr)^{\mu+1}}{\mu+1},$$

$$\frac{d^nfx}{dx^n} = \mu^{n|-1} \cdot x^{\mu-n} = \mu^{n|-1} \cdot \left(z+mr\right)^{\mu-n}$$

$$\frac{d^nfz}{dz^n} = \mu^{n|-1} \cdot z^{\mu-n}.$$

Sostituendo questi valori in (q) verrà per la somma domandata

$$\frac{1}{r(\mu+1)}\cdot\left[\left(z+mr\right)^{\mu+1}-z^{\mu+1}\right]+\frac{1}{2}\left[z^{\mu}-\left(z+mr\right)^{\mu}\right]$$

$$+\mu\,.\,\theta_2\,.\,r\left[\left(z+mr\right)^{\mu-1}-z^{\mu-1}\right]$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\theta_4\,.\,r^3\left[\left(z+mr\right)^{\mu-3}-z^{\mu-3}\right]$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\,\theta_6\,.\,r^5\left[\left(z+mr\right)^{\mu-5}-z^{\mu-5}\right]$$

$+$ ec. . . . . (r).

17. Se si fa successivamente in (r) $\mu=1$, $\mu=2$, $\mu=3$, ec., quest'espressione farà conoscere la somma degli m numeri in progressione aritmetica,

$$z+\left(z+r\right)+\left(z+2r\right)+\left(z+3r\right)+\ldots\ldots+\left(z+mr-r\right)$$

la somma dei quadrati di questi numeri, quella dei cubi, ec.

Nel caso di $\mu=1$, (r) si riduce a

$$\frac{1}{2r}\left[\left(z+mr\right)^2-z^2\right]+\frac{1}{2}\left[z-\left(z+mr\right)\right]=\frac{2mr\,.\,z+m^2r^2}{2r}-\frac{mr}{2}=$$

$$=\frac{2mrz+m^2r^2-mr^2}{2r}=\frac{1}{2}\,m\left[2z+mr-r\right],$$

vale a dire che la somma dei termini di una progressione aritmetica è eguale alla metà del prodotto del numero dei termini per la somma del primo e dell'ultimo termine. Verità conosciuta in altra parte. (*Vedi* PROGR. ARIT., n.° 8.)

Nel caso di $\mu=2$, si trova, per la somma dei *quadrati* di questi stessi numeri, l'espressione

$$\frac{m}{6}\left[6z^2+\left(m-1\right)6r\,.\,z+\left(2m-1\right)\left(m-1\right)r^2\right]$$

Nel caso di $\mu=3$, si ha per la somma dei *cubi*

$$\frac{1}{4r}\cdot\left[\left(z+mr\right)^2.\left(z+mr-r\right)^2-z.\left(z-r\right)^2\right];$$

e così degli altri.

18. Facciamo nell'espressione generale (r) $z=0$ e $r=1$, essa ci darà per la somma degli m primi termini della serie delle potenze

$$0^{\mu}+1^{\mu}+2^{\mu}+3^{\mu}+4^{\mu}+\text{ec.}\ldots\ldots+(m-1)^{\mu}$$

l'espressione particolare

$$\frac{1}{\mu+1}\,.\,m^{\mu+1}-\theta_1\,.\,m^{\mu}+\frac{\mu}{1}\,.\,\theta_2\,.\,m^{\mu-1}$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\theta_4\,.\,m^{\mu-3}$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)}{1.2.3.4.5}\theta_6.m^{\mu-5}$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)(\mu-5)(\mu-6)}{1.2.3.4.5.6.7}\theta_8.m^{\mu-7}$$

$+$ ec. . . . .

$$+\left(-1\right)^{\mu}.\theta_{\mu+1};$$

nella quale il termine $+\left(-1\right)^{\mu}.\theta_{\mu+1}$ resulta dalle *costanti* introdotte dall'integrazioni. Indicando generalmente con $M\left(m\right)_{\mu}$ la somma delle potenze μ, si trova successivamente

$$M\left(m\right)_0 = m$$

$$M\left(m\right)_1 = \frac{1}{2}m^2 - \theta_1 m$$

$$M\left(m\right)_2 = \frac{1}{3}m^3 - \theta_1 m^2 + 2\theta_2 m$$

$$M\left(m\right)_3 = \frac{1}{4}m^4 - \theta_1 m^3 + 3\theta_2 m^2 + 4\theta_3 m$$

ec. $=$ ec.

valori che abbiamo impiegati all'articolo Facoltà.

19. Possiamo applicare le formule generali alla serie reciproca delle potenze

$$\frac{1}{z^{\mu}}+\frac{1}{(z+r)^{\mu}}+\frac{1}{(z+2r)^{\mu}}+\frac{1}{(z+3r)^{\mu}}+\text{ec.}\ldots\ldots$$

Facendo μ negativo, si ottiene per la somma di questa serie continuata all'infinito

$$\frac{1}{(\mu-1).z^{\mu-1}.r}+\frac{1}{2z^{\mu}}+\frac{\mu\theta_2.r}{z^{\mu+1}}+\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}.\frac{\theta'_4.r^3}{z^{\mu+3}}$$

$$+\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)}{1.2.3.4.5}.\frac{\theta_6.r^5}{z^{\mu+5}}$$

$+$ ec. . . . .

La convergenza di questa serie sommatoria dipendendo dal rapporto della differenza r al primo termine z, si potrà renderla tanto grande quanto si vorrà, calcolando a parte la somma di un certo numero di termini della serie proposta, per esempio, da $\frac{1}{z^{\mu}}$ fino a $\frac{1}{(z+mr-r)^{\mu}}$, poi applicando la formula alla

somma degli altri da $\frac{1}{(z+mr)^{\mu}}$ fino all'infinito. Facendo $z+mr=x$, quest'ultima somma sarà

$$\frac{1}{(\mu-1)x^{\mu-1}.r}+\frac{1}{2x^{\mu}}+\frac{\mu\theta_2 r}{x^{\mu+1}}+\text{ec.} \ldots\ldots\ldots (s).$$

Proponiamoci, per esempio, di trovare il valore numerico della serie reciproca dei *quadrati*

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\text{ec.} \ldots\ldots$$

continuata all'infinito. Abbiamo in questo caso $z=1$, $r=1$, $\mu=2$. La somma dei *nove* primi termini è 1,5397671; e siccome $x=z+mr=1+9=10$, i termini della serie (s) diventeranno

primo termine = 0,1000000
secondo termine = 0,0050000
terzo termine = 0,0001666
quarto termine = 0,0000003.

Così possiamo trascurare gli altri, quando non si domanda più di sette decimali. Aggiungendo la somma 0,1051669 di questi quattro termini con quella dei *nove* termini della serie, avremo definitivamente 1,6449340 per la somma della serie reciproca dei quadrati, continuata all'infinito.

20. Possiamo ancora dedurre dalla formula (r) l'espressione generale del logaritmo naturale di una fattoriella qualunque $a^{m|r}$, espressione utilissima in un gran numero di casi

La fattoriella $a^{m|r}$ essendo identica col prodotto

$$a\left(a+r\right)\left(a+2r\right)\ldots\ldots\left(a+mr-r\right),$$

si comincia evidentemente ad avere

$$\text{Log}\left(a^{m|r}\right)=\text{Log}\,a+\text{Log}\left(a+r\right)+\text{Log}\left(a+2r\right)+\text{ec.}\ldots\ldots$$
$$+\text{Log}\left(a+mr-r\right),$$

ma si ha ancora generalmente, qualunque sia la quantità x,

$$\text{Log}\,x=\infty\left(x^{\frac{1}{\infty}}-1\right),$$

(*vedi* LOGARITMO, n.º 6); indicando dunque, per facilitare l'impressione, con n la quantità infinitamente piccola $\frac{1}{\infty}$, il che reciprocamente renderà $\infty=\frac{1}{n}$, la somma dei logaritmi prenderà la forma

$$\text{Log}\left(a^{m|r}\right)=\frac{1}{n}\left\{a^n+\left(a+r\right)^n+\text{ec.}\ldots\ldots+\left(a+mr-r\right)^n-m\right\}.$$

Applicando a questa serie la formula (r), osservando che generalmente si ha

$$z^n=1+n\,\text{Log}\,z,$$

quando $n = \frac{1}{\infty}$, si troverà per i tre primi termini della serie sommatoria

$$-m + \frac{1}{r}\left[\left(a+mr\right).\text{Log}\left(a+mr\right) - a\,\text{Log}\,a\right] - \frac{1}{2}\,\text{Log}\left(\frac{a+mr}{a}\right).$$

Quanto ai termini seguenti, se indichiamo con la caratteristica Φ la funzione di x data dalla serie

$$\Phi x = \theta_2 x + \frac{1}{3}\,\theta_4 x^3 + \frac{1}{5}\,\theta_6 x^5 + \frac{1}{7}\,\theta_8 x^7 + \text{ec.} \;\ldots\ldots\; (t),$$

la loro somma totale sarà espressa da $\Phi\frac{r}{a+mr} - \Phi\frac{r}{a}$. Il logaritmo domandato sarà dunque

$$\begin{aligned}\text{Log}\left(a^{m|r}\right) = -m + \frac{1}{r}\left[\left(a+mr\right)\text{Log}\left(a+mr\right) - a\,\text{Log}\,a\right] \\ -\frac{1}{2}\,\text{Log}\left(\frac{a+mr}{a}\right) \\ +\Phi\frac{r}{a+mr} \\ -\Phi\frac{r}{a} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (u).\end{aligned}$$

21. Se facciamo $a=1$, il che rende queste formule più semplici senza diminuirne la generalità, viene

$$\begin{aligned}\text{Log}\left(1^{m|r}\right) = -m + \left[\frac{1+mr}{r} - \frac{1}{2}\right]\text{Log}\left(1+mr\right) \\ +\Phi\frac{r}{1+mr} - \Phi r \;\ldots\ldots\ldots\; (v),\end{aligned}$$

espressione dalla quale possiamo ricavare i mezzi di calcolare facilmente il valore numerico della funzione Φr, qualunque sia la quantità r. Infatti, prendiamo a piacere il numero m: basterà di supporlo uguale a 6, 8 o 9 tutto al più; avremo

$$\begin{aligned}\Phi r = -m + \left[\frac{1+mr}{r} - \frac{1}{2}\right]\text{Log}\left(1+mr\right) + \Phi\frac{r}{1+mr} \\ -\text{Log}\left(1^{m|r}\right) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (x),\end{aligned}$$

e la funzione $\Phi\frac{1}{1+mr}$ il cui sviluppo presenta una serie talmente convergente, che i due primi termini bastano in quasi tutti i casi per determinare il suo valore, farà conoscere quella di Φr

Cerchiamo per esempio il valore numerico di $\Phi 1$. Avendo in questo caso $r=1$,

prendiamo $m=9$, ed avremo, a motivo di $1^{9|1}=362880=720\times504$,

$$\Phi 1=-9+\frac{19}{2}\,.\,\mathrm{Log}\,10+\Phi\,\frac{1}{10}-\mathrm{Log}\left(362880\right).$$

La funzione $\Phi\,\frac{1}{10}$ è $\theta_2\,.\,\frac{1}{10}+\frac{1}{3}\,\theta_4\,.\,\frac{1}{1000}+$ ec. . . . . . . e siccome

$$\theta_2=\frac{1}{12},\quad \text{e}\quad \theta_4=\frac{1}{120},$$

bastano questi due termini per farci conoscere

$$\Phi\,\frac{1}{10}=0,0083305$$

con sette decimali esatti. Abbiamo d' altra parte

$$\mathrm{Log}\,720=6,2225763$$
$$\mathrm{Log}\,504=6,5792522$$
$$\mathrm{Log}\left(1^{9|1}\right)=12,8018275$$
$$\mathrm{Log}\,\;10=2,3025851$$
$$\frac{19}{2}\,\mathrm{Log}\,\;10=21,8745584$$

con l' aiuto di questi dati si ottiene definitivamente

$$\Phi 1=0,0810615.$$

Prendiamo per secondo esempio $\Phi\,\frac{2}{3}$. Facendo il numero arbitrario $m=6$, la formula (v) dà

$$\Phi\,\frac{2}{3}=-6+7\,\mathrm{Log}\,5+\Phi\,\frac{2}{15}-\mathrm{Log}\left[\frac{5}{3}\,.\,\frac{7}{3}\,.\,\frac{9}{3}\,.\,\frac{11}{3}\,.\,\frac{13}{3}\right]$$

ed eseguendo i calcoli si trova

$$\Phi\,\frac{2}{3}=0,0538141.$$

22. Le formule (u) e (v) hanno il gran vantaggio di far ottenere con facilità i valori numerici delle fattorielle a esponenti frazionari, fattorielle che possono servire a dare la generazione di una moltitudine di quantità trascendenti.

Proponiamoci per esempio la fattoriella degna di osservazione $1^{\frac{1}{2}|1}$.

Abbiamo in questo caso $a=1$, $r=1$, $m=\frac{1}{2}$; così, sostituendo in (v), verrà

$$\mathrm{Log}\left(1^{\frac{1}{2}|1}\right)=-\frac{1}{2}+\mathrm{Log}\,\frac{3}{2}+\Phi\,\frac{2}{3}-\Phi 1,$$

ecco il calcolo:

$$\begin{aligned}
\text{Log } 3 &= 1,0986123\\
\text{Log } 2 &= 0,6931472\\
\hline
\text{Log } \frac{3}{2} &= 0,4054651\\
\phi\, \frac{2}{3} &= 0,0548141\\
\hline
&\; 0,4602792\\
\phi\, 1 &= 0,0810615\\
\hline
&\; 0,3792177\\
\frac{1}{2} &= 0,5000000\\
\hline
\text{Log}\left(1^{\frac{1}{2}|1}\right) &= -\, 0,1207823
\end{aligned}$$

il numero che risponde a questo logaritmo essendo 0,886227, ne concluderemo

$$1^{\frac{1}{2}|1} = 0,886227$$

Questo numero è la metà della radice quadrata di 3,1415296, o del numero che esprime il rapporto del diametro alla circonferenza. Abbiamo infatti dimostrato che

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}|-1}$$

(*vedi* CIRCOLO); ora; in virtù del teorema (*Vedi* FATTORIELLA, n.° 2)

$$a^{m|r} = \left(a + \left(m - 1\right)r\right)^{m|-r},$$

si ha evidentemente

$$1^{\frac{1}{2}|1} = \left(1 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right)^{\frac{1}{2}|-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}|-1}.$$

23. L'Eulero ha ottenuto, per le serie reciproche delle potenze dei numeri naturali, dell'espressioni singolari dipendenti dal numero

$$\pi = 3,1415926.$$

Esso ha trovato che la *somma* di tutte le serie continuate all'infinito e rappresentate sotto la forma generale

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{ec.}$$

è sempre in un rapporto commensurabile con π^n, quando n è un numero pari.

Questa somma per

$n = 2$, è . . . . $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \pi^2$

$n = 4$, ... $\frac{2^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{3} \pi^4$

$n = 6$, ... $\frac{2^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \frac{1}{3} \pi^6$

$n = 8$, ... $\frac{2^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9} \cdot \frac{3}{5} \pi^8$

$n = 10$, ... $\frac{2^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 11} \cdot \frac{5}{3} \pi^{10}$

$n = 12$, ... $\frac{2^{10}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 13} \cdot \frac{691}{105} \cdot \pi^{12}$

$n = 14$, ... $\frac{2^{12}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 15} \cdot \frac{1}{35} \cdot \pi^{14}$

$n = 16$, ... $\frac{2^{14}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 17} \cdot \frac{3617}{15} \cdot \pi^{16}$

$n = 18$, ... $\frac{2^{11}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 19} \cdot \frac{43867}{21} \cdot \pi^{18}$

$n = 20$, ... $\frac{2^{18}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 21} \cdot \frac{1222277}{55} \pi^{20}$

$n = 22$, ... $\frac{2^{20}}{1^{23|1}} \cdot \frac{854513}{31} \cdot \pi^{22}$

$n = 24$, ... $\frac{2^{22}}{1^{25|1}} \cdot \frac{1181820455}{273} \cdot \pi^{24}$

$n = 26$, ... $\frac{2^{24}}{1^{27|1}} \cdot \frac{76977927}{1} \cdot \pi^{21}$.

La serie irregolarissima dei coefficienti.

$$1, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{3}{5}, \ \frac{5}{3}, \ \frac{691}{105}, \ \text{ec.}$$

vien rappresentata in altre circostanze. (*Vedi* l' Eulero *Introd. analy. infinitorum*).

24. La sommazione delle serie presenta un gran numero di particolarità le quali non possono trovar luogo in quest' articolo; ora dobbiamo limitarci ad indicare ai nostri lettori le sorgenti dove essi debbono attingere. Queste sono: *il calcolo differenziale* dell' Eulero; *l' analisi delle refrazioni astronomiche* del Kramp; *Misc. analyt.* del Moivre; *Methodus differentialis* dello Stirling; *De*

seriebus infinit. di Giacomo Bernoulli; *Théorie des jeux de hasard* del Montmort; *Meditationes analyt.* dell' Waring; *Mathematical dissertations*, del Simpson, *Lucubrations* del Landen; e *Le Traité des différences et des séries* del Lacroix.

SOMMAZIONE (*Alg.*). Operazione che ha per scopo di trovare la somma di una serie di termini dei quali si conosce la legge. Essa è particolarmente l' oggetto di un ramo di calcolo chiamato *calcolo sommatorio*.

Abbiamo chiamato, mediante il signor Wronski, nei nostri articoli MATEMATICHE e FILOSOFIA, *algoritmo della sommazione*, il primo modo elementare della generazione delle quantità, la cui forma generale o sistematica è

$$A+B=C.$$

SOPRAPPOSIZIONE (*Geom.*). Metodo di dimostrazione che si usa nella geometria elementare per dimostrare l' ugguaglianza o l' ineguaglianza di due figure. Esso consiste a supporre le due figure applicate l' una sopra l'altra, in modo che due delle loro parti che si sa essere uguali coincidano o si confondano; quindi si esamina, mediante le direzioni dell' altre parti, se esse debbono ugualmente confondersi. Quando tutte le parti delle due figure coincidono esattamente, se ne conclude che queste figure sono uguali.

SORDO (*Aritm.*). Un numero *sordo* equivale allo stesso di un numero *irrazionale* o *incommensurabile*, come $\sqrt{2}$. Questa parola è fuori d' uso.

SOSIGENE, uno degli astronomi della scuola d' Alessandria, che furono chiamati a Roma da Giulio Cesare per stabilire la riforma del calendario romano che era regolato sull' anno lunare. Dopo diversi saggi infruttuosi, vide la necessità di abbandonare quest' anno e di seguire l' anno solare. Non ignorava che questo era stato fissato da Ipparco a trecentosessantacinque giorni, cinque ore, cinquantacinque minuti e dodici secondi; ma non credè di dover far conto di questa piccole frazioni, e regolò l' anno a trecentosessantacinque giorni e sei ore. L'anno lunare non ne aveva che trecentocinquantacinque. I dieci giorni di aumento furono repartiti nel seguente modo: se ne aggiunsero due ai mesi di Gennajo, di Agosto e di Dicembre, ed uno soltanto a quelli di Aprile, Giugno, Settembre e Novembre. Le sei ore che rimanevano dovevano formare in capo a quattro anni un giorno, che fu intercalato nel mese di Febbrajo prima del sesto giorno che precedeva le calende, donde il giorno fu detto *bissesto* e l'anno *bissestile*. Terminato che ebbe Sosigene il suo lavoro, Cesare introdur fece in tutto l'impero il nuovo calendario a cui fu dato il nome di *giuliano*. E per metter l'anno in cui fu portata ad effetto la riforma in armonia col corso del sole, bisognò prolungarlo di novanta giorni, in guisa che si abbero 445 giorni: un tale anno, che fu il quarantesimoquarto prima dell' era cristiana, fu denominato dai cronologisti anno di disordine e di confusione. Sosigene preveduto aveva che i quattro minuti e quarantotto secondi di cui l' anno suo era troppo lungo, avrebbero alla fine resa necessaria una nuova correzione del calendario: ma temette forse d' introdurre una complicanza della quale non si sarebbe fatto conto nessuno, se vi avesse rimediato fin d' allora, e lasciò ai secoli futuri la cura di correggere l'errore quando fosse divenuto sensibile. Ciò fu fatto appunto dal papa Gregorio XIII, il calendario del quale venne sostituito a quello di Sosigene che aveva durato 15 secoli. S' ignora assolutamente il luogo e l'epoca della nascita di questo astronomo, come s' ignora ancora l' epoca della sua morte: si sa soltanto che aveva scritto due *comenti* sul trattato di Aristotile *de coelo*, ed un libro *delle rivoluzioni di Sparta*; ma nessuna di queste opere è giunta fino a noi.

SOSTITUZIONE (*Alg.*). Si chiama una quantità che vien sostituita in una formula algebrica invece di un'altra che le è uguale, ma che è espressa in un'altra maniera. Se per esempio si ha, $y^2 = \sqrt{\left[a^2 - \left(2x + b^2\right)\right]}$, e $x = \frac{a^2}{2}$, sostituendo nella prima espressione x per $\frac{a^2}{2}$, avremo, per *sostituzione*,

$$y^2 = \sqrt{\left[a^2 - \left(a^2 + b^2\right)\right]} = \sqrt{\left(-b^2\right)}.$$

SOTIACO (*Astron.*). Il periodo *sotiaco* o canicolare è un antico periodo di 1460 anni, che secondo gli antichi astronomi riconduceva il principio delle stagioni nei medesimi giorni dell'anno civile degli Egiziani, che era di 365 giorni. *Vedi* PERIODO.

SOTTENDENTE (*Geom.*). Nome che alcune volte vien dato alla corda di un arco di circolo. (*Vedi* CORDA).

SOTTRAZIONE (*Aritm.* ed *Alg.*). Una dell'operazioni fondamentali o delle *regole* primitive della scienza dei numeri. Essa ha per oggetto di costruire un numero che sia uguale alla differenza di due numeri dati.

La *sottrazione* è l'operazione inversa dell'*addizione*, poichè dobbiamo sempre rappresentare il più grande dei numeri proposti come prodotto dall'addizione del più piccolo col numero incognito che si tratta di trovare; per esempio, cercare la differenza dei due numeri 30 e 12 è evidentemente la stessa cosa che cercare il numero la cui addizione con 12 dà 30 per resultamento. Così, indicando quest'ultimo con x, possiamo dire indifferentemente 30 *meno* 12 è uguale ad x, ovvero 30 uguale a 12 *più* x. Resulta da questa considerazione che il processo che bisogna impiegare per fare la sottrazione dev'essere l'inverso di quello che si segue nell'addizione; infatti, per ottenere la differenza dei due numeri 85634, 89887, o per togliere 85634 da 89887, si deve ragionare così: 89887 può considerarsi come formato dall'addizione di 85634 col numero cercato e allora le sue unità, le sue diecine, le sue centinaja, ec., sono composte della somma dell'unità, delle diecine, delle centinaja, ec., dei due numeri aggiunti insieme; dunque sottraendo le unità di 85634 da quelle di 89887, deve necessariamente rimanere le unità del numero cercato, e sottraendo le diecine di 85634 dalle diecine di 89887, deve rimanere le diecine di questo numero cercato, e così in seguito. Possiamo facilmente concludere, come regola generale, che per sottrarre un numero da un altro, bisogna sottrarre le unità del primo da quelle del secondo, poi le diecine del primo dalle diecine del secondo, le centinaja dalle centinaja, ec. ec. Ben' inteso che in questo caso si tratta di numeri interi le cui unità sono della stessa natura; poichè, per la medesima ragione che *due chilogrammi e due metri* non possono formare un complesso al quale si dà il nome di *quattro*, sarebbe impossibile di valutare la differenza di due numeri le cui unità fossero di una natura differente.

Per effettuare una sottrazione si scriveranno perciò i due numeri proposti l'uno sotto l'altro, ponendo il più piccolo sotto il più grande e facendo corrispondere le unità, le diecine, le centinaja, ec., dell'uno con le unità, le diecine, le centinaja, ec., dell'altro, come segue

$$\begin{array}{r} 89887 \\ 85634 \\ \hline \textit{resto} \ldots\ldots\ 4253 \end{array}$$

poi, cominciando dalle unità, si dirà: 4 tolto da 7 resta 3, che si scriverà nel posto dell'unità; passando alle diecine, si dirà: 3 tolto da 8 rimane 5, che scriveremo nella colonna delle diecine; passando alle centinaja, si dirà ugualmente: 6 tolto da 8 resta 2, che si scriverà. Per le migliaja, si dirà: 5 tolto da 9 resta 4, che si scriverà ancora; e finalmente, per le diecine di migliaja, si dirà: 8 tolto da 8 resta 0, che trascureremo di scrivere perchè non vi è più niente da mettere dopo.

Così, 4253 è il resultamento, ovvero, come si chiama il *resto* della sottrazione di 85634 da 89887, e questo numero 4253, così trovato, è necessariamente quello di cui l'addizione con 85634 forma 89887. L'addizione di 4253 con 85634 è il mezzo di verificare la sottrazione, mentre se non ci siamo ingannati in quest'ultima operazione, si deve, addizionando, riprodurre 89887.

Spesso succede quando si sottrae un numero da un altro, che la cifra inferiore in una colonna è più grande che la cifra superiore, e allora siamo forzati di prendere ad *imprestito* sopra la cifra superiore, alla sinistra di quella sopra la quale si opera, un'unità, la quale, valendo dieci unità per la colonna in questione, dà allora il mezzo di togliere la cifra inferiore. Questo è ciò che un esempio renderà sensibile.

Si abbia per esempio 9886 da togliere da 14743; dopo avere scritto questi numeri l'uno sotto l'altro come è prescritto

...
14743
9886

resto 4857

si opererà in questo modo: 6 essendo più grande di 3, aggiungeremo a 3 *una diecina* che si prenderà ad imprestito sopra la cifra 4 delle diecine, poi si dirà: 6 tolto da 13 resta 7, che scriveremo nella colonna dell'unità. Passando alle diecine, non si dirà più: 8 tolto da 4, poichè si deve rammentarsi che la cifra superiore 4 è diminuita di un'unità mediante l'imprestito che abbiamo fatto, ma si dirà: 8 tolto da 3, e siccome non si può ancora sottrarre 8 da 3, si leverà 8 da 13, prendendo in imprestito di nuovo un'unità dalla cifra 7 delle centinaje, unità che vale dieci diecine. Giunto alla colonna delle centinaja e osservando che la cifra superiore non vale più di 6, e che essa è più piccola della cifra inferiore 8, si prenderà ad imprestito un'unità sopra la cifra delle migliaja e si dirà: 8 tolto da 16 resta 8. Finalmente, giunto alla colonna delle migliaja, siccome non rimangono più che 3 migliaja, prenderemo la cifra 1 delle diecine di migliaja, e si terminerà dicendo: 9 tolto da 13 resta 4. Il numero cercato è dunque 4857.

Possiamo ancora vedere facilmente in questo caso che operando come abbiamo fatto, abbiamo esattamente seguito un metodo inverso da quello col quale si formerebbe il numero 14743 mediante l'addizione dei due numeri 9886, 4857, poichè dopo avere aggiunto le due cifre di una stessa colonna bisognerebbe riportare la diecina della somma sopra la colonna seguente.

Se si trovasse uno zero nelle cifre superiori o ancora più zeri di seguito, si procederebbe come segue: 1.° Si abbia da sottrarre 258469 da 360584

360584
258469

resto 102115

Avendo generalmente la cura di segnare con un punto le cifre sopra le quali si prende ad imprestito per rammentarsi che esse sono diminuite di un'unità, si dirà: 9 tolto da 14, rimane 5; 6 tolto da 7 resta 1; 4 tolto da 5 resta 1; 8 tolto da 10 resta 2; 5 tolto da 5 resta 0; e 2 tolto da 3 resta 1. Il resultamento dell'operazione è dunque 102115.

2.° Si abbia da sottrarre 3985978699 da 5800430608.

....
5800430608
3985978699

resto 1814451909

La prima cifra 8 dell'unità essendo più piccola della cifra inferiore 9, e la cifra segnente delle diecine essendo 0, bisogna prendere ad imprestito un'unità sopra la cifra 6 delle centinaja, ma quest'unità vale dieci diecine, e, siccome non si ha bisogno che di una sola diecina, se ne lascerà nove al posto delle diecine, e si dirà solamente: 9 tolto da 18 resta 9. Passando alle diecine, e rammentandosi che si è lasciato 9 sopra lo zero, si dirà: 9 tolto da 9 resta 0. La cifra 6 delle centinaja superiori non valendo più di 5, si prenderà ancora ad imprestito una diecina sopra la cifra seguente 0, e in sua mancanza sopra la cifra di segnito 3, lasciando allora 9 sopra lo zero, poichè è assolutamente la stessa cosa che se si prendesse immediatamente ad imprestito 1 sopra 30, per cui rimarrebbe 29; si dirà dunque: 6 da 15 resta 9; 8 da 9 resta 1; 7 da 12 resta 5; 9 da 13 resta 4, ma per quest'ultimo siccome è bisognato prendere ad imprestito 1 sopra 800, rimane alle cifre superiori 799, vale a dire che i due 0 valgono ciascuno 9 e che l'8 non vale più che 7; si proseguirà dunque dicendo: 5 tolto da 9 resta 4; 8 tolto da 9 resta 1; 9 tolto da 17 resta 8; e finalmente 3 tolto da 4 resta 1. E avendo scritto bene esattamente ciascun resto nella colonna da cui esso proviene, avremo definitivamente il numero 1814451909 per il *resto* generale.

Questi esempii bastano per rendere la regola chiarissima.

La sottrazione, come l'addizione, si divide in *semplice* e in *complessa*, la sottrazione semplice è quella che si opera sopra numeri interi, la sottrazione complessa è quella che si opera sopra numeri composti di parti intere e di parti frazionarie. Abbiamo trattato la prima ora esamineremo la seconda.

Sottrazione complessa. Due quantità composte di unità di diverse denominazioni essendo date, trovare la loro differenza, tale è lo scopo di quest'operazione. Il processo che bisogna seguire essendo una conseguenza di quello dell'addizione delle quantità complesse, basterà un solo esempio per farlo comprendere. Si abbiano 35° 24′ 21″ da sottrarre da 40° 30′ 10″; avendo scritto i numeri proposti come segue:

40° 30′ 10″
35 24 21

resto . . . . . 5° 5′ 49″.

Vale a dire, ponendo le unità delle stesse specie le une sotto le altre, si comincerà dall'unità della più piccola denominazione e si dirà: 1 tolto da 10 resta 9 che si scriverà nel posto dei *secondi*; passando alle diecine di secondi siccome non resta niente alla cifra superiore a motivo dell'imprestito che è stato fatto, si prenderà ad imprestito un'unità sopra i 30 minuti, la quale unità vale 60 secondi o 6 diecine di secondi; così si dirà: 2 da 6 resta 4, e si avrà per primo resto parziale 49″; si passerà ai minuti dei quali non ne resta

che 29, e si avrà per secondo resto parziale 5′; finalmente si passerà ai gradi e si troverà per terzo resto parziale 5°; il resto generale sarà dunque 5° 5′ 49.″

SOTTRAZIONE DELLE FRAZIONI. Se le frazioni hanno lo stesso denominatore, si eseguirà la sottrazione sopra i numeratori, e si darà al resto il denominatore comune. Nel caso contrario, si comincerà da ridurre le frazioni allo stesso denominatore, poi si opererà come abbiamo detto. Per esempio, se vogliamo sottrarre $\frac{8}{17}$ da $\frac{11}{17}$, si sottrarrà semplicemente 8 da 11, e si darà al resto 3 il denominatore 17; si avrà con questo metodo

$$\frac{11}{17}-\frac{8}{17}=\frac{3}{17}.$$

Se si trattasse di sottrarre $\frac{8}{17}$ da $\frac{11}{16}$, si ridurrebbero queste frazioni allo stesso denominatore, il che si fa moltiplicando i due termini di ciascuna per il denominatore dell' altra, poi si farebbe la sottrazione sopra i numeratori. Si avrebbe così

$$\frac{11}{16}-\frac{8}{17}=\frac{187}{272}-\frac{128}{272}=\frac{59}{272},$$

(*vedi* FRAZIONE). La sottrazione si eseguisce sopra le frazioni decimali nella stessa maniera che sopra i numeri interi; basta completare con zeri il numero delle cifre decimali nelle due quantità proposte, e procedere come se non ci fosse virgola. Si pone inseguito la virgola avanti la prima cifra degli interi, se vi sono degli interi, e in loro mancanza avanti lo zero che ne tiene il loro posto; si abbia per esempio da sottrarre da una parte 0, 75 da 0,90357, e dall' altra 21, 4538675 da 29, 35. Ecco l' operazioni.

0, 90357	29, 3500000
0, 75000	21, 4538675
0, 15357	7, 8961325

SOTTRAZIONE ALGEBRICA. Operazione con la quale si sottrae una quantità espressa da lettere da un' altra quantità espressa nella stessa maniera.

Quest' operazione può sempre riportarsi alle regole prescritte per l' addizione cangiando il *segno* della quantità che vogliamo sottrarre. Per esempio, per sottrarre $a-b+c$, da $2a+b-c$, bisogna necessariamente sottrarre tutte le parti che compongono la prima di queste quantità dalle parti che compongono la seconda; così bisogna successivamente sottrarre da $2a+b-c$, $a-b$ e $+c$, bisogna dunque scrivere

$$2a+b-c-a-(-b)-(+c),$$

ma $-(-b)=+b$ e $-(+c)=-c$, dunque la quantità precedente è la stessa cosa che

$$2a+b-c-a+b-c,$$

il che si riduce mediante l' addizione e la sottrazione dei termini dell' istessa indicazione a

$$a+2b-2c.$$

La regola è dunque di disporre le quantità date come se si volesse fare un'addizione, quindi cangiare tutti i *segni* dei termini della quantità che si deve sottrarre. Non resta più in realtà che da eseguire una semplice addizione mediante le regole prescritte per quest' operazione. Se si trattasse per esempio di sottrarre $8b - 9a + 6d - e$ da $7b - a + 3c - 4d$, si cangerebbero i segni della prima quantità, il che darebbe, scrivendo i termini nell' ordine alfabetico,

$$\begin{array}{rl} & -a + 7b + 3c - 4d \\ & +9a - 8b \qquad - 6d + e \\ \hline \text{Somma} & +8a - b + 3c - 10d + e \end{array}$$

La *somma* $8a - b + 3c - 10d + e$ è il *resto* della sottrazione o la *differenza* delle quantità proposte. (*vedi* ADDIZIONE e ALGEBRA, n.° 3.)

SOTTRAZIONE DEI NUMERI IRRAZIONALI. Non possiamo generalmente che indicarla col segno $-$; per esempio, per sottrarre $\sqrt{2}$ da $\sqrt{5}$, si scriverà $\sqrt{5} - \sqrt{2}$; e soltanto valutando questi numeri per approssimazione possiamo in seguito ottenere approssimativamente la loro differenza. In tutti i casi in cui è possibile di operare delle trasformazioni capaci di riportare questi numeri a non essere che multipli di una stessa quantità irrazionale, la loro differenza può ottenersi in un modo esatto, poichè si ha evidentemente

$$M \cdot \sqrt[m]{A} - N \cdot \sqrt[m]{A} = (M - N)\sqrt[m]{A}.$$

Ciò non ostante quest' operazione è piuttosto una *riduzione* che una vera sottrazione, poichè il valore numerico del resto non è conosciuto che dopo l' estrazione della radice. Con questo metodo si trova

$$\sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2},$$

$$\sqrt{27} - \sqrt{12} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3},$$

$$\sqrt[3]{45} - \sqrt[3]{5} = 3\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5},$$

$$\sqrt[3]{108a^4} - \sqrt[3]{32a} = 3a\sqrt[3]{4a} - 8\sqrt[3]{4a} = (3a - 8)\sqrt[3]{4a}.$$

SPARSILI (*Astron.*). Le stelle *sparsili*, sporadi, o informi, sono quelle che non sono comprese nelle costellazioni già introdotte negli atlanti celesti.

SPAZIO. Percezione pura e invariabile che accompagna tutte le nostre intuizioni degli oggetti esterni o materiali, e senza la quale queste intuizioni sarebbero impossibili.

Le proprietà dello spazio sono sempre le stesse per noi, non concepiamo che un solo spazio senza limiti, che si estende in tutti i sensi attorno di noi, e quando parliamo di diversi spazj, non gli concepiamo che come parti insepa-

rabili dello spazio *uno* e *infinito* che abbraccia tutto, a tre dimensioni, occupa sempre e tutto intero lo stesso posto, e il quale, per conseguenza è immobile.

Tutti i corpi ci appariscono come se occupassero un luogo nello spazio; questo luogo, porzione limitata dello spazio senza limiti, è ciò che si chiama l'*estensione* dei corpi. Senza lo spazio, verun corpo non potrebbe esistere; ma quando ancora tutti i corpi fossero annullati, lo spazio rimarrebbe ciò non ostante uno, infinito, immobile.

In *geometria*, la parola Spazio prende un senso particolare e ristretto, esso non significa più che l'area di una figura racchiusa o limitata da linee rette o curve che terminano questa figura.

Così, lo *spazio parabolico* è quello che è racchiuso dalla parabola; ugualmente lo *spazio ellittico*, *lo spazio iperbolico*, *lo spazio concoidale*, ec., sono quelli che sono racchiusi dall'ellisse, l'iperbola, la concoide, ec. *Vedi* queste parole e Quadratura.

Nella *meccanica*, lo Spazio è la linea retta o curva che descrive un mobile in moto.

SPECCHIO (*Ott.*). Corpo levigato, e suscettibile di riflettere i raggi della luce. *Vedi* Catottrica.

SPECIOSA. Aritmetica speciosa. Nome che gli autori degli ultimi secoli davano all'algebra, perchè le quantità vi sono rappresentate con lettere che i primi algebristi chiamavano *specie*.

SPETTRO COLORATO (*Ott.*). Nome che comunemente si dà nei trattati di ottica all'immagine bislunga e colorata del sole i cui raggi passano attraverso ad un prisma.

SPIGA della Vergine (*Astron.*). Brillante stella di prima grandezza nella costellazione della Vergine.

SPIGOLO (*Geom.*). Si chiama *spigolo* la linea retta seguendo la quale due piani s'incontrano, e che con l'apertura più o meno grande che fanno tra di essi determinano la grandezza di un angolo diedro. (*Vedi* Diedro).

SPINTA DELLE TERRE. (*Archit. Prat.*) Si chiama *Spinta delle terre* lo sforzo che esercitano contro i muri di rincalzamento destinati a sostenerli, le terre tagliate a picco.

L'esperienza ha dimostrato che tutte le terre nuovamente rimosse prendono un pendio naturale la cui superficie è piana, e la cui inclinazione sul piano orizzontale varia in ragione dell'aderenza e dell'attrito delle molecule. Immaginiamo che si sia tagliato a picco, sopra l'altezza BE, una massa di terra di cui ABEF (*Tav.* CLXXXVIII, *fig.* 4) rappresenta il profilo; questa massa non essendo un vero corpo solido, ma bensì un aggregato di molecule solide imperfettamente aderenti tra esse, le sue parti, le quali non saranno più sostenute dalla parte di BE, e le quali tendono a scendere per l'effetto della loro gravità, si smotteranno nello spazio vuoto che vien loro offerto, dimodochè dopo la loro caduta e quando l'equilibrio della massa sarà stabilito, questa massa presenterà dalla parte dello scavo un pendio o declivio AB più o meno inclinato rapporto alla linea orizzontale ED. Se l'aderenza delle molecule terrose, fosse, come nelle pietre, più grande della loro gravità, è evidente che veruno smottamento non potrebbe aver luogo e che la massa conserverebbe il pendio verticale BE; nel mentre che se questa aderenza fosse nulla, come nei fluidi, la massa intera rovinerebbe finattantochè la sua superficie superiore fosse divenuta orizzontale. Tra questi due limiti estremi di aderenza, è facile vedere che il declivio AB sarà tanto più inclinato quanto l'aderenza sarà più piccola; ma questa forza non determina sola la forma e l'inclinazione del pendio, le quali dipendono principalmente dalla resistenza dovuta all'attrito delle molecule le une contro le altre; così, supponendo che la massa ABEF sia composta di sabbia secca, della

quale possiamo considerare la coesione come nulla, l'inclinazione del pendio AD sarà giunta al suo grado naturale quando la molecola m, la quale tende a strisciare sul piano inclinato mD, rimarrà in riposo mediante il solo affetto dell'attrito (*Vedi* QUESTA PAROLA). In questo caso, l'inclinazione del piano del pendio è indipendente dall'altezza dello scavo, e si trova unicamente data dal valore dell'attrito; dimodochè l'angolo d'inclinazione ADF è in realtà l'*angolo dell'attrito* (*Vedi* QUESTA PAROLA), e la sua tangente il rapporto dell'attrito alla pressione. In tutti gli altri casi, in cui è necessario di far entrare l'aderenza in considerazione, l'angolo d'inclinazione ADF diminuisce a misura che l'altezza dello scavo aumenta, perchè le differenti specie di terre si sostengono da se stesse quando esse sono tagliate a picco sopra una data altezza, la quale unicamente dipende dalla loro forza di coesione.

Resulta da queste nozioni generali che, se si eleva un muro in BE per impedire il movimento delle terre, questo muro sopporterà lo sforzo o pressione del prisma di terra ABC, che si distaccherebbe senza l'ostacolo opposto al suo movimento. La stessa cosa avrebbe evidentemente luogo per un muro BCDE (*Tav.* CLXXXVIII, *fig.* 3) dietro del quale si facesse un trasporto di terra.

La ricerca dei principii mediante i quali debbono essere costruiti i muri di rincalzamento, i quali debbono resistere alla spinta delle terre, ha molto occupato i sapienti dell'ultimo secolo; ma i loro lavori non presentano più verun'interesse dopo che il Coulomb ha fatto entrare nell'analisi della questione le diverse circostanze fisiche che abbiamo indicate, e soprattutto dopo che il signor di Prony ne ha data una teoria semplicissima, di cui l'esperienza ha confermato tutti i resultamenti. Quest'ultima è quella che esporremo.

1. Sia BCDE (*Tav.* CLXCXVIII, *fig.* 3) un muro di rincalzamento dietro del quale si fa un trasporto di terra, di cui una parte, il prisma FBE, si smotterebbe senza la resistenza di questo muro. Si tratta, 1.° di valutare la forza o spinta che tende a rovesciare il muro, 2.° di determinare la forma e la dimensioni che è necessario dare al muro per resistere alla pressione.

Cominciamo da osservare che il prisma FBE determinato dal declivio naturale BF, che prenderebbero le terre abbandonate ad esse stesse, non è quello di cui lo sforzo contro il muro è il più considerabile; poichè l'inclinazione del piano del pendio è tale che l'attrito e la coesione sole ci ritengono le terre in equilibrio. Se concepiamo un seguito di piani meno inclinati di quello del declivio, e che passino tutti in B mediante la costola inferiore del prisma, ciascuno di questi piani, BH, separerà un prisma BHE il quale tende ancora a scoscendersi, poichè il prisma FBE non forma una massa solida, e tra tutti questi prismi se ne troverà necessariamente uno che avrà bisogno di una maggior forza di tutti gli altri per opporsi al suo scorrimento. Ora si chiami

P la forza orizzontale che sostiene il prisma BHE,

Q il peso di questo prisma;

φ l'angolo HBE, formato dal piano inclinato HB e la verticale;

γ la forza di coesione sopra l'unità di superficie;

f il coefficiente dell'attrito, o il rapporto della pressione normale all'attrito;

τ il complemento dell'angolo dell'attrito o l'angolo la cui cotangente $=f$;

h l'altezza EB del trasporto;

b la lunghezza della linea HB sopra la quale la coesione ha luogo;

ϖ la gravità specifica delle terre.

Abbiamo, mediante la teoria del piano inclinato, per l'equazione d'equilibrio del prisma HBE sul piano inclinato HB (*Vedi* PIANO INCLINATO, e ATTRITO).

$$P = \frac{Q(\cos\varphi - f\,\mathrm{sen}\,\varphi) - b\gamma}{\mathrm{sen}\,\varphi + f\cos\varphi}.$$

Così, non si tratta più che di determinare il valore di φ, il quale conviene al prisma della più grande spinta, e rende conseguentemente P un *maximum*.

Si cominci da osservare che il triangolo HBE rettangolo in E somministra le relazioni

$$EH = EB \,.\, \mathrm{tang}\,EBH = h\,\mathrm{tang}\,\varphi,$$

$$HB = \frac{EB}{\cos EBH}, \quad \text{ovvero} \quad b = \frac{h}{\cos\varphi}$$

donde abbiamo per l' area di questo triangolo l' espressione $\frac{1}{2}h^2\,\mathrm{tang}\,\varphi$. Se rappresentiamo il peso del prisma mediante la sua base, avremo dunque

$$Q = \frac{1}{2}\varpi h^2\,\mathrm{tang}\,\varphi.$$

Sostituendo questi diversi valori nell' equazione dell' equilibrio, essa diventerà

$$P = \frac{1}{2}\varpi h^2\,\mathrm{tang}\,\varphi\,\frac{\cos\varphi - f\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\mathrm{sen}\,\varphi + f\cos\varphi} - \frac{h\gamma}{\cos\varphi(\mathrm{sen}\,\varphi + f\cos\varphi)} \,..$$

Ponendo in quest' ultima f per $\cot\tau = \frac{1}{\mathrm{tag}\,\tau}$, potremo riportarla ad una forma molto più semplice, per mezzo delle seguenti riduzioni:

$$\frac{\cos\varphi - \dfrac{\mathrm{sen}\,\varphi}{\mathrm{tang}\,\tau}}{\mathrm{sen}\,\varphi + \dfrac{\cos\varphi}{\mathrm{tang}\,\tau}} = \frac{\mathrm{tang}\,\tau - \mathrm{tang}\,\varphi}{1 + \mathrm{tang}\,\tau \,.\, \mathrm{tang}\,\varphi}$$

$$= \mathrm{tang}\left(\tau - \varphi\right)$$

$$\cos\varphi\left(\mathrm{sen}\,\varphi + \frac{\cos\tau}{\mathrm{sen}\,\tau}\cos\varphi\right) = \frac{\cos\varphi\,(\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\tau + \cos\varphi\cos\tau)}{\mathrm{sen}\,\tau}$$

$$= \frac{\cos\varphi \,.\, \cos(\tau - \varphi)}{\mathrm{sen}\,\tau}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{tang}\,\varphi + \mathrm{tang}\,(\tau - \varphi)} \,..$$

Abbiamo ancora

$$P = \frac{1}{2}\varpi h^2\,\mathrm{tang}\,\varphi \,.\, \mathrm{tang}\left(\tau - \varphi\right) - h\gamma\left[\mathrm{tang}\,\varphi + \mathrm{tang}\left(\tau - \varphi\right)\right] \,.....\, (a),$$

il che può ancora mettersi sotto la forma

$$P=\left[\frac{1}{2}\varpi h^2+h\gamma \operatorname{tang}\tau\right]\operatorname{tang}\varphi . \operatorname{tang}\left(\tau-\varphi\right)-h\gamma \operatorname{tang}\tau \ldots\ldots (b).$$

Per avere ora il valore di φ che rende P un massimo, bisogna uguagliare a zero la differenziale del secondo membro di quest' equazione (*Vedi* Massimo), presa facendo variare la sola quantità φ. Si ha dunque

$$o=d\left[\operatorname{tang}\varphi . \operatorname{tang}\left(\tau-\varphi\right)\right];$$

ovvero

$$o=\operatorname{tang}\left(\tau-\varphi\right) . d\operatorname{tang}\varphi+\operatorname{tang}\varphi . d\operatorname{tang}\left(\tau-\varphi\right);$$

ma

$$d\operatorname{tang}\varphi=\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}, \quad d\operatorname{tang}\left(\tau-\varphi\right)=\frac{d\varphi}{\cos^2(\tau-\varphi)}.$$

Così

$$o=\cos^2\left(\tau-\varphi\right) . \operatorname{tang}\left(\tau-\varphi\right)-\cos^2\varphi . \operatorname{tang}\varphi.$$

Ponendo in luogo di ciascuna tangente il seno diviso per il coseno, viene

$$\cos\left(\tau-\varphi\right) . \operatorname{sen}\left(\tau-\varphi\right)=\cos\varphi . \operatorname{sen}\varphi,$$

il che si riduce a

$$\operatorname{sen} 2\left(\tau-\varphi\right)=\operatorname{sen} 2\varphi,$$

e dà definitivamente

$$\varphi=\frac{1}{2}\tau.$$

Questo valore essendo indipendente dalla coesione γ, si vede che il prisma della più grande spinta è lo stesso, per la medesima terra, che essa sia stata o no nuovamente rimossa. Sostituendolo in (a), si ottiene per l' espressione della forza P.

$$P=\frac{1}{2}\varpi h^2 \operatorname{tang}^2\left(\frac{1}{2}\tau\right)-2h\gamma \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\tau\right),$$

ovvero, rappresentando per abbreviare $\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\tau\right)$ con t,

$$P=ht\left[\frac{1}{2}\varpi ht-2\gamma\right] \ldots . (c).$$

2. Entrano nell' espressione P due quantità da determinare mediante esperienze; l' una è t o $\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\tau\right)$, la quale dipende dal rapporto f dell' attrito

alla pressione, e l'altra è γ o la forza di coesione sopra l'unità di superficie. La quantità f può essere osservata direttamente; quanto alla quantità γ, se si osserva a qual' altezza H la specie di terra della quale è questione si sostiene da se stessa quando essa è tagliata a picco, e che si sostituisca H in luogo di h nell'equazione (1), si avrà

$$o = Ht\left[\frac{1}{2}\varpi Ht - 2\gamma\right],$$

poichè la spinta P è nulla per quest' altezza. Se ne dedurrà

$$\gamma = \frac{1}{4}\varpi Ht.$$

e conseguentemente γ sarà conosciuto quando si conoscerà t o f.

3. Nella pratica, siccome i muri di rincalzamento sono quasi sempre destinati a sostenere delle terre nuovamente rimosse e la cui coesione è poco considerabile, è necessario di fare astrazione da questa forza nella valutazione della spinta P, per non esporsi a dare delle dimensioni insufficienti ai muri. Così limitandoci ai resultamenti capaci di un' applicazione immediata, avremo semplicemente

$$\left.\begin{array}{l} P = \frac{1}{2}\varpi h^2 . \tang^2\left(\frac{1}{2}\tau\right) \\ \text{ovvero} \\ P = \frac{1}{2}\varpi h^2 t^2 \end{array}\right\} \ldots\ldots (d),$$

e l'angolo τ sarà in questo caso l'angolo del declivio naturale della terra con la verticale. Faremo osservare che in quest' ipotesi di una coesione nulla siccome si ha sempre

$$\varphi = \frac{1}{2}\tau,$$

il prisma della più grande spinta HBE è dato dal piano inclinato che divide l'angolo del declivio naturale FBE in due parti uguali.

4. È facile dedurre dall' equazione (d) il punto dell'altezza del muro dove la potenza P può considerarsi applicata. Infatti, si conduca per un punto qualunque b di EB, una retta hb parallela ad HB, e indichiamo Eb con z la somma delle pressioni orizzontali dovute al triangolo Ehb sarà

$$\frac{1}{2}\varpi z^2 t^2,$$

la cui differenziale $\varpi zt^2 dz$ esprimerà la pressione elementare o quella che ha luogo al punto qualunque b situato alla distanza $h-z$ dal punto B. Il momento di questa pressione elementare, preso rapporto al punto B, sarà dunque

$$\frac{1}{2}\varpi t^2 z\left(h-z\right)dz,$$

e integrando quest' espressione da $z=o$ fino a $z=h$, si troverà per la somma dei momenti di tutte le pressioni orizzontali del triangolo HBE, o per il momento della loro resultante

$$\frac{1}{6}\varpi h^3 t^2 \ldots\ldots (e).$$

Dividendo questa somma per quella delle masse, $\frac{1}{2}\varpi h^2 t^2$, si ottiene $\frac{1}{3}h$; e questa è la distanza del punto B alla resultante delle pressioni. Così, il punto d'applicazione della forza che resulta dalla spinta delle terre è situato al terzo dell' altezza del trasporto, a partire dalla base.

5. Procediamo alla determinazione delle dimensioni che bisogna dare al muro di rincalzamento per rendere sufficiente la sua resistenza. Si chiami

x la grossezza ED del muro al vertice,
n il rapporto tra la base CK e l'altezza CD del declivio della facciata esterna,
Π la gravità specifica della fabbrica;

la superficie del profilo EBKD sarà espressa da

$$hx + \frac{1}{2}nh^2,$$

e si avrà per il peso del muro, rappresentandolo mediante la superficie EBKD,

$$h\left(x + \frac{1}{2}nh\right)\Pi.$$

Ora, se la resistenza del muro non è sufficiente, esso può cedere in due maniere alla spinta delle terre: può essere respinto orizzontalmente scorrendo sopra i suoi fondamenti, ovvero essere rovesciato girando intorno la costola esterna della sua base. Nel primo caso, considerando come nulla l'aderenza del filare di pietre inferiore con la superficie che lo sopporta, e indicando con ρ il rapporto del peso del muro all' attrito che esso eserciterebbe scorrendo sopra questa superficie, l' espressione

$$h\left(x + \frac{1}{2}nh\right)\rho\Pi$$

rappresenterà la resistenza del muro, e uguagliandola a quella della spinta (d), avremo l'equazione d' equilibrio

$$h\left(x + \frac{1}{2}nh\right)\rho\Pi = \frac{1}{2}\varpi h^2 t^2.$$

ricavando il valore di x da quest' equazione, otterremo

$$x = \frac{1}{2}h\left[\frac{\varpi t^2}{\rho\Pi} - n\right] \ldots\ldots (f).$$

Quando la facciata esterna del muro è verticale, come pure la sua facciata interna, si ha $n = 0$, e il valore di x diventa

$$x = \frac{h\varpi t^2}{2\rho\Pi} \ldots\ldots (h).$$

Nel caso in cui si consideri il muro come pronto a girare intorno della sua costola esterna, bisogna, per formare l'equazione d'equilibrio tra la sua resistenza e la spinta, uguagliare i momenti di queste due forze presi rapporto al

punto K considerato come il centro di rotazione. Così, osservando che l'area EBKD si compone, 1.° del rettangolo EBCD, la cui superficie è hx, e la cui distanza dal centro di gravità al punto K è

$$MK = \frac{1}{2}x + nh;$$

2.° del triangolo DCK la cui superficie è $\frac{1}{2}nh^2$, e la cui distanza dal centro di gravità allo stesso punto K è

$$NK = \frac{2}{3}nh$$

(*vedi* PONTE), avremo per il momento del muro

$$\frac{1}{2}h\left[x^2 + 2nhx + \frac{2}{3}n^2h^2\right]\Pi.$$

Quello della spinta (e) essendo lo stesso rapporto al punto K che rapporto al punto B, poichè BK è una retta parallela alle direzione della resultante di tutte le spinte orizzontali del prisma HBE, abbiamo

$$\frac{1}{2}h\left[x^2 + 2nhx + \frac{2}{3}n^2h^2\right]\Pi = \frac{1}{6}\varpi h^3t^2,$$

donde ricaveremo

$$x = h\left[-n + \sqrt{\left(\frac{\varpi t^2}{3\Pi} + \frac{n^2}{3}\right)}\right].$$

La quantità n essendo generalmente piccolissima, possiamo, senza errore sensibile, trascurare la sua seconda potenza sotto il radicale, e si ha semplicemente

$$x = h\left[-n + \sqrt{\left(\frac{\varpi t^2}{3\Pi}\right)}\right] \ldots\ldots\ (i),$$

il che, nel caso di una facciata esterna verticale, si riduce a

$$x = h \cdot \sqrt{\left(\frac{\varpi t^2}{3\Pi}\right)} \ldots\ldots\ (k).$$

6. I seguenti esempi daranno un' idea dell' uso di queste formule.

I. *Si domanda qual grossezza bisogna dare ad un muro di pietre di taglio destinato a sostenere un trasporto di terra vegetale di 8 metri di altezza.*

La gravità specifica della pietra impiegata è 2,4; quella della terra vegetale è 1,5; e si sa, di più, che il declivio naturale delle terre vegetali nuovamente rimosse è di 45°.

Abbiamo i dati $h = 8^m$; $\varpi = 1,5$. $\Pi = 2,4$; $\tau = 45°$, donde

$$\text{tang}\left(\frac{1}{2}\tau\right) = 0,4142 \text{ e } t^2 = 0,1716.$$

Ammettendo che il rapporto dell'attrito alla pressione sia 0,8 per la pietre (*vedi* RESISTENZA), faremo $p=0,8$, e la formula (h) ci darà

$$x=\frac{8\times1,5\times0,1716}{2\times0,8\times2,4}=0^{m},54.$$

Gli stessi valori sostituiti nella formula (k) produrranno

$$x=8\sqrt{\left(\frac{1,5\times0,1716}{3\times2,4}\right)}=1^{m},51.$$

Ed è a quest'ultimo valore che bisogna arrestarsi, affinchè il muro non sia esposto nè a muoversi orizzontalmente, nè ad essere rovesciato; e siccome la formula (k) darà sempre delle grossezze più grandi di quelle indicate dalla formula (h), possiamo tralasciare di effettuare il calcolo di quest'ultima.

Se il muro dovesse avere una facciata esterna in declivio bisognerebbe impiegare la formula (i), dandovi ad n il valore conveniente. Per esempio, i dati precedenti restando gli stessi, se la base del declivio della facciata esterna dovesse essere la dodicesima parte della sua altezza 8^{m}, si farebbe $n=\frac{1}{12}$, e si troverebbe

$$x=8\left[-\frac{1}{12}+\sqrt{\left(\frac{1,5\times0,1716}{3\times2,4}\right)}\right]=0^{m},84,$$

la grossezza del muro al vertice sarebbe allora $0^{m},84$, e la sua grossezza alla base $0^{m},84+\frac{1}{12}8^{m}=1^{m},51$. Si vede che è vantaggioso di costruire i muri in declivio, e che la forma triangolare sarebbe la più conveniente, se, per resistere alle cause di distruzione alle quali esso è esposto, il vertice del muro non dovesse sempre avere una data grossezza, la quale dipende dalla natura dei suoi materiali. In tutti i casi, si farà bene a dare alla sua facciata esterna il più gran declivio possibile.

II. *Il trasporto alto di* 12 *metri essendo di sabbia il cui metro cubo pesa chilogrammi* 1341, *e il muro dovendo essere costruito con quadrelli, il cui metro cubo pesa chilogrammi* 1750, *si domanda la grossezza del muro, sapendo che il rapporto dell' attrito alla pressione è per la sabbia* 0,4.

La prima cosa da determinare per poter impiegare la formula (k), è il valore di t o di $\tan\left(\frac{1}{2}\tau\right)$. La quantità data è in questo caso $f=0,4$, e siccome $f=\cot\tau$, si ha $\cot\tau=0,4$; donde $\text{Log}\cot\tau=9,6020600$. Questo logaritmo, cercato nelle tavole, fa conoscere $\tau=68°\ 11'\ 54'',92$; così $\frac{1}{2}\tau=34°\ 5'\ 57'',46$; e si trova nelle tavole

$$\text{Log}\tan\left(\frac{1}{2}\tau\right)=9,8306098;$$

se ne conclude $\tan\left(\frac{1}{2}\tau\right)$ o $t=0,677033$.

In seguito osservando che il rapporto delle gravità specifiche è lo stesso di

quello dai pesi di uno stesso volume, possiamo porre $\varpi = 1341$, $\Pi = 1750$. Sostituendo tutti questi valori in (k), viene

$$x = 12 \times 0,677033 \sqrt{\frac{1341}{3 \times 1750}}.$$

Operando per mezzo dei logaritmi, il che è sempre più pronto, e in questo caso conviene tanto più in quanto che la formola non comprende nè addizione nè sottrazione, e che di già si ha il logaritmo di 0,677033, si ottiene

$$x = 4^{m}, 11.$$

Le dimensioni calcolate mediante le formule (i) e (k) potranno essere impiegate con confidenza nella pratica, perchè in esse abbiamo fatto astrazione dalla coesione delle terre; donde resulta che la resistenza del muro non fa solamente equilibrio alla spinta, ma che essa è superiore. Ciò non ostante, siccome queste formule suppongono che la base sopra della quale il muro è elevato sia incompressibile, il che non segue mai, e inoltre che tutte le parti di questo muro siano assai bene unite tra esse per fare una sola massa la quale non può cedere che scorrendo orizzontalmente o che girando intorno di una delle costole della sua base, ipotesi pochissimo esatta, si dovrà sempre, per maggior sicurtà, aumentare un poco le grossezze date dal calcolo.

8. Il signor Magniel, al quale dobbiamo un gran numero di esperienze sopra la spinta delle terre, ha calcolato, mediante i loro resultamenti, le grossezze seguenti per i muri di rincalzamento a due facciate verticali: x esprime per tutto la grossezza ed h l'altezza.

1.° Se il trasporto è di una terra vegetale diligentemente *raddoppiata* o schiacciata, il cui metro cubo pesa mediamente chilogrammi 1108, la grossezza sarà

Per un muro in quadrelli . . . . $x = 0,16h$,
in rottami di pietra . . . . $x = 0,15h$,
in ciottoli scalpellati . . . . . . $x = 0,14h$,
in pietre di taglio . . . . $x = 0,13h$;

ammettendo in questo caso, come in seguito, che il metro cubo dal muramento in quadrelli pesi chilogrammi 1760, in rottami di pietra chilogrammi 2158, in ciottoli scalpellati chilogrammi 2363, e in pietre di taglio chilogrammi 2712.

2.° Se il trasporto è formato in terre mescolate di grossa rena, raddoppiate, il cui metro cubo pesi chilogrammi 1546, la grossezza sarà

Per un muro in quadrelli . . . . $x = 0,19h$,
in rottami di pietra . . . . . . $x = 0,17h$,
in ciottoli scalpellati . . . . . . $x = 0,17h$,
in pietre di taglio . . . . $x = 0,16h$,

3.° Se il trasporto è formato di sabbia che pesi chilogrammi 1341 per metro cubo, la grossezza sarà

Per un muro in quadrelli . . . . $x = 0,33h$,
in rottami di pietra . . . . $x = 0,30h$,
in ciottoli scalpellati . . . . . . $x = 0,30h$,
in pietre di taglio . . . . $x = 0,26h$.

4.° Se il trasporto è formato in rottami o avanzi di smalto, il cui metro cubo pesi chilogrammi 1750, la grossezza sarà

Per un muro in quadrelli . . . . $x=0,24h$,
in rottami di pietra . . . . $x=0,22h$,
in ciottoli scalpellati . . . . . . $x=0,21h$,
in pietre di taglio . . . . $x=0,17h$,

5.° Finalmente, se il trasporto è in terre argillose diligentemente raddoppiata, il cui metro cubo pesi chilogrammi 1225, la grossezza sarà

Per un muro in quadrelli . . . . $x=0,17h$,
in rottami di pietra . . . . . . $x=0,17h$,
in ciottoli scalpellati . . . . . . $x=0,15h$,
in pietre di taglio . . . . $x=0,14h$.

Queste grossezze dovranno essere un poco aumentate nella pratica, mediante l' osservaziona del paragrafo precedente.

Il signor Magniel prescrive ancora di dare ai muri di rincalzamento destinati a sostenere un trasporto di terre saponarie capaci di essere penetrate dalle acque, le seguenti grossezze:

Per un muro in quadrelli . . . . $x=0,54h$,
in rottami di pietra . . . . $x=0,49h$,
in ciottoli scalpellati . . . . . . $x=0,47h$,
in pietre di taglio . . . . $x=0,44h$,

Se queste terre non fossero soggette ad essere quasi interamente saturate dall' acque, queste dimensioni sarebbero troppo forti, e basterebbe dare le seguenti grossezze:

Per un muro in quadrelli . . . . $x=0,34h$,
in rottami di pietra . . . . . . $x=0,29h$,
in ciottoli scalpellati . . . . . . $x=0,27h$,
in pietre di taglio . . . . $x=0,24h$,

Nel caso di un terreno capace di disciogliersi mediante le acque e di prendere un declivio naturale che si avvicini all' angolo retto, bisogna fare $\tau=90°$, e la formule (i) e (k) diventano

$$x=h\left[-n+\sqrt{\left(\frac{\varpi}{3\Pi}\right)}\right]$$

$$x=h\sqrt{\left(\frac{\varpi}{3\Pi}\right)},$$

esse esprimono allora le grossezze di un muro che deve resistere alla spinta di un fluido.

9. L' esperienza ha dimostrato che a grossezze uguali i muri i più lunghi

avevano meno resistenza degli altri, è dunque necessario, quando la lunghezza del muro è un poco considerabile di stabilire dei barbacani interni o esterni i quali accuratamente siano collegati al muramento. Questi barbacani offrono dei punti d'appoggio la cui resistenza è molto più grande dello sforzo che essi sopportano, e dividono in qualche modo il muro in parti indipendenti le une dalle altre. È evidente che più essi sono vicini, meno la grossezza del muro deve essere considerabile.

10. Alcune volte il muro di rincalzamento deve sostenere, oltre la spinta delle terre, quella di altre materie soprapposte sul terreno rapportato, come un lastrico, una fabbrica, ec.; diventa allora necessario di valutare l'aumentazione della spinta che ne resulta. Supponendo il peso distribuito uniformemente sopra la superficie del terreno e chiamando p la pressione sopra l'unità di superficie, il peso portato dal prisma della più grande spinta HBE è espresso da $ph\,\mathrm{tang}\left(\frac{1}{2}\tau\right)$; bisogna dunque sostituire $Q+ph\,\mathrm{tang}\left(\frac{1}{2}\tau\right)$ invece di Q nell'equazione d'equilibrio, o, il che equivale allo stesso $\frac{1}{2}\varpi h^2t+pht$ invece di $\frac{1}{2}\varpi h^2t$. L'espressione della spinta diviene mediante ciò

$$P=\left(\frac{1}{2}\varpi h+p\right)ht^2,$$

quella del suo momento, dedotta per mezzo delle considerazioni indicate di sopra, è

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\varpi h+p\right)h^2t^2,$$

e si ha per la grossezza x del muro,

$$x=h\left\{-n+t\sqrt{\left(\frac{\varpi+\frac{3p}{h}}{3\Pi}\right)}\right\}.$$

Vedi: il Coulomb, *Raccolta di Memorie*. — Il Prony, *Ricerche sopra la spinta delle terre*. — Il Magniel, *Trattato della spinta delle terre*.

SPIRALE (*Geom.*). Linea curva di una specie circolare la quale si allontana continuamente da un punto, che si chiama il suo centro, sempre girando intorno di esso.

Si distinguono diverse specie di spirali, tra le quali la più celebre è quella di Conone; essa è particolarmente conosciuta sotto il nome di *Spirale di Archimede*, perchè questo gran geometra fu il primo a scoprirne le proprietà. Esporremo la costruzione di alcune di queste curve.

Spirale di Archimede. Immaginiamo che il raggio AC del circolo C (*Tav.* XLVII, *fig.* 9) si muova uniformente intorno del centro in modo che la sua estremità A descriva la circonferenza nello stesso tempo che un punto, partito dal centro, percorre con un moto uniforme il raggio AC; il moto di questo punto, considerando la sua traccia sul piano del circolo, genererà una curva $Cmm'm''m'''$A che è la *spirale di Archimede*.

Dopo una prima rivoluzione del raggio CA, possiamo immaginarne una seconda nel tempo della quale il punto continua a muoversi sul suo prolungamento, in

modo da percorrere una lunghezza uguale ad AC nel tempo di questa rivoluzione; e dopo questa seconda, una terza, poi una quarta e così di seguito, il che dà il mezzo di prolungare la spirale all' infinito.

Per descrivere questa curva per punti, si dividerà la circonferenza del circolo in parti uguali, in 10 per esempio, poi si dividerà il raggio AB in 10 parti uguali, ed avendo condotto per ciascuno dei punti di divisione p, p', p'', ec., dalla circonferenza i raggi Cp, Cp', Cp'', ec., si porterà sul primo raggio Cp, da C in m una delle 10 parti del raggio AC; sul secondo raggio Cp', si prenderà Cm', uguale a 2 decimi del raggio; sul terzo raggio Cp'', si prenderà Cm'' uguale ai tre decimi del raggio, e così di seguito. I punti m, m', m'', ec. apparterranno alla spirale.

Mediante la costruzione di questa curva, il rapporto tra uno qualunque dei suoi raggi vettori Cz e il raggio AC del circolo è lo stesso di quello dell' arco corrispondente A$p'x$ alla circonferenza intera; così indicando con z il raggio vettore, con r quello del circolo, con c la sua circonferenza e con v l' arco A$p'x$, avremo

$$z : r :: v : c;$$

donde

$$z = \frac{rv}{c}.$$

Tale è l' equazione della spirale di Archimede. Osservando che $\frac{r}{c}$ è una quantità costante uguale a $\frac{1}{2\pi}$, π esprimendo il numero 3,1415926 ec., possiamo dare a quest' equazione la forma più semplice $z = av$, rammentandosi che $a = \frac{1}{2\pi}$.

La rettificazione di questa curva non può ottenersi che per approssimazione, poichè sostituendo nell' espressione

$$ds = \sqrt{\left[dz^2 + z^2 \cdot dv^2\right]}$$

dalla quale dipende la rettificazione delle curve espresse in coordinate polari (*Vedi* RETTIFICAZIONE n.° 6), i valori di z^2 e di dz^2 ricavati da $z = av$, e sostituiti danno,

$$ds = \sqrt{\left[a^2dv^2 + a^2v^2dv^2\right]}$$

$$= adv \cdot \sqrt{\left[1 + v^2\right]},$$

espressione la quale non può integrarsi che per serie o logaritmi, e la quale dipende evidentemente dalla rettificazione della parabola (*Vedi* RETTIFICAZIONE, n.° 4).

La quadratura della spirale dipende da quella del circolo e ancora non può ottenersi che per approssimazione, ma essa presenta una particolarità osservabile che dobbiamo indicare. Sostituendo nell' espressione generale

$$S = \frac{1}{2}\int z^2 dv$$

della quadratura delle curve riferite e coordinate polari il valore di dv preso dall' equazione $z = av$, vieoe

$$S = \frac{1}{2}\int a^2v^2dv = \frac{1}{2}a^2\int v^2dv$$

$$= \frac{1}{6}a^2v^3 + costante.$$

Prendendo l' area a partire dall' origine e ponendo invece di a^2 il suo valore $\frac{1}{4\pi^2}$, si ha dunque per l' area della spirale compresa tra la curva e il raggio vettore corrispondente all' arco v, l' espressione

$$S = \frac{v^3}{24\pi^2}.$$

Se prendiamo per *unità* il raggio r del circolo, la sua circonferenza c sarà espressa da 2π, e se allora si fa l' arco v uguale a 2π, si avrà per l' espressione della superficie interna $Cmm'm''m'''m''''zA$,

$$S = \frac{1}{3}\pi.$$

Ora, in questo caso, siccome si tratta di unità quadrate, π rappresenta la superficie del circolo; così *la superficie della spirale è il terzo di quella del circolo.*

Qui si tratta semplicemente della spirale della prima rivoluzione o, come si chiama, della *prima spira*. Per le altre *spire*, bisogoa osservare che a ciascona nuova rivoluzione del raggio del circolo esso ripassa sopra le aree tracciate delle precedenti rivoluzioni, dimodochè quest' aree si aggiungono le une alle altre; così, se si domandasse l' area che termina all' m^{esima} rivoluzione, non bisognerebbe prendere l' integrale da $v = 0$ fino a $v = 2\pi$, ma bensì da

$$v = (m-1) . 2\pi \text{ fino a } v = m . 2\pi.$$

Con questo metodo si trova

$$S = \frac{m^3-(m-1)^3}{3}\pi,$$

m indicando il numero delle *spire.* Così, si ha per 2 *spire*, $S = \frac{7}{3}\pi$; per 3; $S = \frac{19}{3}\pi$; per 4, $S = \frac{37}{3}\pi$; ec. Paragonando ciascuna di quest' aree con quella del circolo circoscritto corrispondente che successivamente è π, 4π, 9π, 16π, ec., si vede che l' area della seconda rivoluzione sta al circolo circoscritto come 7 : 13, che quella della terza rivoluzione sta al circolo circoscritto come 19 : 27, ec. Rapporti trovati da Archimede con l' aiuto di costruzioni geometriche tanto complicate che il Viete ha messo in dubbio la loro esattezza, e che il Bouillaud ha confessato ingenuamente che non le aveva mai ben comprese. Se prendiamo le differenze tra l' aree di due rivoluzioni e l' area di una sola rivolu-

zione, si ottiene per l'area della *seconda spira* considerata isolatamente 2π; e operando nella stessa maniera, si trova che l'aree delle terze, quarte, ec., spire sono respettivamente 4π, 6π, 8π, ec.; donde resulta, in generale, che l'area dell' m^{tima} spira, vale e dire, l'area compresa tra la superficie della $(m-1)^{tima}$ rivoluzione e l' m^{tima} rivoluzione, è uguale a $(m-1)$ volte l'area della seconda spira. Proprietà trovata ancora da Archimede.

Spirale Logaritmica o Logistica. Essa differisce dalla spirale di Archimede in ciò, che i suoi raggi vettori Cm, Cm', Cm'', ec., in luogo di crescere in progressione aritmetica, crescono in progressione geometrica.

Spirale Parabolica o Elicoide. Se s'immagina che l'asse di una parabola comune o apolloniana sia rotolata sopra la circonferenza di un circolo (*Tav.* CXLIX, fig. 1), l'origine essendo al punto B, tutte le ordinate della parabole Cm, Dn, Eo, ec., concorrono verso il centro A e la curva $BmnFA$ che passa per l'estremità di queste ordinate sarà l'*elicoide*.

Indicando con z un raggio vettore Am, con v l'arco del circolo corrispondente BC, e con p il parametro della parabola, la natura di queste curva sarà espressa dall'equazione $z^2=pv$.

Spirale di Pappo. Curva formata sopra la superficie della sfera nell'istesso modo che quella di Archimede è generata sopra un piano; vale e dire che un quarto di circolo massimo si suppone girare uniformente intorno del suo raggio, nel mentre che un punto lo percorre uniformente e descrive una linea curva sopra la superficie della sfera. Questa spirale è evidentemente una curva e doppia curvatura.

Si è considerato ancora una quantità immensa di altre spirali per le quali dobbiamo rimandare alla *Storia dell' Accademia delle scienze* di Parigi, 1704.

SPIRICHE (*Geom.*). Le *Linee Spiriche* sono curve inventate da Perseo, e le quali resultano dalla sezione, fatta da un piano, del solido generato dalla rivoluzione di un circolo intorno di una delle sue corde, o di una delle sue tangenti, o ancora da qualche linea esterna. Queste curve, di una forma singolarissima, non sono state l'oggetto di alcuna ulteriore ricerca. (*Vedi* Montucla *Hist. des Math.*, tom. 1).

SPRONE (*Arch.*) Sostegno situato nell'angolo di due parti di una costruzione, di cui l'una sale al di sopra dell'altra.

Il seguente problema può trovare le sua applicazione nell'architettura.

Problema. *Essendo dato un pezzo di legno* AB (*Tav.* CCXXXVI, *fig.* 1) *sostenuto da un altro pezzo verticale, si domanda la posizione di uno sprone* mn *di una lunghezza data perchè il pezzo* AB *sia sostenuto il meglio che sia possibile.*

Rappresentiamo la forza assoluta dello sprone con la retta mn; siccome questa forza è obliqua al pezzo AB, si decomporrà in due altre nA, nD, costruendo il parallelogrammo $AnDm$. Ora, la forza nD sosterrà il pezzo AB; e se si concepisce che questo pezzo faccia sforzo per girare sul punto di appoggio A, nA sarà il braccio della leva per mezzo del quale la forza nD fa resistenza; dunque il prodotto $nA \times nD$ dev'essere un *maximum*.

Sia ora $mn=a$, $nD=mA=x$, si avrà nel triangolo rettangolo Amn,

$$\overline{mn}^2=\overline{mA}^2+\overline{nA}^2;$$

donde

$$nA=\sqrt{(a^2-x^2)}$$

e, per conseguenza,

$$nA \times nD = x\sqrt{\left(a^2-x^2\right)}.$$

Questa quantità dovendo essere un *maximum*, bisogna uguagliare la sua *differenziale* a zero (*Vedi* Massimi); dunque

$$\sqrt{\left(a^2-x^2\right)}dx - \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = 0.$$

Dividendo per dx e riducendo, si ottiene

$$a^2-2x^2=0 \quad \text{ossia} \quad x=\frac{1}{2}a\sqrt{2}.$$

Questo valore c'insegna che x dev'essere il lato di un quadrato di cui a è la *diagonale* (*Vedi* Diagonale). Così, l'angolo Amn che lo sprone fa col pezzo verticale AC, dev'essere di 45°, o la metà di un angolo retto.

SPORADI (*Astron.*). *Vedi* Sparsili.

SQUADRA (*Geom.*). Instrumento di legno o di metallo, composto di due gambe fisse agginstate perpendicolarmente l'una all'estremità dell'altra, e il quale serve a trovare degli angoli retti o a condurre delle perpendicolari sopra una linea data (*vedi Tav.* CCXXXVI, *fig.* 2).

Si verifica l'esattezza di una squadra nella seguente maniera: avendo descritto un semicircolo sopra un diametro preso a piacere, gli si applica la squadra in modo che uno dei suoi bracci tocchi un'estremità del diametro nel mentre che il suo vertice tocca un punto qualunque della circonferenza, come nella figura citata; allora se la squadra è esatta, bisogna che l'altro braccio tocchi l'altra estremità del diametro. Infatti, in questa situazione, l'angolo dei due bracci della squadra ha per misura la metà dell'arco che essi comprendono, e conseguentemente non può essere un angolo retto se quest'arco non è la semicirconferenza intera, vale a dire, se i due bracci non toccano le due estremità del diametro.

SQUADRA D'AGRIMENSURA. Circolo grosso di rame diviso in quattro parti uguali da due rette che si tagliano al centro ad angolo retti, e la cui estremità son guarnite di traguardi. Questo instrumento serve a tirare delle perpendicolari sul terremo, e a prendere degli allineamenti.

La squadra d'agrimensore ha recentemente cambiato di forma, e attualmente essa consiste in una specie di *prisma ottogonale*, il quale in luogo di traguardi, ha quattro fessure perpendicolari le quali servono allo stesso uso. Gli vien dato il nome di *squadra ottogona*.

Si attacca con viti l'una e l'altra di queste squadre all'estremità rotondata di un bastone di cui l'altra estremità è guarnita di un ferro appuntato, in modo da poterlo far penetrare nella terra.

Per condurre da un punto dato una perpendicolare sopra una retta, si opera nella seguente maniera: sia AC (*Tav.* VI, *fig.* 4), la retta tracciata sul terreno o data dagli allineamenti delle biffe; avendo piantato verticalmente il bastone d'agrimensore al punto dove si vuole elevare la perpendicolare, si attacca con viti la squadra e si gira in modo che l'occhio, situato successivamente a due traguardi opposti, veda le biffe A e C piantate sopra la retta AC; ciò fatto, e l'instrumento rimanendo fisso, si riguarda per i due altri traguardi se si scorge la biffa che si è inviato a presentare mediante l'aiuto agrimensore nella direzione di questi

traguardi, facendo segno all' aiuto di avanzare o di allontanare fintantochè la biffa sia esattamente in E o in B sul raggio visuale; allora al segnale convenuto, l' aiuto pianta la sua biffa, e non si tratta più che di condurre una retta per il piede della squadra e per il piede della biffa, per avere la perpendicolare domandata.

Tutti i problemi che si possono eseguire sul terreno con l' aiuto della squadra d' agrimensore, non sono che modificazioni di questo, e non presentano maggiori difficoltà. *Vedi* Il nuovo trattato d' agrimensura di *A. Lefebvre*.

STADERA (*Mec.*). Specie di bilancia chiamata in altri termini BILANCIA ROMANA. (*Vedi* QUESTA PAROLA).

STAGIONE (*Astron.*). S' intendono comunemente per *stagioni* certe parti dell' anno solare, che sono distinte dalla diversa loro temperatura, e segnate dai punti che occupa il sole nel cielo. Così dicesi *primavera* la stagione in cui il sole comincia a rianimare la vegetazione ed entra nel primo grado dell' Ariete; e questa stagione dura finchè il sole giunga al primo grado del Cancro. Comincia allora l' *estate*, che dura finn a che il sole tocchi il primo grado della Libbra. In quel momento si entra nell' *autunno*, che continua finchè il sole si trovi nel primo grado del Capricorno. Finalmente regna l' *inverno* dal primo grado del Capricorno al primo grado dell' Ariete.

STANTUFFO (*Idraul.*). Cilindro di legno o di metallo che si muove in un corpo di tromba per sollevare l' acqua. (*Vedi* TROMBA).

STATICA. (*Mat. Appl.*). Uno dei rami fondamentali dalla meccanica. Essa ha per oggetto le leggi dell' equilibrio delle forze che muovono i corpi.

La statitica si divide in due parti di cui l' una considera l' equilibrio nei corpi solidi, e l' altra l' equilibrio nei corpi fluidi. La prima conserva più particolarmente il nome di *Statica*, la secunda prende quello d' *idrostatica*, (*Vedi* MAT. APPL., MECCANICA, e i diversi articoli che riguardano le macchine semplici: LEVA, PIANO INCLINATO, PULEGGIA, VERRICELLO, CONIO, VITE. *Vedi* ancora FORZA, CENTRO DI GRAVITÀ e IDROSTATICA).

STATISTICA (*Mat. appl.*). Scienza moderna che ha per oggetto la descrizione delle forze produttive di un paese, l' inventario della sue ricchezze, il movimento dalla sua popolazione, in una parola tutti i documenti della economia politica.

STAZA. Si dà questo nome ad un regolo graduato che serve a misurare la capacità di ogni sorta di botti e a determinare la quantità di liquido che esse contengono.

Stazare è dunque l' arte di trovare la capacità di un vaso. Se le botti fossero sempre di una forma regolare, non si tratterebbe in questo caso che di applicare le regole ordinarie della geometria; ma siccome ciò non ha mai luogo, si è dovuto nella pratica ricorrere e certe regole empiriche che danno una approssimazione sufficientemente rigorosa per gli usi ordinarj del commercio.

Così, in Inghilterra, Hutton e Oughtred, e, in Francia, Dez hanno dato dalle formule più o meno esatte. Ecco quella di Hutton: Si prende

39 volte il quadrato del diametro nel colmo delle botte,
25 volte il quadrato del diametro del fondo,
26 volte il prodotto di questi diametri.

Si moltiplica la somma di queste tre quantità per l' altezza della botte a si divide il prodotto per 114: il quoziente indica il numero dei pollici cubici contenuti nella botte.

La regola proposta da Oughtred consiste nel prendere: 1.° la superficie del circolo del fondo; 2.° due volte la superficie dal circolo del colmo; nel sommare questi due numeri, e nel moltiplicarne la somma pel terzo della lunghezza della botte: il prodotto dà la capacità del vaso.

Dez in un articolo molto dettagliato della *Enciclopedia metodica* (*Jaugeage*) dà la seguente formula:

Si prende la differenza tra il diametro del colmo della botte e quello del suo fondo, quindi si sottraggono i $\frac{3}{8}$ di questa differenza dal diametro maggiore, e così si otterrà il diametro di un circolo che si dovrà calcolare, e che si moltiplicherà per l' altezza della botte.

Indicando dunque con V il volume, con l l' altezza della botte, con D il diametro del suo colmo, con d quello del fondo, con a la loro differenza D—d, si otterrà:

$$\text{Hutton} \ldots\ldots\ V = l \cdot \frac{39D^2+25d^2+26Dd}{114},$$

$$\text{Oughtred} \ldots\ldots\ V = 0,2618\, l\left(2D^2+d^2\right),$$

$$\text{Dez} \ldots\ldots\ V = 0,7854\, l\left(D-\frac{3}{8}a\right)^2.$$

La *Staza*, strumento col quale si prendono tutte queste misure, è di differenti forme: così vi è: 1.° la *staza spezzata* o *staza diagonale*; 2.° la *staza a uncino*; 3.° la *staza a nastro*. Quest' ultima si compone di un nastro ingommato, diviso in 234 centimetri, per mezzo del quale si prendono le dimensioni esterne del vaso, donde si conclude la sua capacità deducendone la grossezza del legno.

Le altre due staze sono regoli a quattro facce, ognuna delle quali ha 9 millimetri di larghezza in alto e 6 in basso, e sopra due facce vi sono delle graduazioni segnate con numeri di 5 in 5. Ogni grado di una di queste facce indica un decalitro, 10 gradi fanno un ettolitro. L' altra faccia, che si dice *lato piccolo*, non serve che pei barili di 15 in 30 litri; ogni grado della medesima vale un litro.

S' introduce il regolo diagonalmente per l' apertura circolare che vi è nel colmo della botte, finchè s' incontri il fondo nella parte opposta alla bocca della botte, onde ottenere la massima distanza obliqua di questo fondo dal centro dell' orifizio. Si nota la cifra che indica il regolo: si volta quindi la staza dall' altra parte della botte per assicurarsi che la bocca sia esattamente nel mezzo della medesima; e se vi fosse una differenza, si prenderebbe la semisomma dei due resultati, e si avrebbe il numero dei decalitri che contiene la botte.

Si vede che il regolo introdotto per l' orifizio della botte, e spinto fino all'angolo opposto formato dal fondo e della parete verticale della botte, rappresenta l' ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui uno dei cateti è la metà dell' altezza della botte, e l' altro cateto è il fondo della medesima: poichè si suppone che la botte abbia una forme cilindrica di cui la staza attraversi in tal modo obliquamente la mezza capacità.

L' importanza della stazzatura dei recipienti come mezzo esatto di una giusta imposizione ha fatto cercare tutti i mezzi possibili di perfezionare questi strumenti. L' esposizione dei saggi fatti da Pellevilain e da Allouard, per quanto commendevolissimi, non può trovar luogo in questo Dizionario: se ne troveranno le più estese particolarità nel *Manuale* degl' impiegati delle gabelle di Parigi.

STAZIONARIO (*Astron.*). Si dice che un pianeta è *stazionario* quando sembra che per qualche tempo rimanga nel medesimo punto dello zodiaco. È questa una illusione ottica prodotta dalla combinazione dei moti reali della terra e del pianete.

STELLA (*Astron.*). Nome col quale s' indicevano una volta tutti i corpi celesti, dividendoli in *stelle fisse*, e in *stelle erranti* o *pianeti*. Presentemente non si dà più il nome di *stella* che agli astri che sono luminosi di per se stessi e che compariscono affatto estranei al nostro sistema solare; gli altri sono indicati coi nomi particolari di *pianeti*, *comete*, *satelliti*, ec. Pel diversi movimenti di questi corpi si vedano gli articoli Armillare, Precessione e Nutazione.

Oltre la maniera di distinguere le stelle le une dalle altre separandole in gruppi chiamati *costellazioni* (*Vedi* Costellazione *e* Catalogo), gli astronomi costumano di classarle per ordine di grandezza, secondo il loro maggiore o minore splendore apparente. Così le stelle più brillanti si dicono di *prima grandezza*, le altre di *seconda*, di *terza*, ec., secondochè la luce di cui brillano è più o meno intensa. Questa classificazione non comprende più di sette ordini di grandezza per le stelle che si vedono a occhio nudo; ma, col soccorso del telescopio, essa si estende fino alla *sedicesima grandezza*, e si può dire che non ha altri limiti che quelli degli strumenti, perchè noi non possiamo dubitare che un accrescimento nel potere amplificante dei telescopj non fosse per renderci visibili una moltitudine di stelle troppo da noi lontane per poterle scorgare coi mezzi attuali.

Sebbene sia quasi impossibile l'assegnare con esattezza i limiti ove cominciano e dove finiscono i differenti ordini di grandezza, pure si è generalmente convenuto di non comprendere nel primo ordine che le 20 seguenti stelle principali:

Nomi delle stelle	*Costellazioni di cui fanno parte*
Aldebaran	Il Toro
Castore	I Gemelli
Regolo	Il Leone
La Spiga della Vergine	La Vergine
Antares	Lo Scorpione
La Capra	Il Cocchiere
Arturo	Boote
Wega	La Lira
Altair	L' Aquila
Deneb Adigega	Il Cigno
Acarnar	L' Eridano
Betelgeuse	Orione
Rigel	Orione
Canopo	La Nave
Sirio	Il Cane maggiore
Procione	Il Cane minore
Il cuore dell' Idra	L' Idra
Fomalhaut	Il Pesce australe
Il piede della Croce	La Croce australe
La gamba del Centauro	Il Centauro

Le 50 o 60 stelle che vengono dopo di queste sono della seconda grandezza, se ne contano circa 200 nella terza, ed un assai maggior numero nelle altre.

Herschel ha trovato che indicando con 100 la quantità di luce emanata da una

stella di prima grandezza, i numeri segnenti rappresentano con sufficiente esattezza i rapporti dei diversi ordini:

Luce di una stella media di 1^a grandezza		= 100
2^a	»	= 25
3^a	»	= 12
4^a	»	= 6
5^a	»	= 2
6^a	»	= 1

Il figlio di questo grande osservatore ha concluso dalle sue proprie esperienze che la luce di Sirio, la più brillante delle stelle, egoaglia circa 324 volte quella di una stella media di sesta grandezza

Il numero delle stelle sembra infinito, perchè osservando col telescopio quelle piccole macchie biancastre che si scorgono nel cielo e che diconsi *nebulose*, vi si scopre una moltitudine di stelle estremamente vicine le uno alla altre, e la cui luce confusa per l'effetto della irradiazione non presenta all'occhio nudo che un chiarore presso a poco uniforme. Quella grande zona bianca o luminosa che attraversa il cielo da un polo all'altro e che dicesi la *via lattea* non è che una nebulosa di questo genere. Herschel coi suoi telescopj di un potere amplificante straordinario ha per così dire analizzata la via lattea, ed ha riconosciuto che essa è interamente composta di stelle, delle quali ha potuto contarne fino a 50000 comprese nel solo intervallo di due gradi.

Fino ai nostri tempi le osservazioni le più delicate non avevano potuto determinare la parallasse di nessuna stella (*Vedi* PARALLASSE), e per conseguenza ci era affatto ignota la distanza alla quale si trovano questi corpi da noi. Ciò non ostante, siccome era provato che questa parallasse doveva esser minore di un *secondo sessagesimale* per le stelle più vicine alla terra, così si sapeva che ne eravamo separati da una distanza maggiore di 6720000000000 leghe di 25 per grado; poichè, ammettendo una parallasse di un secondo, la stella che ce l'avrebbe data sarebbe stata situata ad una distanza dal sole equivalente a 200000 volte la distanza della terra dal sole, ossia a 4800000000 semidiametri terrestri. Recentemente però il celebre astronomo Bessel ha trovato con osservazioni accuratissime e con un metodo ingegnosissimo che la 61^a stella del Cigno ha una parallasse di un terzo di secondo o più precisamente di $0'',31$. Questa parallasse corrisponde ad una distanza equivalente a 600000 volte quella del sole dalla terra, ossia a 14400000000 semidiametri terrestri. *Vedi* DISTANZA.

Le stelle sembrano in generale conservare una posizione invariabile nella volta celeste, poichè dai più remoti tempi dell'astronomia le figure delle costellazioni non hanno provato nessun cangiamento sensibile. Perciò questi astri sono i punti fissi nel cielo ai quali gli astronomi riferiscono i moti dei pianeti per misurare le loro rivoluzioni. Ciò non ostante si è scoperto che parecchie stelle sono animate da un moto proprio, ed è sommamente probabile che lo stesso abbia luogo per tutte le altre. Noi non intendiamo qui di parlare di moti apparenti, come quelli che resultano dalla *precessione*, dalla *nutazione* o dall'*aberrazione* della luce, e che appartengono nel tempo stesso a tutti i corpi celesti, ma di moti veramente reali, il cui effetto è quello di cangiare la relazione delle distanze. Per esempio, la stella 61^a del Cigno da soli 50 anni s'è spostata nel cielo di $4'\ 23''$, mentre altre stelle hanno impiegato parecchi secoli per subire spostamenti assai meno considerevoli.

Il moto proprio delle stelle fu annunziato da Halley come uno dei resultati

dei suoi lavori sul confronto delle posizioni di questi corpi date dagli antichi con quelle risultanti dalle nuove osservazioni. Questa circostanza notabile, riconosciuta in seguito da Cassini e da Lemonoier, fu infine compiutamente confermata da Tobia Mayer, che confrontò i luoghi di 80 stelle determinati da Roemer colle sue proprie osservazioni, e trovò che la maggior parte di questi astri avava provato delle variazioni di posizione. Egli volle spiegare questo fenomeno supponendo che fosse un' apparenza dovuta ad moto progressivo del sole e di tutto il sistema solare verso una parte dello spazio; ma siccome il resultato delle osservazioni non era intaramente d' accordo con questa teoria, notò che non si poteva concluder nulla dalle direzioni divergenti di alcune stelle prima che fosse permesso di studiarle con maggior cura per molti secoli.

È senza dubbio molto probabile che il sistema solare non occupi costantemente lo stesso luogo nello spazio, e non è difficile il comprendere che il sole girando intorno ad un centro di attrazione, tragga seco in questo suo moto tutti i pianeti, nel modo medesimo che Saturno gira intorno al sole insieme coi sette satelliti che l' accompagnano. Ora, per le leggi della prospettiva, se il sole si muove in una direzione qualunque, il resultato, in quanto a noi, di un moto simile deve essere una tendenza apparente dal sistema intero delle stelle a muoversi in un senso contrario alla direzione reale del sole, verso il punto della sfera ove convergono le linee parallele a questa direzione, vale a dire che tutte le stelle debbono sembrare approssimarsi a questo punto.

Sebbene le direzioni apparenti dei moti propri delle stelle osservate fino ad oggi siano troppo divergenti per potere indicare una tendenza comune verso un punto del cielo piuttosto che verso un altro, pure Herschel ha creduto che, tenendo conto delle deviazioni particolari prodotte dai moti individuali, potessa scorgersi un moto generale delle stelle principali, che la trasporta in un punto della sfera celeste diametralmente opposto alla stella della costellazione di Ercole indicata sulle carte colla lettera ζ; donde resulterebbe che il sole si movesse nella direzione di questa stella.

Se le stelle fossero fisse in un modo assoluto, non vi è dubbio che lo spostamento del sole nello spazio dovrebbe dar loro un moto generale apparente verso un medesimo punto: ma se questi corpi hanno dei moti reali particolari, come è impossibile il dubitarne, il loro spostamento osservato sulla volta celeste diviene il resultato di due cause differenti; e secondochè queste cause concorrono o divergono, la direzione dei moti deve avvicinarsi o allontanarsi dalla direzione generale apparente. Così le osservazioni che sembrano oggi contrarie alla ingegnosa ipotesi di Tobia Mayer potranno forse un giorno, quando i moti reali delle stelle saranno meglio conosciuti, divenirne la piena conferma. Fino ad ora la scienza non può pronunziare una decisione in un modo certo.

Le stelle presentano ancora dei fenomeni notabilissimi che sono stati esposti in altri articoli. *Vedi* Cangianti, Multiplo e Nebulosa.

STEREOGRAFIA. Arte di disegnare le figure dei solidi sopra un piano. È la prospettiva dei solidi. *Vedi* Prospettiva.

STEREOGRAFICO (*Prosp.*). La *projezione stereografica* è quella projezione nella quale s' immagina l' occhio posto sulla superficie della sfera. Se ne fa uso particolarmente nella costruzione dei mappamondi; e alla parola Projezione ne abbiamo accennate le proprietà principali.

La nostra intenzione era di esporre in questo punto i metodi pratici di cui si fa uso nella costruzione delle carte geografiche; ma la necessità in cui ci troviamo di non oltrepassare i limiti prescritti a questo Dizionario ci obbliga ad inviare i nostri lettori alle opere speciali, e fra le altre al *Trattato di topografia* di Puissant.

STEREOMETRIA. (*Geom*) (da στερεος, *solido* e da μετρον, *misura*). Parte della geometria che ha per oggetto la misura del volume dei corpi. (*Vedi* Solido).

STEREOTOMIA (*Arch.*). Dicesi così l'arte di tagliare pietre secondo i diversi usi ai quali sono destinate nella costruzioni dell'architettura.

STEVINO (Simone), celebre matematico, nato a Bruges verso la metà del secolo decimosesto, si stabilì in Olanda, ove fu fatto ingegnere delle dighe. Questo è quanto si sa della sua vita, e s'ignora perfino l'epoca della sua morte. Insieme con Guid' Ubaldo del Monte fu il primo che facesse fare notabili progressi alla meccanica: arricchì la statica e l'idrostatica di molte verità nuove: riconobbe la vera proporzione della potenza al peso nel piano inclinato, e la determinò giustamente in tutti i casi diversi, e qualunque sia la direzione della potenza: risolse una quantità di quesiti di meccanica, trattò in modo nuovo la fortificazione per sostegni e la navigazione, e lasciò sopra i diversi rami di sapere cui aveva coltivati, opere che non poco hanno contribuito ai progressi della scienza. Le opere di Stevino sono: I *La pratica dell'aritmetica* (in olandese), Anversa, 1585, in-8; II *Problematum geometricorum libri V*, ivi, 1585, in-4; III *Principj di statica e di idrostatica* (in olandese), Leida, 1586, in-4; IV *Nuovo sistema di fortificazione* (in olandese), ivi, 1586, in-4; V *Libri tres de motu coeli*, ivi, 1589, in-8; VI *Trattato di navigazione* (in olandese), ivi, 1599, In-4; tradotto in latino da Grozio col titolo: *Limen heureticon seu portuum investigandorum ratio*, ivi, 1624, in-4. Le *Opere* di Stevino furono raccolte e pubblicate a Leida nel 1605, 2 vol. in fol. Snellio ne tradusse la maggior parte in latino col titolo: *Hypomnemata, id est de cosmographia, de praxi geometrica, de statica, de optica, ec.*, ivi, in-fol. Alberto Girard le tradusse in francese, Leida, Elzevir, 1634, in-fol., dividendole in sei parti: la prima contiene il trattato di aritmetica, I sei libri di algebra di Diofanto alessandrino, tradotti dal greco (i primi quattro da Stevino e gli altri due da Girard), la pratica dell'aritmetica, e finalmente la spiegazione del decimo libro di Euclide; la seconda, la cosmografia, vale a dire la dottrina dei triangoli, la geografia e l'astronomia; la terza, la pratica della geometria; la quarta l'arte ponderaria o la statica; la quinta, l'ottica; e finalmente l'ultima, la castrametazione, la fortificazione per sostegni e il nuovo sistema di fortificazione. Sopra questo matematico si consulti la *Storia dell'astronomia* di Weidler, e la *Storia delle matematiche* di Montucla, non meno che l'articolo che lo riguarda nella *Biografia universale*.

STEWART (Matteo), dotto geometra inglese, nato nel 1717 a Rothsay, nell'isola di Bute, studiò le matematiche sotto il celebre Maclaurin, e furono tali i progressi che fece in queste scienze, che alla morte di quel professore gli fu conferita la cattedre di matematiche da esso lasciata vacante nella università di Edimburgo. Scrisse parecchie memorie inserite negli atti della società di Edimburgo, e pubblicò separatamente molte opere, tra le quali sono principalmente da notarsi: I *Teoremi generali*, 1746, che contengono un compiuto sviluppo di quelle importanti e curiose proposizioni cui Euclide diede il nome di *Porismi*; II *Trattati fisici e matematici*, 1761; In questi trattati Stewart cercò d'introdurre nalle parti trascendenti delle matematiche miste la forma rigorosa e semplice delle antiche dimostrazioni; III *Propositiones more veterum demonstratae*: sono queste una serie di teoremi geometrici per la più parte nuovi, risoluti coll'analisi e poi dimostrati sinteticamente invertendo l'analisi stessa. In tutti gli scritti di Stewart brillano in tutta la sua purezza i metodi eleganti dell'antica geometria, della quale egli aveva fatto uno studio particolare e che si lamentava fosse troppo trascurata dai moderni matematici. Questo professore morì il 23 Gennajo 1785, e gli successe nella cattedra di matematiche il suo figlio Dugald Stewart, che già era stato fatto suo aggiunto fino dal 1775.

STIRLING (Giacomo), distinto matematico inglese, naeque verso la fine del secolo decimosettimo ad Oxford, e fece i suoi studj nella celebre università di questa città. Non era che semplice studente quando pubblicò la prima sua opera intitolata: *Lineae tertii ordinis neutonianae, sive illustratio tractatus Neutoni de enumeratione linearum tertii ordinis*, Oxford, 1717, in-8: in essa dimostra che Newton aveva trascurato due linee del terzo ordine; Gua de Malves osservò poi che tanto Newton che Stirling ne avevano omesse altre quattro. Comunque sia, tale scritto gli fece molto onore, e non andò molto che fu eletto membro della Società Reale di Londra. Qualche tempo dopo giustificò tale scelta con una nuova opera, che è il vero fondamento della sua reputazione. È il suo *Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, Londra, 1730, in-4. In questo secondo scritto, Stirling è uno dei primi che abbiano fatto aggiunte alle scoperte di Moivre sulla teoria delle serie. Ammettendo i principj di tale autore, ma tenendo un' altra via, pervenne egli stesso a nuove scoperte importantissime e numerosissime, l' analisi delle quali può vedersi nella *Storia delle matematiche* di Montucla, tom. III, pag. 233, e segg. » Esse partono tutte, dice il prefato autore, dal principio che quando una serie non è sommabile in termini finiti, conviene aggiungere la somma di un piccolo numero di termini della serie proposta a quella di un piccolo numero di termini di un' altra serie sommamente convergente, e che tanto più rapidamente converge quanto è maggiore il numero dei termini presi nella prima. Dieci o dodici termini di ciascuna fanno ordinariamente lo stesso effetto che più migliaja di una sola ». Trovasi nello stesso autore, tom. III, pag. 300 un ragguaglio particolarizzato della seconda parte del *Methodus differentialis*, nella quale Stirling tratta con molto ingegno della interpolazione delle serie. Si ha pure di Stirling una memoria in inglese *Sulla figura della terra e sulle varietà della gravità sulla superficie di essa*, la quale fu stampata nel 1735 nel vol. 39 delle *Transazioni filosofiche*. Non si conosce l' anno preciso della sua morte; ma è da supporsi che non vivesse lungo tempo dopo la ristampa del suo *Methodus differentialis* fatta nel 1764.

STOEFFLER o **STOFFLER** (Giovanni), celebre astronomo tedesco, nato nel 1452 a Justiugen in Svevia, e morto nel 1530 a Vienna. Insegnò in varj luoghi le matematiche, l'astronomia, la geografia, e si occupò con molto studio della riforma del calendario; ma ciò che più di ogni altra cosa contribuì ad acquistarli grande reputazione furono le sue *Effemeridi*, nelle quali però non è da tacersi che egli inserì quanto di più assurdo e di più ridicolo poteva suggerire l'astrologia giudiziaria. Delle molte opere di questo astronomo non citeremo che le seguenti: I *Effemeridi* dal 1482 in poi, sovente ristampate in Germania ed in Italia, ora con troncamenti ed ora con aggiunte; II *Tabulae astronomicae*, Tubinga, 1500, in fol.; III *Elucidatio fabricae ususque astrolabii*, ivi, 1513, in-4. IV *Calendarium romanum magnum*, Oppenheim, 1518, 1524, in-fol. È la sola opera di Stoeffler che si possa anche oggigiorno consultare con utilità. Chi desiderasse maggiori notizie su questo astronomo potrà ricorrere all'articolo che gli è consacrato nella *Biografia universale*, alla *Bibliografia astronomica* di Lalande, e alla *Storia dell' astronomia moderna* di Delambre.

STONE (Edmondo), geometra scozzese, nato verso le fine del secolo decimosettimo, era figlio di un giardiniere del duca d' Argyle. Come tutti gli uomini dotati di un ingegno superiore trionfò di tutte le difficoltà che si opponevano all' inclinazione sua per lo studio delle matematiche. Si dice che giungesse ad imparare, senza il soccorso di verun maestro, il latino, il francese e i primi elementi della scienza per la quale sentivasi trasportato da una passione particolare. Il duca d' Argyle avendolo trovato con un libro in mano, rimase estremamente sor-

preso nel vedere che era un'opera di Newtoo, di cui il suo giardiniere stava preparando un commento. Gli diede dei maestri, sotto i quali Stone fece rapidi progressi nelle scienze esatte. Andò quindi a Londra, ove la sua fama lo aveva già preceduto, e la Società Reale lo ammise tra i suoi membri nel 1725. Sventuratamente, costretto dal bisogno a mettersi allo stipendio dei libraj ed a consumare gran parte del suo tempo in ripetizioni, non potè sostenere la reputazione che gli avevano meritato le sue prime opere. Cancelleto nel 1742 o 1743 dalla lista dei membri della Società Reale, morì nella miseria nel 1768. Oltre alcuni articoli inseriti nella *Transazioni filosofiche*, gli si debbono delle traduzioni inglesi, con utili aggiunte, del *Trattato della costruzione degli strumenti di matematica* di Bion, delle *Lezioni di geometria* di Isacco Barrow, e degli *Elementi di astronomia* di David Gregory. Fu pure editore del *Trattato della costruzione e dell' uso del settore* di Samuel Cunn, al quale fece importanti miglioramenti. Finalmente pubblicò: I *Metodo delle flussioni tanto diretto che inverso*, Londra, 1730, in-4, tradotto in francese da Rondet col titolo: *Analyse des infiniment petits, comprenant le calcul intégral dans toute son étendue, servant de suite aux infiniment petits du marquis de l'Hôpital*, Parigi, 1735, in-4, vi è aggiunto un discorso preliminare di 100 pag. del p. Castel, ed una lettera di Ramsay che contiene un sunto delle vite di Stone. Tale opera, dice Montucla, cui probabilmente l'autore forzato fu di comporre dalle angustie della sua condizione, ridonda di errori, e sebbene lodatissima dal suo traduttore e dal p. Castel, venne giustamente criticata da Giovanni Bernoulli (*Storia delle matematiche*, Tom. III pag. 133); II *Dizionario di matematica*, 1726, 1743, in-8; III *Alcune riflessioni sull' incertezza della figura e della grandezza della terra, e sulle varie opinioni dei più celebri astronomi*, Londra 1766, in-8.

STRADA DI FERRO (*Mec.*). Strada guarnita di bande solide e unite di ferro, situate nei luoghi che debbono percorrere le ruote delle vetture, per diminuirne l'attrito e rendere il rotolamento più facile. Le bande di ferro sono generalmente indicate sotto il nome inglese di rails, quantunque si sia proposto di applicar loro quello di vetturegguature.

Esistono in questo momento tre sistemi differenti di strade di ferro, cioè: a *rotaje strette*, a *rotaje schiacciate*, ad una *sola rotaja*. Nel primo sistema, il più generalmente impiegato, la strada si compone di una doppia file di sbarre di ferro parallele, poste fisse sopra fondamenti di pietra e salienti al di sopra del suolo, la distanza delle due fila è uguale alla larghezza delle vetture, in modo che le ruote portano sopra le sbarre, dove esse sono ritenute da orli fissati alla loro circonferenza. Nel secondo sistema, le sbarre sopra le quali camminano le ruote son guarnite di un *orlo*, e allora le ruote hanno la loro circonferenza unite e senza alcuna parte saliente. Il terzo sistema, che non è ancora stato eseguito sopra una grande scala, si compone di una sola rotaja stretta elevata di un metro circa al di sopra del livello del terreno. Le vetture destinate a rotolare sopra questa specie di strade debbon essere divise in due casse sospese, dai due lati della strada, ed una forma di ferro che porta due piccole ruote.

Strada a rotaje strette. La prima strade di questa natura è stata costruita nel 1680 per condurre i carboni delle miniere di Newcastle alle rive di Tyne. Io origine, essa consisteva in pezzi di legno portati sopra dei tavoloni della stessa materia; si cominciò dal ricoprire questi pezzi di bande di ferro nei luoghi ove essi erano esposti alle più frequenti degradazioni, quindi dopo poco si sostituì generalmente l'uso del ferro colato a quello del legno. Dopo questa felice innovazione, i proprietari delle principali miniere di carbon fossile dell'Inghil-

terra e della Scozia fecero stabilire delle strade di ferro destinate al trasporto dei loro prodotti, e ben presto si comprese i gran vantaggi che poteva ritrarre il commercio da questo nuovo modo di comunicazione, quando soprattutto l'applicazione della macchina a vapore come forza motrice venne ad ampliare bene al di là di tutto ciò che si sarebbe osato sperare i limiti della velocità del trasporto.

L'esempio dell'Inghilterra, sollecitamente seguito dagli stati Uniti, ha dato un grande impulso all'Europa, del quale la Francia non è stata l'ultima a risentirne. Tutte le speculazioni sono ora dirette verso le strade di ferro con molto più entusiasmo che prudenza; e possiamo temere che le costruzioni dispendiose che si mettono in grado di eseguire sopra tanti punti non diventino una caosa di rovina generale. È riconosciuto di già che il trasporto delle mercanzie, presentato nell'origine come il prodotto il più certo delle strade di ferro, è insufficiente per alimentarle, e siamo spaventati dall'immensa quantità di viaggiatori che reclama il mantenimento di una linea mediocre. Si è calcolato che la strada di ferro da Parigi a S. Germano non può rendere il 5 per % del capitale impiegato che trasportando annualmente un millione di viaggiatori! Che diventeranno tanti capitali sotterrati in trasporti di terre e ghiaja sterili, se come lo pensa il Signor Arago, nuovi progressi nei mezzi di locomozione sono non solamente probabili ma vicini; e se, come lo provano i tentativi del signor Dietz e quelli di altri, il problema di una rapida circolazione può essere risoluto sopra le strade ordinarie? Ma questa questione esce dal piano del presente Dizionario, e dobbiamo limitarci ad indicare, quanto lo comporta la natura di quest'opera, le principali disposizioni impiegate nella costruzione delle strade di ferro.

Come l'abbiamo detto, una strada a rotaje strette si compone di due elementi distinti: di blocchi di pietra, situati di distanza in distanza per servire di sostegno, e di sbarre di ferro situate dal principio alla fine sopra questi blocchi, in modo da formare delle linee continue. Quando s'impiega il ferro fuso, le sbarre debbono avere la forma la più propria a renderle capaci di un'eguale resistenza in tutta la loro lunghezza, quando ci serviamo di ferro lavorato, le sbarre sono semplicemente dei prismi quadrangolari, e possiamo allora dar loro molta maggior lunghezza disponendo convenientemente i punti d'appoggio.

La prima cura dev'essere dunque di livellare il terreno sul quale si vuole stabilire la strada e di disporci i blocchi di pietra, tanto sul terreno stesso, quando esso è abbastanza fermo, quanto sopra fondamenti particolari, quando esso è morbido. Nel primo caso, dopo aver battuto il luogo dove si deve trovare il blocco, si mette sopra un letto di ghiaja fine perchè esso porti egualmente in tutte le sue parti. La distanza dei due blocchi è determinata mediante la forza che si dà alla rotaja o al *rail*. La lunghezza ordinaria delle sbarre è di circa 91 centimetri nelle migliori strade di ferro fuso dell'Inghilterra; la figura 1 della *Tav.* CCXIV, rappresenta il profilo di una sbarra di ferro fuso, la figura 2 della stessa tavola, il suo piano, e la figura 3 della tavola CCXV, il suo taglio trasversale. I limiti delle sbarre si riuniscono in un pezzo di ferro colato, chiamato il *seggio* (*Tav.* CCXV, *fig.* 5), che è fissato sopra ciascun blocco di pietra; la grossezza al mezzo in C (*Tav.* CCXIV, fig. 1) è di circa 114 millimetri, e la larghezza del limite superiore di 50. Si variano queste dimensioni secondo i pesi dei carri che debbono percorrere le ruote.

Da qualche tempo si preferisce il ferro lavorato al ferro fuso, il quale ha l'inconveniente di rompersi sotto mediocri urti. Le prime spese sono più considerabili, ma il trattamento della strada è più facile, meno costoso, e i casi più facilmente riparabili. Le sbarre di ferro lavorato offrono un grandissimo

vantaggio, oltre l'aumento di forza che si ottiene dal loro uso, ciò consiste nel poter dare ad esse grandi lunghezze, e per conseguenza diminuire il numero delle giunte, le quali sono le parti della strada le più difficili e mantenere nette e unite. Una sbarra di ferro EF (*Tav.* CCXIV, *fig.* 3) sostenuta da quattro punti d'appoggio E, C, D, F, è quasi due volte più forte nel suo mezzo CD, che una piccola sbarra AB (*Tav.* CCXV, *fig.* 6) uguale a CD semplicemente sostenuta mediante le sue due estremità. Possiamo rendere la forza di una lunga sbarra presso a poco uguale in tutte le sue parti dividendo la sua lunghezza in 7 parti (*Tav.* CCXIV, *fig.* 4), e prendendone 3 di queste parti per la distanza dei sostegni del mezzo. Il Tredgold, il quale ha fatto numerose esperienze sopra la resistenza del ferro, assicura che, qualunque sia il numero del sostegni intermediari, possiamo rendere questa resistenza sensibilmente uniforme stabilendo tra gli spazj, verso i limiti e quelli del mezzo, il rapporto dei numeri 4 : 3.

Le ruote dei carri destinati a camminare sopra le strade a rotaje strette sono comunemente guarnite alla loro circonferenza di due orli che formano una rotaja nella quale entra il rail come una linguetta nella sua scanalatura; ma si è riconosciuto che questa disposizione porta ad attriti laterali, e siamo giunti se non ad evitargli interamente, almeno a diminuirli facendo l'orlo delle ruota leggermente curvato e non dando loro che un solo orlo (*Tav.* CCXV, *fig.* 1 e 2). Con questo metodo la vettura tende da se stessa a riprendere la sua posizione d'equilibrio sul rail quando essa ne è stata allontanata mediante qualche deviazione nella direzione della forza di traizione.

Il tiramento dei carri sopra le prime strade in ferro si effettuava mediante cavalli, e a quest'effetto si stabiliva una strada lastricata o ferrate tra le due file di rails. Presentemente delle macchine a vapore, dette *macchine locomotive*, sono esclusivamente incaricate di questo tiramento; le vetture o carri che una macchina locomotiva deve trasportare si chiamano *vagoni*; si attaccano i vagoni gli uni inseguito degli altri e al seguito della locomotiva mediante catene di ferro, in modo da formare un convojo per ciascuna locomotiva in particolare. La figura 1 delle tavole CCXX, e CCXXI rappresenta uno di questi convogli.

Strada a rotaje schiacciate. Le rotaje schiacciate non sono state impiegate fin qui che per strade di poca estensione; esse offrono il gran vantaggio di poterli stabilire assai prontamente, il che permette di formarne delle strade temporarie per un servizio passeggiero. La figura 8 della tavola CCXV presenta il taglio verticale di una rotaja schiacciata B, del suo sostegno C e della ruota senz'orli che si muove sopra la rotaja. La figura 6 della tavola CCXIV ne presenta il piano.

Il mezzo impiegato il più comunemente per fissare le rotaje schiacciate consiste a mantenerle con chiodi o chiavarde sopra traverse fisse in legno. Quando la ruota dev'essere permanente, si fanno penetrare dei quartieri di legno nei sostegni in pietra, e si fissa la rotaja con grandi chiodi penetrati nel legno. La disposizione indicata nelle figure 5 e 6 della tavola CCXIV dà molta facilità per mettere le rotaje in posto e levarle: ciascuna rotaja è guernite di una costola obliqua H o D (*Tav.* CCXV, *fig.* 4) che entre nel blocco di pietra, dimodochè esse si mantengono scambievolmente senza che vi sie bisogno d'inchiodarle. Per facilitare il loro spostamento ciascuna trentesima rotaja di una linea ha la sua costola perpendicolare come si vede in H. La stessa figura fa conoscere la configurazione di un limite di una costola; H ne è l'orlo o il gonfiamento retto che mantiene la ruota, I la parte schiacciata sopra la quale la ruota gira; D una costola e K un gonfiamento in addietro per rendere la rotaja più solida sul blocco di pietra.

Strada ad una sola rotaja. Ecco, secondo il Tredgold la descrizione e i vantaggi di questa nuova disposizione:

» L'idea di questa strada, inventata dal signor Palmer, è nuova ed ingegnosa. La vettura è portata sopra una rotaja unica, o piuttosto sopra una linea di sbarre di ferro elevata di 91 centimetri (3 piedi inglesi) al di sopre del livello del terreno, e appoggiata sopra pilastri a distanze uguali e a tre metri circa l'uno dall'altro; la vettura consiste in due ricettacoli o casse sospese, dalle due parti della strada, ad una forma in ferro, avente due ruote di circa 3o pollici di diametro. Gli orli delle ruote sono concavi e abbracciano esattamente l'orlo convesso delle sbarre che formano la strada; e il centro di gravità della vettura, tanto che essa sia vuota o piena, si trova situata tanto forte al disopra dell'orlo superiore della strada, che le due casse restano in equilibrio e che il loro carico può essere assai ineguale senza che ne resulti inconveniente, la larghezza della strada che serve loro come di pernio era di circa 10 centimetri. Le sbarre sono ancora fatte in modo da potersi aggiustare ed essere mantenute rette ed unite.

» I vantaggi di queeto modo suno di rendere l'attrito laterale meno considerabile che nel sistema delle rotaje strette; di difender meglio la strada contro la polvere o qualunque altra materia che può ritardare il cammino delle vetture; finalmente, quando le superficie del terreno fa molte ondulazioni, di permettere di eseguire la strada senza essere obbligati a vuotarla per metterla a livello, di più che ciò non è indispensabile per rendere praticabile il sentiero nel quale cammina il cavallo che trasporta la vettura.

» Pensiamo, aggiunge il Tredgold, che queeto genere di strada comparirà assai superiore a tutti gli altri, per il trasporto delle lettere e pacchi e per tutte le vetture leggere, per le quali la velocità è l'oggetto il più importante, essendo convinto che è ventaggioso per queste sorti di vetture che la ruota si trovi assai elevata per essere esente dall'interruzioni alle quali sono esposte le altre strade di ferro ».

I giornali del mese di Agosto 1840 annunziavano che si riporterebbe nel mondo industriale il prospetto di un nuovo sistema di strade di ferro che deve rovesciare tutti i sietemi conosciuti fino a quel giorno. » Si tratta dicevano essi, di strede di comunicazioni sospese, non avente che un solo rail, e dispensate da qualunque trasporto di terra e compra di terreni per espropiazione forzata. Questo nuovo sisteme non può essere che quello del signor Palmer, migliorato se vogliamo, ma la cui idea principale è emesse de più di dodici anni.

Vedremo alla parola Vapore le circostanze diverse della locomozione sopra le strade di ferro, delle quali non abbiamo voluto dare che un'idee generale in quest' articolo.

STRATICO (Il conte Simone), metematico, nato a Zara nel 1733, fece i suoi studj a Pedova, ove successe al Poleni nella cattedra di matematiche e di nautica. Fu quindi chiamato ad insegnare quest'ultima scienze nell'università di Pavia, e quivi ebbe spesso occasione di supplire al celebre Volte nel corso di fisica. Venne in seguito nominato presidente della giunta pei lavori idraulici del ducato di Modena, ed ispettore generale delle acque e strade del già regno italico. Le molte sue cognizioni gli avevano meritamente acquistata gran fema in tutta Europa, ed era divenuto membro di parecchie eccademie, e tra le altre delle Società Reale di Londre. Morì a Milano il 16 Luglio 1824. Le opere sue principeli sono: I *Series propositionum, continens elementa mechanicae et staticae earumque varias applicationes, ac praesertim ad theoriam architecturae civilis et nauticae*, Pedova, 1772, in-8; II *Raccolta di proposizioni d'idrostatica e d'idraulica*, ivi, 1773, in-8; III *Elementi d'idrostatica e d'idraulica*, ivi, 1791, in-8; IV *Vocabolario di marina, nelle tre lingue italiana, inglese e francese*, Milano, 1813-14, 3 vol. in-4; V *Bibliografia di marina nelle varie lingue del-*

l' Europa, ossia raccolta dei titoli de' libri i quali trattano di quest' arte, ivi, 1823, in-4. Si leggono inoltre di Stratico molte interessanti memorie negli atti della Società Italiana dei quaranta, e si hanno di lui le seguenti traduzioni arricchite di un gran numero di note: 1.° *Teoria compita della costruzione e del maneggio dei bastimenti* di Eulero, Padova, 1776, in-8; 2.° *Esame marittimo teorico pratico, ovvero trattato di meccanica applicata alla costruzione ed alla manovra dei vascelli* di don Giorgio Juan e di Levêque, Milano, 1819, 2 vol. in-4. Preparò ancora una magnifica edizione di Vitruvio con numerose e importanti note, frutto di 35 anni di continui studj, e di altrettanti del Poleni, che prima di lui vi si era occupato per commissione della repubblica di Venezia. Tale edizione fu pubblicata a Udine dopo la morte di Stratico, col seguente titolo: *M. Vitruvii Pollionis architectura, cum exercitationibus J. Poleni et commentariis variorum*, 1825, 4 vol., in-4.

SUBLIME. I geometri dello scorso secolo indicavano col nome di *geometria sublime* l'applicazione del calcolo infinitesimale alla geometria.

SUCCESSIONE (*Astron.*). In astronomia, si dice *successione dei segni* l'ordine nel quale i segni dello zodiaco sono percorsi dal sole, cioè: l' *Ariete*, il *Toro*, i *Gemelli*, ec. Tutti i moti degli astri, che hanno luogo secondo la successione dei segni, si dicono *moti diretti*; quelli che hanno luogo in senso contrario si dicono *moti retrogradi*. *Vedi* Segni e Zodiaco.

SUD (*Astron.*). Uno dei quattro punti cardinali. Si dice ancora *mezzogiorno*.

SUNNORMALE (*Geom.*) Si dà questo nome nella teoria delle curve, alla parte dell' asse compreso tra il piede dell' ordinata e quello della normale.

Sia AC un ramo di curva riferito all' asse AM (*Tav.* XLVII, *fig.* 7): se; per uno qualunque dei suoi punti C di cui CP è l' ordinata, si conduce la tangente CT, quindi che si tiri da questo stesso punto C una perpendicolare CD alla tangente, la parte PD dell' asse intercetta tra l' ordinata CP e la perpendicolare o la *normale* CD sarà la *sunnormale*.

Possiamo ottenere l' espressione generale della *sunnormale* in una curva qualunque, nella seguente maniera: Si cominci dal condurre un'altra ordinata P'C' prolungata fintantochè incontri la tangente, e quindi la retta C*m* parallela all' asse. Il triangolo rettangolo CPD sarà simile al triangolo rettangolo C*m*C' ed avremo

$$\mathrm{CP} : \mathrm{PD} :: \mathrm{C}m : \mathrm{C}'m\,,$$

donde

$$\mathrm{PD} = \frac{\mathrm{CP} \times \mathrm{C}'m}{\mathrm{C}m}.$$

Se ora supponiamo che PP' sia infinitamente piccola o la differenziale dell' ascissa AP, C'*m* sarà la differenziale dell' ordinata, e facendo $\mathrm{CP} = y$, $\mathrm{C}'m = dy$, $\mathrm{AP} = x$, $\mathrm{C}m = \mathrm{PP}' = dx$, verrà

$$sunnormale = \frac{y\,dy}{dx} \;\ldots\ldots (a),$$

espressione che farà conoscere il valore della *sunnormale* in una curva qualunque sostituendoci i valori di dy e di dx ricavati dall' equazione della curva.

Proponiamoci, per esempio, di cercare il valore della *sunnormale* nelle sezioni coniche. L' equazione del circolo, riferita al vertice, essendo

$$y^2 = 2ax - x^2$$

se ne ricava, differenziando

$$2ydy = 2adx - 2xdx,$$

donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{y},$$

sostituendo questo valore in (a), viene

$$sunnormale = a - x.$$

Nel circolo, la sunnormale è dunque sempre uguale alla differenza tra il raggio e l'ascissa.

L'equazione della parabola $y^2 = px$ somministra

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y};$$

donde

$$sunnormale = \frac{p}{2},$$

così in questa curva la sunnormale è costante ed uguale alla *metà del parametro*.

L'equazione dell'ellisse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(2ax - x^2\right)$, dando $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2(a-x)}{a^2y}$, se ne conclude

$$sunnormale = \frac{b^2}{a^2}\left(a - x\right).$$

Finalmente, dall'equazione dell'iperbola $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(2ax + x^2\right)$, si ricava nella stessa maniera

$$sunnormale = \frac{b^2}{a^2}\left(a + x\right).$$

I medesimi triangoli rettangoli che ci hanno somministrato l'espressione generale della sunnormale possono darci quella della *normale*, poichè essi offrono ancora la proporzione

$$CP : CD :: Cm : CC',$$

donde

$$CD = \frac{CP \times CC'}{Cm}.$$

Ora, CC' è, nell'Ipotesi di PP' infinitamente piccolo, la differenziale dell'arco della curva la cui espressione è $\sqrt{\left(dx^2 + dy^2\right)}$ (*Vedi* RETTIFICAZIONE); così quest'uguaglianza è la stessa cosa che

$$normale = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$$

$$= y \bigwedge \left[1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right].$$

Sostituendo in quest' espressione il valore della seconda potenza della derivata differenziale dell'ordinata di una curva, si avrà il valore della *normale*. Per il circolo, la derivata differenziale di y, considerata come funzione di x, essendo

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a-x}{y},$$

si ha

$$\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{(a-x)^2}{y^2},$$

e, per conseguenza

$$normale=y\sqrt{\left[1+\frac{(a-x)^2}{y^2}\right]}$$

$$=\sqrt{\left[y^2+\left(a-x\right)^2\right]}$$

$$=\sqrt{\left[2ax-x^2+\left(a-x\right)^2\right]}$$

$$=\sqrt{a^2}=a;$$

vale a dire che la *normale*, nel circolo, è costante ed uguale al raggio. Si sa infatti che la perpendicolare condotta ad una tangente qualunque e al punto di contatto passa pel centro.

SUONO (*Acustica*). Risultato del moto vibratorio dei corpi trasmesso ai mezzi acustici, o, in altri termini, *forma* della quale gli organi dell' udito rivestono le sensazioni che sono loro proprie.

Le vibrazioni di un corpo elastico, causa prima del *suono*, si comunicano a tutte le materie immediatamente contigue, e quindi a tutte quelle che si trovano in contatto con queste prime. Perchè vi sia sensazione di suono, bisogna che esista una continuazione di materia qualunque tra il corpo vibrante e l' orecchio. Si dimostra questa proprietà sospendendo un campanello sotto il recipiente della macchina pneumatica: appena si fa il vuoto, il suono cessa; e si può agitare quanto si vuole il campanello, esso non rende suono nessuno: ma se a poco a poco si fa rientrare l'aria nella macchina, l'intensità del suono cresce egualmente a poco a poco.

L' aria atmosferica è ordinariamente il mezzo che trasmette le impressioni delle vibrazioni agli organi dell' udito, ma tutte le materie liquide o solide possono servire allo stesso oggetto; che anzi è ormai dimostrato che i liquidi e i solidi trasmettono il suono con maggiore intensità delle sostanze gassose. Si sa che i palombari possono sentire dal fondo dell' acqua il romore che si fa sulla riva, e dalla riva si sente il romore dei sassi che si urtano insieme sotto l'acqua a gran profondità. Di tutte le esperienze colle quali si dimostra la conducibilità sonora dei solidi non citeremo che la seguente facile a ripetersi e pienamente decisiva: se si applica l' orecchio ad una delle estremità di una lunga trave, si sente distintissimamente il romore che si può fare all'altra estremità strofinandovi sopra una penna, quantunque questo romore sia così leggero da potere essere appena sentito da quello medesimo che lo produce.

Le vibrazioni di un corpo elastico si comunicano dunque a tutte le materie immediatamente contigue al corpo, e quindi a tutte quelle che si trovano

in contatto colle prime. Nell' aria atmosferica la propagazione del suono si effettua in tutti i sensi, e, per trovarne la legge, basta considerare le condizioni di questa propagazione in una colonna cilindrica di aria di una lunghezza indefinita. Supponiamo che un piano perpendicolare all'asse della colonna sia applicato alla sua base e spinga avanti di una quantità piccolissima e per un tempo piccolissimo le molecole colle quali è a contatto; il moto non sarà trasmesso istantaneamente alla massa intera, perchè l'aria essendo compressibile il primo effetto sarà quello di comprimere una piccola parte della colonna, e soltanto in forza della reazione dovuta alla elasticità di questa parte il moto si comunicherà a un' altra parte, e da questa a un' altra, e così di seguito. Se s' immagina che la colonna d' aria sia divisa in sottili strati tutti eguali tra loro e alla distanza alla quale si è estesa la compressione esercitata dal piano, si potrà facilmente vedere che il moto si propagherà successivamente da uno strato al successivo, e che ogni strato dopo la reazione della sua forza elastica riprenderà il suo volume primitivo e rimarrà in riposo.

L' azione prodotta dal piccolo moto in avanti del piano mobile consisterà dunque in una ondulazione di tutta la colonna aerea, e si avranno in tutto le stesse apparenze come se un piccolo strato si movesse parallelamente a se stesso, provando successivamente delle compressioni e delle dilatazioni. Supponiamo ora che il piano mobile torni indietro; lo strato d' aria contiguo non essendo più compresso, si dilaterà finchè si appoggi di nuovo sul piano; questa dilatazione diminuendo la sua forza elastica, lo strato successivo sarà meno compresso e si dilaterà anch' esso, e così successivamente di tutti gli altri strati, dimanierachè la dilatazione del primo strato si comunicherà successivamente agli altri, e propagherà il moto come lo aveva in principio propagato la sua compressione. Se il piano mobile continua ad oscillare avanti e indietro alla base della colonna, ogni escursione produrrà una serie di onde condensate e poi dilatate, ed ogni ritorno una serie di onde dilatate e poi condensate.

In simil guisa le vibrazioni dei corpi sonori immersi nell' aria producono delle onde aeree che propagano il suono in tutte le direzioni: ma in questo caso le onde sono sferiche e concentriche, e per conseguenza ognuna di esse ha minor massa di quella che la segue e alla quale trasmette essa il moto; questo moto deve dunque diminuire di intensità a misura che le masse delle onde aumentano o a misura che si allontanano dal centro di vibrazione; dimanierachè, ad una certa distanza da questo centro, l' intensità diviene nulla e il suono cessa di esser percettibile: non è però stato possibile di calcolare, nemmeno approssimativamente, la distanza media alla quale un suono trasmesso dall' aria può essere percettibile all' orecchio. Si citano degli esempi di suoni sentiti a grandissime distanze: ad un assedio di Genova furono sentiti i colpi di cannone a una distanza di 90 miglia italiane (*Transazioni filosofiche* n.° 113). Chladni riferisce che trovandosi a Wittemberg intese distintamente i colpi di cannone della battaglia di Jena, ad una distanza di 17 miglia di Germania (28 leghe), meno però per effetto dell' aria che per le vibrazioni dei corpi solidi, poichè ei teneva il suo orecchio appoggiato ad un muro.

La propagazione del suono considerata sotto il punto di vista della celerità colla quale esso giunge all' orecchio è stata l' oggetto delle ricerche di un gran numero di dotti, che sonosi trovati d' accordo a riconoscere che in questa propagazione il moto è sempre uniforme, vale a dire che gli spazj percorsi sono proporzionali ai tempi. I suoni forti o deboli, egualmente che i suoni gravi ed acuti, sono propagati nel modo medesimo e colla medesima celerità. Quanto alla celerità in se stessa, le valutazioni che ne sono state fatte sono differentissime. Roberval la faceva ascendere a 560 piedi per ogni secondo di tempo, Mersenne

a 1474. Duhamel a 1338, Newton a 968 e Derham, Flamsteed ed Halley a 1142 piedi. Cassini de Thury trovò nel 1738, mediante una lunga serie di esperienze fatte in diverse condizioni atmosferiche, che la celerità media del suono è di 1038 piedi, ossia $337^m,18$ per secondo, resultato poco differente da quello di Derham, perchè il piede francese sta al piede inglese nel rapporto di 16 a 15. Nelle esperienze fatte con somma accuratezza dal maggior Muller, a Groninga, la celerità è stata trovata di 1040,3 piedi per secondo. Altre osservazioni hanno dato per la celerità media del suono nell'aria atmosferica il numero di 1042 piedi, ossia 338 metri e mezzo per secondo. Le esperienze fatte nel 1822 per ordine dell'Ufizio delle Longitudini hanno condotto a trovare per questa celerità $337^m,2$ per secondo, alla temperatura di 10°. La concordanza di quest'ultimo resultato con quello trovato da Cassini porta a credere che poco più rimanga da aggiungere alla esattezza di queste misure.

Molti distinti geometri, e particolarmente Poisson, nel *Giornale della scuola politecnica*, tom. VII, hanno tentato di determinare teoricamente la celerità del suono. Il resultato di queste ricerche è che indicando con d la densità dell'aria e con gh la sua elasticità eguale alla pressione della colonna barometrica del mercurio la cui altezza è h e la gravità g, la celerità del suono è

$$\sqrt{\frac{gh}{d}}.$$

Il calcolo dà presso a poco 288 metri per secondo, o circa un sesto di meno delle esperienze. Nulladimeno Poisson e Biot hanno fatto vedere che se si introduce nel calcolo, secondo la teoria di Laplace, lo sviluppo del calore che ha luogo in ogni compressione d'aria, e che aumenta la elasticità, i resultati della teoria possono concordare con quelli delle osservazioni. Infatti, la formula di Laplace dà per la celerità V del suono

$$V = 333^m \sqrt{\left(1 + 0,00375\, t\right)},$$

ove t rappresenta la temperatura. Se si fa $t = 10$, si ottiene $V = 339^m$, il che si accorda in modo mirabile coll' esperienza.

Con questo dato, l' intervallo tra la luce che si scorge quasi istantaneamente e il suono può servire a valutare approssimativamente la distanza in una esplosione qualunque, come sarebbe per esempio un colpo di cannone.

La celerità del suono nell' aria atmosferica non è modificata che da ciò che produce un cangiamento nella elasticità specifica dell' aria, vale a dire da ciò che fa variare il rapporto della elasticità assoluta alla densità. Tale è per esempio l'espansione dell'aria per effetto del calore, che aumenta l' elasticità specifica diminuendo la densità, mentre la pressione rimane la stessa. Così, per le osservazioni di Bianconi (*Comment. Bonon.* vol. 11), la celerità è maggiore nell'estate che nell' inverno. L' intensità del suono e il grado di altezza non influiscono sulla sua celerità. Sulle alte montagne, e in generale ad una grande elevazione, la celerità è lastessa che nell' aria inferiore. Si è osservata ancora una stessa celerità in tempo di nebbia o di pioggia come in tempo sereno.

La propagazione del suono nell' aria atmosferica è modificata dai moti proprj dell' atmosfera; ma l' influenza di questi moti non è mai considerabile, perchè la celerità del vento il più forte non oltrepassando 43^m per secondo, quella dei venti ordinarj è una quantità piccolissima rapporto alla celerità del suono. Delarnche ha trovato mediante un numero grande di esperienze: 1.° che il vento non ha influenza sensibile sui suoni sentiti ad una piccola distanza; 2.° che ad

una gran distanza il suono si sente meno in una direzione opposta a quella del vento che nella direzione medesima del vento; 3.° che il decrescimento d'intensità del suono è meno rapido nella direzione del vento che nella direzione contraria; 4.° che questo decrescimento è meno rapido perpendicolarmente alla direzione del vento che in questa direzione medesima.

La trasmissione del suono in altri mezzi diversi dall'aria atmosferica si opera egualmente per mezzo di vibrazioni eccitate in questi mezzi. È più rapida nei mezzi solidi che nei liquidi, e in questi ultimi più che nei mezzi aeriformi. Chladni, che deve considerarsi come il fondatore dell'acustica moderna, ha determinato in un modo diretto la celerità del suono in differenti sostanze solide. Ecco i suoi resultati riferiti alla celerità del suono nell'aria come *unità*.

Sostanza	Celerità
Barba di balena	6 2/3
Stagno	7 1/2
Argento	9
Noce Tasso Ottone Querce Susino	10 2/3
Tubi di pipe da tabacco	10 a 12
Rame	12
Pero Faggio Acero	12 a 13
Acajou Ebano Carpine Olmo Ontano Betulla	14 1/3
Tiglio Ciliegio	15
Salcio Pino	16
Vetro Ferro o acciajo	16 2/3
Abeto	18

L'acqua è il solo liquido nel quale siasi osservata la celerità del suono. Secondo le esperienze di Colladon, nel lago di Ginevra, questa celerità è di 1435^m per secondo, numero che poco differisce da 1438^m che dà la teoria di Laplace.

Dulong, di cui la scienza deplora la recente perdita, ha determinato le celerità del suono nei gas per mezzo di considerazioni ingegnosissime. I suoi resultati sono i seguenti:

Celerità del suono nei differenti gas alla temperatura di 0°

Aria atmosferica	333^m	per secondo
Ossigeno	317,17	
Idrogeno	1269,5	
Acido carbonico	216,6	
Ossido di carbonio	337,4	
Ossido di azoto	261,9	
Gas olificante	314	

Si confrontano i suoni fra loro, considerando la celerità delle vibrazioni dei corpi sonori che gli producono. Se il numero delle vibrazioni di due corpi sonori è lo stesso nello stesso tempo, i suoni non possono esser distinti l'uno dall'altro che mediante la loro intensità o la loro specie. L'intensità dipende dall'ampiezza delle oscillazioni delle onde sonore, la specie è una qualità particolare data al suono dalla natura propria del corpo sonoro.

Il rapporto del numero delle vibrazioni di due suoni dicesi il loro *intervallo*. Un intervallo è *consonante* quando il rapporto numerico che lo costituisce è semplicissimo; è *dissonante* nel caso contrario. Contuttociò una tale divisione non ha nulla di assoluto, perchè riposa soltanto sulla maggiore o minore facilità che prova l'orecchio a riconoscere o comprendere il rapporto di due suoni coesistenti, facilità che dipende dal grado di coltura musicale dell'organo; cosicchè alcuni *intervalli*, che un tempo si ritenevano per dissonanti, sono oggi nel numero dei consonanti. *Vedi* INTERVALLO.

Il mezzo il più semplice per determinare il rapporto dei numeri di vibrazioni dei suoni del gamma naturale consiste nel tendere per le sue estremità una corda di minugia o di metallo, e di accorcirla successivamente senza cangiare la sua tensione, per farle produrre questi diversi suoni o pizzicandola o passandovi sopra un arco. L'esperienza dimostra che prendendo per suono fondamentale o per primo *ut* quello che produce la corda quando ha una lunghezza che indicheremo con

1, si ottiene il *re* quando si riduce la sua lunghezza a $\frac{8}{9}$, il *mi* quando si

riduce a $\frac{4}{5}$, il *fa* a $\frac{3}{4}$, il *sol* a $\frac{2}{3}$, il *la* a $\frac{3}{5}$, il *si* a $\frac{8}{15}$, e finalmente l'*ut*

dell'ottava quando questa lunghezza non è più che la metà.

Se, invece di una sola corda, si facesse uso di otto corde omogenee di uno stesso diametro e sottoposte alla stessa tensione, si produrrebbero ancora tutti i suoni del gamma dando alle lunghezze di queste corde i rapporti che abbiamo indicati. Così si avrebbe

	ut,	*re*,	*mi*,	*fa*,	*sol*,	*la*,	*si*,	*ut*
Lunghezza delle corde	1,	$\frac{8}{9}$,	$\frac{4}{5}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{5}$,	$\frac{8}{15}$,	$\frac{1}{2}$

Ora è noto che le celerità delle vibrazioni di due corde omogenee di uno stesso diametro ed egualmente tese stanno in ragione inversa delle lunghezze di

queste corde; così, per ottenere i rapporti delle celerità delle vibrazioni eseguite nel medesimo tempo, basta rovesciare i rapporti precedenti, e si ottengono quelli di cui abbiamo fatto uso nel calcolo degl'intervalli. *Vedi* Intervallo.

Lo stesso apparecchio, che dicesi *monocordo* o *sonometro*, può servire pure a determinare il numero assoluto delle vibrazioni di un suono, poichè tendendo una corda abbastanza lunga da poter dare delle vibrazioni facili a vedersi e a contarsi, e quindi accorciandola senza cangiare la sua tensione, in modo da farle produrre un suono della scala armonica, il numero delle vibrazioni di quest'ultimo sarà eguale al primo moltiplicato pel rapporto inverso delle lunghezze. Conoscendo così un termine della serie dei suoni musicali, i rapporti precedenti faranno facilmente conoscere gli altri. Supponiamo per esempio che la corda che ha una lunghezza di 4 metri produca 8 vibrazioni per secondo, e che riducendo la sua lunghezza a 25 centimetri le si faccia dare il suono *ut* di un' ottava grave, si avrà la proporzione

$$0^{m},25 : 4 : : 8 : x,$$

donde si trae $x = 128$, vale a dire che il numero assoluto delle vibrazioni di quest'*ut* grave sarà 128: quello dell'*ut* distante di un'ottava dal primo sarà per conseguenza $2 \times 128 = 256$; l'*ut* all'ottava di quest'ultimo sarà $2 \times 256 = 512$, e così successivamente. Quanto ai suoni intermedj, si ottengono moltiplicando successivamente il numero delle vibrazioni di ciascun *ut* pei rapporti $\frac{9}{8}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{15}{8}$.

I suoni degli strumenti di musica si regolano per mezzo di un apparecchio chiamato *diapason* o *corista*, che si compone di una verga di ferro in forma di Y. Battendo un braccio di questo strumento sopra un corpo solido e approssimandolo quindi all'orecchio, si sente un suono che è il *la* del violino e sul quale si accordano tutti gli altri. I diapason adottati da diverse orchestre non sono gli stessi. Fischer ha trovato nel 1823, per mezzo di esperienze fatte con somma accuratezza, i seguenti numeri per i diapason dei principali teatri lirici:

Diapason del teatro di Berlino	537,32	vibraz. per secondo
— della Grand-Opera francese	431,34	«
— dell'Opera-Comica	427,61	«
— del Teatro italiano	424,17	«

Si sa che il suono non diviene percettibile che quando le vibrazioni del corpo sonoro hanno una certa celerità; e quanto più grande è questa celerità tanto più acuto è il suono. Fino alle ultime esperienze di Savart, erasi considerato come il più grave dei suoni percettibili quello che dà una corda che fa 32 vibrazioni per secondo, e come il più acuto quello che è alla nona ottava da questo primo; ma queste esperienze hanno esteso grandemente i limiti dei suoni percettibili, poichè Savart ha prodotto dei suoni gravi con 15 vibrazioni e dei suoni acuti con 48000. Il problema del *suono fisso* in musica, vale a dire del suono il numero delle vibrazioni del quale possa esser preso per punto di partenza della scala musicale ascendente e discendente, non potrebbe dunque avere che una soluzione arbitraria, come quella che danno i diapason.

Il grado di gravità o di acutezza del suono che produce una corda sonora dipende dalla sua lunghezza e dalla sua tensione. Ma, oltre il suono fondamentale proprio di ogni lunghezza e di ogni tensione, la corda ne produce ancora altri

più acuti che un orecchio esercitato distingue facilmente. Per esempio, facendo vibrare una corda sonora capace di produrre un *ut*, si sente, insieme con questo *ut* fondamentale, il *sol* della prima ottava successiva, il *mi* della seconda, ed anco i due *ut* di queste ottave. Così, rappresentando il suono fondamentale con 1, la sua ottava è 2, la sua doppia ottava 4, il *sol* della seconda ottava è 3, il *mi* della terza è 5, e per conseguenza i suoni esistenti sono rappresentati da 1, 2, 3, 4 a 5; e diconsi *suoni armonici*. Non è da dubitarsi che la corda non dia pure tutti gli altri suoni compresi nella serie dei numeri naturali 6, 7, 8, 9, 10, ec.; ma la loro poca intensità gli rende inapprezzabili. Infatti, questo fenomeno resulta dal fatto che la corda nell' oscillare si suddivide da se stessa in 2, 3, 4, 5, 6 parti eguali, ognuna delle quali vibra in particolare nello stesso tempo che si opera una vibrazione totale della corda. Sauveur il primo ha reso evidente questa particolarità per mezzo di una esperienza ingegnosissima: si pongono sopra una corda sonora un gran numero di piccoli cavalletti di carta di differenti colori, gli uni nei punti delle divisioni aliquote della corda, gli altri nei punti intermedj; quindi si mette la corda in vibrazione passandovi sopra leggermente un arco; nel momento medesimo si vedono i cavalletti posti nei punti intermedj lanciarsi fuori della corda, mentre gli altri restano immobili. I punti in cui una corda sonora si suddivide in tal modo sono stati chiamati *nodi di vibrazione*; gl' intervalli dei nodi diconsi *ventri*.

Tutti i corpi sonori producono egualmente dei suoni armonici: ma la corda vibrante è la sola i cui suoni armonici siano rappresentati dai numeri naturali 1, 2, 3, 4, ec. che servono di base al nostro sistema musicale. Chladni ha dimostrato l' esistenza dei nodi di vibrazione in tutti questi corpi. Questi nodi formano delle *linee nodali* la cui forma varia colla natura del suono che si produce; e siccome si può far produrre a un medesimo corpo un' infinità di suoni differenti, ne resultano un' infinità di linee nodali differenti. Per analizzare la serie delle figure che le linee nodali di una stessa superficie elastica sono suscettibili di prendere, Savart ha scelto un nuovo modo di esperienza che consiste non nel far vibrare direttamente la superficie elastica, ma nel comunicarle le vibrazioni di un altro corpo sonoro. Dopo aver fissato un pezzo di pelle o di cartapecora sopra un telajo di legno, incollandolo ai suoi orli, in modo che rimanga egualmente teso in tutti i sensi, si avvicina a qualche distanza un tubo di organo di cui il suono sia pieno e sostenuto. Subitochè si fa sentire il suono, la membrana vibra come se fosse essa che producesse il suono, e coprendola di rena finissima si vedono i grani di questa rena saltare sulla superficie e accumularsi nei punti di riposo o nodi di vibrazione disegnandovi le linee nodali. Se il suono cambia nel grado dell' acutezza, le linee nodali cambiano di forma, ma sono sempre regolarissime quando l' elasticità della membrana è la stessa in tutte le sue parti. Per maggiori particolarità su tali interessanti esperienze ci è forza rinviare il lettore alle memorie di Savart inserite negli *Annali di fisica e di chimica*, tom. XXXVI e XL, e al trattato di *Acustica* di Chladni.

I solidi non sono i soli corpi capaci di produrre dei suoni. Negli strumenti a vento è la colonna d'aria interposta che forma veramente il corpo sonoro; la sostanza dell' inviluppo non concorre che a dare una natura particolare ai suoni. Dopo l' invenzione della *sirena*, apparecchio dovuto a Cagnard Latour, e che ha per oggetto principale la determinazione del numero assoluto delle vibrazioni di un corpo sonoro, è noto che l' acqua fa le funzioni di corpo sonoro, e che senza dubbio lo stesso dev' essere di tutti i liquidi. Le proprietà delle vibrazioni sonore dei liquidi e dei gas esigono sviluppi nei quali non possiamo entrare.

SUPERFICIE (*Geom.*). Equivale alla stessa cosa che *area*. Così, per indicare l' estensione racchiusa dai tre lati di un triangolo, si dice indifferentemente la *superficie* o l' *area* di un triangolo. (*Vedi* AREA).

Superficie (*Geom.*). Estensione la quale non ha che due dimensioni, lunghezza e larghezza; possiamo considerarla come il limite dei solidi. (*Vedi* Nozioni preliminari).

Le superficie son *piane* o *curve*. La *superficie piana*, che si chiama semplicemente *piano*, è quella sopra la quale possiamo applicare esattamente una linea retta in tutti i sensi; non vi è per conseguenza che una sola specie di superficie piana. La *superficie curva* è quella sopra la quale non possiamo applicare esattamente una linea retta in tutti i sensi; esistono un' infinità di specie differenti di superficie curve.

L' intersezione di due superficie che s' incontrano è una linea la cui natura dipende da quella delle superficie e dalla maniera con la quale esse si tagliano. Questa linea è sempre retta quando le superficie sono tutte due piane.

1. Superficie piana. Due *piani* applicati l' uno sopra l' altro coincidono esattamente in tutte le loro parti e si confondono.

Allorquando due piani si tagliano, la loro inclinazione respettiva prende il nome di *angolo piano*; quest' angolo si misura dall' angolo che fanno tra loro le due rette condotte in ciascuno di questi piani allo stesso punto della comune intersezione e perpendicolarmente a quest' intersezione. Quando quest' angolo è retto i piani sono perpendicolari tra essi.

2. Due piani sono paralleli tra loro quando essi non possano incontrarsi supponendoli prolungati indefinitamente.

Le intersezioni di due piani paralleli mediante un terzo piano sono rette parallele tra esse.

3. Una retta è parallela ad un piano quando facendo passare per questa retta un secondo piano che taglia il primo, l' intersezione dei due piani è parallela alla retta.

4. Una retta è perpendicolare ad un piano quando essa è perpendicolare a tutte le rette che si possano condurre sopra questo piano e che passano per il punto d' intersezione

5. La situazione di un piano, nello spazio, è determinata da quella di tre de' suoi punti, poichè per tre punti dati non si può far passare che un solo piano. Ben' inteso che questi tre punti non debbono essere in linea retta.

Così due linee rette che s' incontrano, due linee parallele tra loro, un arco di curva qualunque descritto sopra un piano, determinano la sua posizione perchè ne resultano sempre tre punti che non sono in linea retta.

Tutte le relazioni che possono esistere tra i piani e le linee rette sono l' oggetto della geometria elementare; esse si deducono senza difficoltà dalle relazioni delle linee rette condotte sopra uno stesso piano.

6. Nella geometria detta *analitica* (*Vedi* Applicazione), si riporta la posizione di un piano nello spazio a tre altri piani i quali si tagliano due a due e che si chiamano *piani coordinati*. La relazione che esiste tra le distanze di un punto qualunque del piano ai tre piani coordinati è l'*equazione* di questo piano; equazione che è sempre del primo grado e della forma $Ax+By+Cz+D=0$, A, B, C, D essendo quantità costanti ed x, y, z rappresentando le distanze variabili.

Tutte le questioni relative al piano ed alla linea retta nello spazio si risolvono mediante la combinazione del piano e della retta. (*Vedi i Trattati d' applicazione dell' Algebra alla Geometria*).

7. Superficie curva. Le sole superficie curve che si considerano negli elementi di geometria sono le superficie laterali del cilindro e del cono retti e la superficie della sfera. (*Vedi* Cono, Cilindro e Sfera).

Le superficie curve, in generale, sono uno degli oggetti della geometria detta *analitica*; si rappresentano mediante l' equazione che esprime la relazione ge-

nerale delle distanze di uno qualunque dei loro punti a tre piani coordinati. Così F indicando una funzione qualunque delle variabili x, y, z, l'equazione $F(x, y, z) = 0$ sarà l'equazione di una superficie, cioè: l'equazione di un *piano* se essa è del *primo grado*, e l'equazione di una superficie curva se essa passa il primo grado.

Le superficie curve si classano, come le linee, dal grado delle loro equazioni; così si dica una *superficie del secondo grado*, *del terzo grado*, ec., secondo che l'equazione che la rappresenta è del secondo, del terzo, ec. grado.

La superficie della sfera, quella del cilindro, del cono, le superficie generate dalla rivoluzione di una sezione conica, sono *superficie del secondo grado*. *Vedi* Biot, *Essai de géométrie analytique*; Bourdon, *Appl. de l'alg. à la géométrie*; Boucharlat, *Théorie des courbes et des surfaces du second ordre*; Leroy, *Analy. appl. à la géométrie des trois dimensions*; Monge, *Mém. de l'Acad. savans etrangers*: tomo IX. Quanto alla misura delle superficie, *Vedi* Area e Quadratura.

Superficie difforme (*Geom.*). Questa in generale è una superficie generata da una retta che si muove in modo tale che due delle sue posizioni consecutive non sono mai in uno stesso piano. Una tale superficie non è sviluppabile.

Superficia rigata (*Geom.*). Nome generico della superficie generate dal moto di una linea retta.

Superficie sviluppabile (*Geom.*). Superficie curva che possiamo sviluppare sopra un piano. Queste superficie sono generalmente generate da una retta sottoposta alla condizione di aver sempre due posizioni consecutive in uno stesso piano.

SUPPLEMENTO (*Geom.*). Si chiama *supplemento di un angolo* ciò che gli manca per essere equivalente a due angoli retti, come si chiama *supplemento di un arco* ciò che gli manca per valere una semicirconferenza. Si dice ancora che due angoli la cui somma è uguale a due angoli retti, o che due archi la cui somma è uguale ad una semicirconferenza, sono *supplemento* l'uno dell'altro. Il supplemento di un angolo di un arco di 120° gradi, per esempio, è un angolo o un arco di 60°.

SUTTANGENTE (*Geom.*). Parte dell'asse di una curva intercetta tra l'ordinata e il punto dove la tangente incontra l'asse.

TC (*Tav* XLVII, *fig.* 7) essendo tangente alla curva AC, se al punto C si conduca l'ordinata CP, la porzione TP dell'asse compresa tra il piede dell'ordinata e il punto T dove la tangente taglia l'asse sarà la *suttangente*.

Il problema celebre di condurre delle tangenti alle curve si riduce, come lo vedremo meglio in altra parte (*Vedi* Tangente), a quello di trovare la suttangente, poichè una volta determinato il punto T basta di far passare una retta per i punti T e C. Avendo condotto l'ordinata P'C' e tirato la retta Cm parallela all'asse, i due triangoli rettangoli CPT e CmC' sono simili e danno

$$CP : TP :: C'm : Cm;$$

donde

$$TP = \frac{CP \times Cm}{C'm}.$$

Supponendo $PP' = Cm$ infinitamente piccola, si ha $Cm = dx$, $C'm = dy$, e per conseguenza

$$suttangente = \frac{ydx}{dy} \; \ldots\ldots \; (a).$$

Per avere il valore della suttangente, bisogna dunque sostituire in quest' espressione il valore di $\frac{dx}{dy}$ ricavato dall' equazione della curva.

Per la parabola, per esempio, si deduce della sua equazione $y^2 = px$, $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$, e si ha sostituendo

$$suttangente = \frac{2y^2}{p};$$

il che si riduce, sostituendo ad y^2 il suo valore px, a

$$suttangente = 2x,$$

vale a dire che la suttangente, nella parabola, è doppia dell'ascissa; il che somministra un mezzo semplicissimo di condurre delle tangenti a questa curva (*Vedi* TANGENTE).

SUTTRIPLATA (*Alg.*). Un rapporto *suttriplato* è il rapporto delle radici cube. Così a e b sono in *ragione suttriplata* di c e di d, se si ha

$$a : b :: \sqrt[3]{c} : \sqrt[3]{d}.$$

SUTTRIPLO (*Alg.*). Due quantità sono in ragione *suttripla* quando l' una è contenuta *tre* volte nell' altra. Per esempio, 2 è *suttriplo* di 6.

SUPPUTAZIONE (*Arit.*). Ciò consiste nell' azione di contare o di valutare la grandezza delle quantità numeriche effettuando le diverse operazioni dell' aritmatica.

SVANIRE (*Alg.*). Fare *svanire* una quantità è la stessa cosa che scacciarla o farla sparire da un' espressione. *Vedi* ELIMINAZIONE e TRASFORMAZIONE.

SVILUPPO. In geometria, ciò significa, l' azione mediante la quale si sviluppa una curva per fargli descrivere un' *evoluta*. *Vedi* QUESTA PAROLA.

Ci serviamo ancora di quest' espressione per indicare la riunione sopra un piano di più figure piane il cui complesso forma la superficie di un solido.

In algebra, s' intende per sviluppo la formazione della serie che dà la generazione di una funzione. Per esempio $(a+x)^m$ essendo una funzione della variabile x, il suo valore,

$$a^m + mu^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}x^2 +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3}x^3 + \text{ec.} \dots$$

ottenuto mediante il binomio del Newton, è ciò che si chiama il suo *sviluppo*. *Vedi* SERIE.

T

TACQUET (ANDREA), matematico, nato nel 1611 in Anversa, entrò assai giovane nell'ordine de' Gesuiti, e dopo aver professato per alcuni tempo le belle lettere, fu incaricato dell'insegnamento delle matematiche. Esercitò tale ufficio per quindici anni con molto frutto, e morì di tisi nella sua nativa città il 23 Dicembre 1660. Le principali sue opere sono: I *Cylindricorum annulorum libri IV, una cum dissertatione physico-mathematica de circulorum volutatione per planum*, Anversa, 1651; *liber V*, ivi, 1659, in-4. In tale opera, dice Montucla, l'autore si propone di misurare le superficie e la solidità dei varj corpi che si formano tagliando un cilindro in varie maniere per mezzo di un piano, e quella dei varj solidi di circonvoluzione formati da un circolo che gira intorno a un asse dato. Ma vi regna un'affettazione del tutto superflua di dimostrare collo stile della geometria antica delle cose già dimostrate da Guldin, Cavalieri, Gregorio da Saint-Vincent, ec. Si consulti la *Storia delle matematiche*, tom II, pag. 82; II *Elementa geometriae planae ac solidae, quibus accedunt ex Archimede teoremata*, ivi, 1654, 1655, in-8; III *Arithmeticae theoria et praxis accurate demonstrata*, Lovanio, 1655, in-8. Tali due opere del p. Tacquet, commendevoli per la loro chiarezza, furono per lungo tempo usate nelle scuole della Società; IV *Opera mathematica*, Anversa, 1668 e 1669, in fol. Questo volume contiene: *Astronomiae libri VIII*; *Geometriae practicae libri III*, *Opticae libri III*; *Catoptricae libri III*; *Architecturae militaris liber unus*, ec. Nel suo trattato d'astronomia, l'autore suppone la terra immobile, sebbene intimamente convinto della verità del sistema di Copernico; ma temeva di allontanarsi da Riccioli (*Vedi* RICCIOLI), cui aveva preso per guida, e di ammettere un'opinione che sembrava contraria al testo delle sacre carte. Delambre ha fatto un'esposizione di tale opera nella sua *Storia dell'astronomia moderna*, tom II, pag. 531-36.

TAGLIA o POLISPASTO (*Mec.*). Macchina composta di una riunione di pulegge, delle quali alcune son fisse ed altre mobili, la quale serve per inalzar pesi molto grandi. La teoria di questa macchina è stata data alla parola POLISPASTO.

TALETE di Mileto. All'epoca della fondazione della scuola jonia, nella quale questo celebre filosofo espose i suoi pensieri e le sue dottrine, deve fissarsi il principio del primo periodo della storia autentica della scienza, non che di quella dei primi sviluppi razionali dello spirito umano: le cognizioni vaghe, le nozioni incomplete che prima di quel tempo potevano possedere alcune nazioni, delle quali l'origine e la civiltà si è voluta collocare in un passato indefinito, non costituiscono la scienza. Perchè i primi tentativi della intelligenza umana giungessero a meritare questo nome, fu d'uopo che fossero vivificati e ingranditi dal genio brillante della Grecia. Talete deve l'immortalità che si è acquistata ai suoi nobili e fortunati sforzi per iniziare la sua patria in quel gran movimento d'idee, che dopo di lui non ha cessato di agitare il mondo e di guidare lo spirito umano di scoperte in scoperte.

Gli storici dell'antichità e Diogene Laerzio, che fu specialmente il biografo di Talete, fissano l'epoca della nascita di questo grand'uomo nell'anno 640 prima di Gesù Cristo. Secondo un gran numero di storici, questo padre della greca filosofia era fenicio, e non si recò a Mileto che in età assai avanzata; ma ormai il nome di quest'ultima città è rimasto associato al suo, e noi senza esitare ci conformeremo all'uso, tanto più che il luogo della nascita poco importa per la storia della scienza, alla quale specialmente appartiene Talete. Il suo spirito ardente e dedito tutto allo studio dei grandi fenomeni della natura gli fece sembrar troppo ristrette le cognizioni che gli era possibile di acquistare nel suo paese, e risolse di andare a cercare nell'Egitto un'istruzione più elevata e più degna del suo ingegno. Ciò che si narra di Talete è stato detto in seguito anco di Pitagora e di Platone. Ma è un fatto per lo mano straordinario che questi uomini, che la Grecia divinizzò nel poetico suo entusiasmo per le nobili e grandi cose che le avevano rivelate, recarono tutti dall'Egitto un sapere che i sacerdoti sì dotti di quel paese non possedevano nemmeno molti secoli dopo. Infatti Plutarco racconta che il re Amasi rimase stupefatto nel vedere Talete misurare le piramidi e gli obelischi per mezzo della loro ombra, vale a dire probabilmente per mezzo del rapporto che esiste tra i corpi verticali e la loro ombra projettata sopra un piano orizzontale. Questa operazione, dice lo storico delle matematiche, è il primo saggio che si conosca di quella parte della geometria che ha per oggetto la misura delle grandezze inaccessibili per mezzo dei rapporti dei lati dei triangoli simili. Talete era dunque, almeno in questo particolare, più istruito dei suoi maestri. Pitagora recò dallo stesso paese delle idee sul moto della terra, che, più di mille anni dopo, Tolomeo non fece che accennare nell'Almagesto come un antico errore dell'astronomia dei Greci, nel quale erasi sempre ben guardato di cadere l'Egitto. Platone sebbene stimasse in sommo grado le cognizioni matematiche, non era però un gran geometra, nel senso pratico di questa espressione, pur nonostante rivelò all'Egitto un numero grande di problemi geometrici insegnati da lungo tempo nelle scuole della Grecia.

Checchè sia però di tale particolarità storica, sulla quale abbiamo avvertitamente insistito in molti articoli di questo Dizionario, è certo che soltanto dopo esser tornato da'suoi viaggi Talete fondò la scuola jonia, nella quale lo studio delle matematiche formava il principale insegnamento. Nell'esporre la storia speciale di ciascun ramo della scienza abbiamo avuto cura di risalire all'origine delle cognizioni e delle prime ricerche di cui furono esse l'oggetto, e per conseguenza abbiamo fatto menzione di quanto contribuirono alla loro produzione e al loro perfezionamento i lavori di Talete. (*Vedi* Alessandria (*Scuola d'*), Aritmetica, Astronomia, Geometria, *ec*). Talete non ha lasciato nessuno scritto, o per meglio dire quelli che senza dubbio ha dovuto comporre non hanno potuto attraversare l'abisso dei tempi e giungere fino a noi. Gli è stata attribuita non senza ragione la maggior parte delle dottrine principali che furono dopo di lui insegnate nella scuola di cui fu il fondatore, dottrine tra le quali bisogna principalmente distinguere, in geometria, parecchie scoperte sulla proprietà del triangolo e del circolo, e in astronomia la sfericità della terra e la vera causa degli ecclissi della luna e del sole. Talete morì in un'età assai avanzata, durante la LVIII olimpiade.

TANGENTE (*Geom.*). Linea retta che tocca un circolo o qualunque altra linea curva, in modo da non avere che un solo punto comune con la curva. Questo punto si chiama *punto di contatto*.

Nella *geometria elementare*, non si considerano che le tangenti del circolo la proprietà principale delle quali è di essere perpendicolari ai raggi condotti ai punti di contatto. Per dimostrare questa proprietà con l'aiuto delle sole pro-

posizioni esposte in questo Dizionario, consideriamo la retta CD che tocca al punto C, il circolo ECB (*Tav.* XLVIII, *fig.* 1); conduciamo al punto di contatto il raggio AC, e per il centro A facciamo passare una secante qualunque ED. È stato provato (*Vedi* Circolo) che il quadrato della tangente CD è equivalente al rettangolo formato tra la secante intera ED e la sua parte esterna BD, vale a dire che si ha

$$\overline{CD}^2 = ED \times BD.$$

Ora, le tre rette AC, AE, AB essendo uguali come raggi di uno stesso circolo, abbiamo

$$ED = AE + AD = AD + AC,$$
$$BD = ED - EB = AD - AC,$$

così

$$\overline{CD}^2 = (AD+AC)\times(AD-AC) = \overline{AD}^2 - \overline{AC}^2;$$

donde

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2.$$

Così AD è l'*ipotenusa* di un triangolo rettangolo di cui AC e CD sono i due altri lati; dunque l'angolo ACD è retto, e per conseguenza *la tangente è perpendicolare al raggio condotto al punto di contatto.*

Il problema di condurre da un ponto dato una tangente ad un circolo si riduce dunque, quando questo punto appartiene alla circonferenza, al problema semplicissimo di elevare una perpendicolare all'estremità del raggio, che antecedentemente si conduce dal centro al punto dato. Quando il punto dato è situato fuori del circolo; ciò non ostante il problema non presenta veruna difficoltà, poichè se D (*Tav.* XLVII, *fig.* 10) è questo punto ed A il centro del circolo, dopo aver condotto la retta AD e descritto sopra questa retta come diametro un semi-circolo DCA, il punto C, dove questo semi-circolo taglia il circolo dato sarà il punto di contatto, e conducendo la retta DC questa retta sarà la tangente domandata. Infatti, se si conduce il raggio AC, si vede che l'angolo DCA è retto (*Vedi* Angolo). Resulta da questa costruzione che da un punto dato fuori di un circolo possiamo sempre condurre a questo circolo due tangenti uguali AC ed AC'.

Tra le proprietà delle tangenti del circolo, si debbono osservare le due seguenti: I. Se da diversi punti della circonferenza di un circolo (*Tav.* XLVIII, *fig.* 7) si conducono delle tangenti CD, C'D', C''D'', ec., e che si prenda CD = C'D' = C''D'' = ec., tutti i punti D, D', D'', ec., apparterranno alla circonferenza di un circolo descritto dallo stesso centro A. II. Se tre circoli A, B, C, hanno delle tangenti comuni (*Tav.* XLVII, *fig.* 6), i punti d'intersezione M, N, D, saranno in linea retta.

Quanto alle tangenti dell'altre curve, vedi inseguito *metodo delle tangenti*.

Tangente, in *trigonometria*, è una retta che tocca l'estremità di un arco e che è limitata dalla secante che passa per l'altra estremità. Tale è per esempio, la retta BD (*Tav.* XLVIII, *fig.* 1); questa retta dicesi la *tangente dell'arco* BC, ovvero ancora la *tangente dell'angolo* CAB che è misurato da quest'arco BC.

La *tangente* EF dell'arco EC, complemento dell'arco BC, prendendo il nome di *cotangente* dell'arco CB. In generale, la *cotangente* di un arco è la stessa cosa che la *tangente* del *complemento* di quest'arco.

Si trovano senza difficoltà, nella seguente maniera, i rapporti che esistono tra la *tangente* di un arco e il suo *seno*. Conduciamo le rette che si vedono nella figura, e osserviamo che i due triangoli simili ADB e ACG danno la proporzione

$$AB : BD :: AG : GC.$$

Ora, indicando l'arco CB con x, abbiamo $BD = \tang x$, $AG = \cos x$, $CG = \operatorname{sen} x$, e, di più, AB è il raggio del circolo che rappresenteremo con r, la proporzione precedente è dunque la stessa cosa che

$$r : \tang x :: \cos x : \operatorname{sen} x,$$

donde

$$\tang x = \frac{r \operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \ldots\ldots (a).$$

Prendendo il raggio del circolo per unità, si ha semplicemente $\tang x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

I triangoli simili AEF, AHC darebbero nella stessa maniera

$$\cot x = \frac{r . \cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

Paragonando quest' espressioni della *tangente* e della *cotangente* di uno stesso arco, se ne ricava la relazione generale

$$\tang x . \cot x = r^2.$$

Tutte le proprietà delle *tangenti* dipendendo da quelle dei *seni*, rimanderemo alla parola SENO per la teoria di questa linee.

METODO DELLE TANGENTI. Consiste questo metodo nel condurre delle tangenti alle curve, o nel determinare la grandezza della tangente e della sottotangente, quando l'equazione della curva è data. Di tutte le scoperte fatte nella geometria dal Cartesio, quella che stimava più è la regola generale da esso data per la determinazione delle tangenti delle curve. « E questo, dice egli, il problema il più utile e il più generale, non solamente che io sappia, ma ancora che abbia mai desiderato di sapere in geometria ». Questo problema serve infatti alle determinazioni le più importanti della teoria delle curve, e la soluzione del Cartesio, per quanto al giorno d'oggi sia sostituita da metodi più pronti e più comodi somministrati dal calcolo differenziale, deve nientedimeno segnarsi nell'istoria della scienza come un' invenzione ingegnosissima, e d'altra parte come la prima di questo genere.

Il metodo del Cartesio riposa sul seguente principio: Sia AEN (*Tav.* XLVIII, *fig.* 8) un ramo di curva riferita all' asse AM. Da un punto C dell' asse sia descritto un circolo che tagli la curva almeno in due punti, B e b, dei quali le ordinate comuni alla curva e al circolo saranno BP e bp. Immaginiamo ora che il raggio di questo circolo diminuisca, il suo centro rimanendo immobile; è evidente che i due punti B e b si avvicineranno e finiranno per confondersi in E, quando il circolo non farà più che toccare la curva in questo punto. Allora il raggio CE condotto al punto di contatto E, sarà nello stesso tempo *normale* alla retta che sarebbe tangente al circolo e alla curva in questo medesimo punto E. Così il problema di determinare la tangente di una curva si trova riportato a quello di trovare la posizione della normale che si tirerebbe da un punto qua-

dunque preso sopra l' asse. Per risolvere quest' ultimo, il Cartesio ricerca in un modo generale quali sarebbero i punti d' intersezione della curva con un circolo descritto da un raggio determinato, e da un punto dell' asse come centro. Egli giunge ad un' equazione la quale, nel caso di due intersezioni, deve contenere due radici ineguali le quali esprimono le distanze delle ordinate di queste intersezioni al vertice della curva. Ma se questi punti d' intersezione vengano a confondersi, allora le due ordinate confondendosi, le loro distanze diventano la stessa, e l' equazione deve avere due radici uguali. Bisogna dunque determinare i coefficienti dell' equazione, in modo che essa abbia due radici uguali, e il Cartesio giunge a questo paragonando l' equazione proposta con un' altra equazione fittizia dello stesso grado, dove ci sono due valori uguali; il che gli dà la distanza al vertice dell' ordinata abbassata dal punto di contatto. Ciò una volta determinato, il rimanente si deduce senza difficoltà, come lo faremo conoscere mediante un esempio.

Sia ABEN una parabola; indicando AC con a, AP con x, e il raggio CB del circolo con r, avremo $CP = a - x$. Ora poichè l' ordinata $BP = y$, appartiene nello stesso tempo al circolo ed alla parabola, avremo nel circolo

$$y^2 = r^2 - \overline{CP}^2 = r^2 - \left(a - x\right)^2,$$

e nella parabola

$$y^2 = px,$$

p indicando il parametro di quest' ultima curva. Si ha dunque ancora

$$r^2 - \left(a - x\right)^2 = px;$$

donde, ordinando rapporto ad x, si deduce l' equazione

$$x^2 - \left(2a - p\right)x + a^2 - r^2 = 0.$$

Quest' equazione, essendo del secondo grado, ammette due valori per x, i quali corrispondono alle distanze AP ed Ap; poichè avremmo trovato assolutamente la stessa cosa partendo dall' altra intersezione e prendendo l' ordinata bp. Si tratta ora di determinare il rapporto delle grandezze a, p, r in modo che BP si confonda con bp, e che il circolo tocchi la parabola al di dentro. Per quest' effetto, formiamo un' equazione fittizia del secondo grado, di cui le due radici siano uguali tra esse, il che si riduce a sviluppare la potenza $(x - m)^2 = 0$, poichè l' equazione che ne resulta $x^2 - 2mx + m^2 = 0$ ha evidentemente le sue due radici uguali ad m. Ma paragonandola con la precedente, si vede che questa non può avere le sue due radici uguali, se non che quando si abbiano le relazioni $2m = 2a - p$, e $m^2 = a^2 - r^2$. La prima condizione ci dà a motivo di $x = m$,

$$2x = 2a - p,$$

donde

$$p = 2a - 2x,$$

e

$$a - x = \frac{1}{2}p.$$

Ora, mediante l'uguaglianza delle radici, x è diventato AQ, e conseguentemente

$$a-x = AC-AQ = CQ.$$

Così, nella parabola, CQ, o la *sunnormale*, è uguale alla metà del parametro. Il valore della *sunnormale* essendo una volta conosciuto, se ne ricava facilmente quello della *suttangente*, come pure i valori della *normale* e della *tangente*. Qualunque sia la curva proposta, si giungerà sempre, mediante questo processo, all'espressione della *sunnormale*.

Oltre a questo metodo delle tangenti che esso ha esposto nella sua *Geometria*; il Cartesio ne dà un altro, nella sua corrispondenza, i cui principii sono poco differenti. Esso concepisce una linea retta che giri intorno di un centro sopra l'asse prolungato della curva. Comincia dal tagliarla in un certo numero di punti; ma a misura che si allontana o si avvicina all'asse secondo le circostanze, i punti d'intersezione si ravvicinano e coincidono; finalmente essa tocca la curva proposta. Per determinare la situazione che ha la curva in quest'ultimo caso, il Cartesio procede quasi come nel suo primo metodo. Esso comincia dal ricercare l'equazione generale, mediante la quale questa linea essendo inclinata sotto un angolo dato con l'asse, si troverebbero i suoi punti d'intersezione con la curva. Inseguito col mezzo di un'equazione fittizia che ha due radici uguali, determina quest'inclinazione in modo da esser quella necessaria perchè la linea sia tangente. Finalmente deduce da ciò l'espressione della sottangente.

Un altro metodo delle tangenti, non meno celebre di quello del Cartesio, è il metodo del Fermat, nel quale si è preteso trovare l'origine del calcolo differenziale. Ecco il principio sul quale esso è fondato.

Se la linea BD (*Tav.* XLVIII, *fig.* 13) è tangente ad una curva $AbBd$, è evidente che qualunque altra ordinata diversa da BC, come bc per esempio, la incontrerà fuori della curva in un punto e. Così il rapporto di $\overline{BC}^2$ ad $\overline{ec}^2$, che è lo stesso di quello di $\overline{DC}^2$ a $\overline{Dc}^2$ sarà più piccolo di quello di $\overline{BC}^2$ a $\overline{bc}^2$ ovvero di quello di AC ad Ac, prendendo una parabola per esempio; ma se supponiamo che questo rapporto sia lo stesso, e che la distanza Cc si annulli, i punti b e B si confonderanno, ed avremo un'equazione che trattata nella stessa maniera che nel metodo dei *massimi e minimi*, darà il rapporto di CD a CA, ovvero della suttangente all'ascissa. Il Fermat, come si vede, faceva dipendere il suo metodo dalle tangenti dal suo metodo dei massimi.

I metodi del Cartesio e del Fermat ricevettero successivamente diversi perfezionamenti mediante i lavori dello Sluze, dell'Hudde, dell'Huygens, ec., i quali non possiamo esporre in questo punto. Ciò non ostante crediamo dover dire ancora una parola sul *metodo delle tangenti* del Barrow, l'analogia del quale col metodo che si deduce dal calcolo differenziale è molto più concludente di quella che si è preteso riconoscere tra questo metodo e il metodo del Fermat. Il Barrow considera il triangolo *differenziale* $QQ'm$ (*Tav.* XLVIII, *fig.* 4) formato dalle differenza mQ' delle due ordinate infinitamente vicine PQ e PQ′, la loro distanze Qm e il lato infinitamente piccolo QQ' della curva. Questo triangolo è simile al triangolo TPQ formato dall'ordinata, la tangente e la suttangente. Egli cerca dunque, per l'equazione della curva, il rapporto che hanno insieme questi due lati Qm e $Q'm$, il che gli somministra un'equazione dalla quale deduce il rapporto della suttangente all'ordinata, trascurando le quantità infinitamente piccole.

Un esempio ci farà comprendere questo processo. Sia la curva proposta una parabole l'equazione della quale è $y^2 = px$; indichiamo, come il Barrow, con e l'accrescimento Qm, o PP' dell'ascissa $AP = x$, e con a l'accrescimento corrispondente $Q'm$ dell'ordinata $PQ = y$. Ora, y diventando $y+a$, e x diventando $x+e$, l'equazione della parabola dà

$$y^2 + 2ay + a^2 = px + pe.$$

Sottraendo da quest'ultima i termini uguali $y^2 = px$, viene

$$2ay + a^2 = pe;$$

a essendo infinitamente piccola, il suo quadrato a^2 può essere interamente trascurato, e ne resulta semplicemente

$$2ay = pe, \text{ donde } \frac{e}{a} = \frac{2y}{p}.$$

Ma il rapporto delle quantità a ed e è lo stesso di quello dell'ordinata y o QP alla suttangente TP, dunque

$$\frac{TP}{y} = \frac{2y}{p},$$

così

$$suttangente = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x,$$

vale a dire che nella parabola, la suttangente è uguale al doppio dell'ascissa.

Questa regola non differisce evidentemente da quelle del calcolo differenziale che per la notazione, poichè essa è rappresentata in ultima analisi, dalla formula

$$suttangente = \frac{y \cdot e}{a},$$

il che è identico con la formula differenziale

$$suttangente = \frac{y \cdot dx}{dy}.$$

Esiste ancora una gran rassomiglianza tra la maniera con la quale si prende la differenziale di una quantità, e quella che impiega il Barrow per trovare il rapporto delle lettere e ed a, e non possiamo impedire di riconoscere che esso ha toccato vicinissimo al calcolo differenziale. Ma la natura dell'idee che hanno condotto il Leibnizio e il Newton alla scoperta di questo calcolo, non permette di supporre che essi abbiano niente preso dal Barrow.

Il problema delle tangenti, considerato in tutta la sua generalità, dipende dall'espressione

$$suttangente = \frac{ydx}{dy} \quad \ldots\ldots (a),$$

(*Vedi* SOTTANGENTE). Poichè sostituendo in quest'espressione il valore del rapporto $\frac{dx}{dy}$, ricavato dall'equazione della curva, si ottiene in tutti i casi il

valore della suttangente. La grandezza della tangente compresa tra il punto di contatto e quello dove essa taglia l'asse delle x, è dato dalla formula

$$tangente = y\sqrt{\left[1+\frac{dx^2}{dy^2}\right]} \ldots\ldots (b),$$

del che possiamo assicurarci facilmente osservando (*Tav.* XLVII, *fig.* 7) che la suttangente TP, l'ordinata CP e la tangente TC formano un triangolo rettangolo.

Daremo alcune applicazioni di queste formule.

1. L'espressione (a) si riferisce a delle coordinate x ed y rettangolari, e bisogna fargli subire una modificazione per renderla applicabile alle curve espresse in coordinate oblique o polari, se non vogliamo trasformare quest' ultime coordinate.

Il caso delle coordinate oblique non presentando veruna difficoltà, ci contenteremo in questo punto di esaminare quello delle coordinate polari.

Sia MN (*Tav.* XLVI, *fig.* 12) un ramo di curva il cui polo è in A, indichiamo con z un raggio vettore qualunque, AO, e con v l'arco ZQ che misura la distanza angolare di questo raggio vettore sull' asse fisso AZ. Prendiamo ora una retta qualunque AX per asse delle ascisse rettangolari, e abbassiamo dal punto O, OP perpendicolare a quest' asse; il polo essendo preso per origine, AP sarà l' ascissa, e PO l' ordinata del punto O, indicheremo queste rette secondo il consueto con x ed y. Indichiamo di più con m l' arco Zn che misura la distanza angolare dell' asse polare AZ all' asse delle ascisse AX, e allora l' arco nQ, che misura l' angolo PAO, sarà rappresentato da $v-m$. Premesso ciò, il triangolo rettangolo APO ci dà le due relazioni (*Vedi* TRIGONOMETRIA)

$$1 : \operatorname{sen}\left(v-m\right) :: AO : OP :: z : y;$$

$$1 : \cos\left(v-m\right) :: AO : AP :: z : x;$$

donde

$$x = z \cdot \cos\left(v-m\right),$$

$$y = z \cdot \operatorname{sen}\left(v-m\right).$$

Differenziando queste due espressioni, e sostituendo in (a) invece di y, dx e dy i valori che ne resultano, otterremo, per l' espressione generale della *suttangente* PT, l' espressione

$$suttangente = z \operatorname{sen}\left(v-m\right) \cdot \frac{dz \cdot \cos(v-m) - z \cdot dv \cdot \operatorname{sen}(v-m)}{dz \cdot \operatorname{sen}(v-m) + z \cdot dv \cdot \cos(v-m)} \ldots\ldots (c).$$

2. Osservando che la suttangente PT è contata in questo caso sopra una retta AX la cui posizione è interamente arbitraria, potremo render più semplice considerabilmente quest' espressione determinando la posizione di questa retta, in modo che essa sia, in tutti i casi, perpendicolare al raggio vettore del punto della curva che si considera. Infatti, se l' arco $Qn = v-m$ diventa un quarto di circonferenza, si comincia ad avere $\operatorname{sen}(v-m) = 1$, $\cos(v-m) = 0$; di più,

l' ordinata PO si confonde col raggio vettore AO, e la suttangente PT diventa AT'. Si ha dunque semplicemente in questo caso, non tenendo conto del segno,

$$suttangente = \frac{z^2 \, . \, dv}{dz} \; . \; . \; . \; . \; . \; (d).$$

Per costruire la tangente di una curva polare mediante l'aiuto di quest' espressione, si condurrà per il polo una retta AT' perpendicolare al raggio vettore, quindi si porterà sopra questa retta da A in T' il valore della suttangente dato dalla formula, e la retta condotta per i punti T' ed O sarà la tangente domandata. Quanto alla grandezza di questa tangente, si ha evidentemente

$$OT' = \sqrt{\left[\overline{AO}^2 + \overline{AT'}^2\right]}$$

ovvero

$$tangente = z \, . \sqrt{\left[1 + \frac{z^2 \, . \, dv}{dz}\right]} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (e).$$

I *segni* i cui valori dalla tangente e della suttangente possono essere affetti indicano la posizione di queste linee alla destra o alla sinistra dell' *origine*.

3. Proponiamoci, per esempio, di determinare l'espressione della suttangente nella *Spirale di Archimede*. L' equazione di questa curva essendo, (*Vedi* SPIRALE)

$$z = \frac{v}{2\pi},$$

se ne deduce

$$dz = \frac{dv}{2\pi},$$

il che dà, sostituendo quest' espressione di dz nella formula (d),

$$suttangente = z^2 \, . \, 2\pi \, ,$$

ovvero, ancora,

$$suttangente = \frac{v^2}{2\pi} \, .$$

Resulta da quest' ultima espressione che quando $v = 2\pi$, vale a dire, quando il punto di cui si domanda la tangente è l' ultimo della *prima spira*, la suttangente è uguale a 2π o alla circonferenza rettificata del circolo circoscritto. Dopo un numero di rivoluzioni espresso da m, l' arco v è $2m\pi$, e la suttangente diventa $2m^2\pi$, vale a dire m volte la circonferenza $2m\pi$, o m volte la circonferenza il cui raggio è m. Siccome abbiamo preso per unità il raggio del circolo circoscritto alla prima spira, $2m\pi$ esprime la circonferenza del circolo circoscritto all' m^{sima} spira. Così la suttangente dell' ultimo punto dell' m^{sima} spira è uguale ad m volte la circonferenza del circolo che abbraccia le m spire. Questa bella proprietà era stata scoperta da Archimede.

4. La considerazione dell' angolo che fa la tangente con l' asse dell' ascisse, conduce a molte particolarità importanti che dobbiamo indicare; ma avanti, osserviamo, che la definizione volgare della tangente: cioè: *una retta che tocca una curva in un punto senza tagliarla*, non è esatta che per le curve del secondo grado, poichè in tutte le curve le quali da concave diventano con-

vesse, tale per esempio come la curva MN (*Tav.* XLVIII, *fig.* 2), la tangente di un punto A può benissimo tagliare la curva in un punto B ed ancora in altri punti. La tangente deve dunque semplicemente definirsi: *il prolungamento dell' elemento della curva*, poichè considerando il punto di contatto come una linea retta infinitamente piccola o come *l' elemento* della curva, la tangente è infatti la retta che coincide con quest' elemento. Ecco perchè l' angolo che fa con la tangente una retta condotta al punto di contatto vien preso per l'angolo di questa retta con la curva, e che indifferentemente si dice che la *normale* è perpendicolare alla tangente o che essa è perpendicolare alla curva.

Nel triangolo rettangolo CTP (*Tav.* XLVII, *fig.* 7) formato dalla tangente CT, la suttangente TP e l' ordinata CP, l' angolo T della tangente con l' asse può sempre ottenersi con l' aiuto delle relazioni che esistono tra i lati. Si comincia ad avere

$$1 : \text{tang}\, T :: TP : CP,$$

tang. indicando la *tangente trigonometrica* dell' angolo T. Questa proporzione dà

$$\textit{tang}\, T = \frac{CP}{TP},$$

e, siccome $\frac{CP}{TP} = \frac{C'm}{Cm} = \frac{dy}{dx}$, ne resulta che si ha generalmente per l' espressione della tangente trigonometrica dell' angolo fatto dalla tangente di una curva con l' asse delle x

$$\text{tang}\, T = \frac{dy}{dx},$$

espressione che per tutti i valori di x o di y fa conoscere l' angolo T.

5. Tra i diversi valori che può ammettere l' angolo T, i più osservabili sono quelli che rispondono al caso in cui la tangente è perpendicolare o parallela all' asse delle ascisse. Nel primo caso, l' angolo T essendo retto la sua tangente trigonometrica è infinitamente grande (*Vedi* SENO), e si ha $\frac{dy}{dx} = \infty$, donde $dx = 0$; nel secondo, l' angolo T è nullo e la sua tangente trigonometrica è zero; si ha dunque allora $\frac{dy}{dx} = 0$, donde $dy = 0$.

Così, per determinare il punto di una curva nel quale la tangente è perpendicolare all' asse delle x, bisogna ricavare dalla sua equazione il valore di dx ed ugualiarlo a zero, il che darà un' equazione che farà conoscere l' ascissa o l' ordinata di questo punto. Ugualiando nella stessa maniera a zero il valore di dy ricavato dall' equazione della curva, si determineranno le coordinate del punto in cui la tangente è parallela all' asse. Prendiamo per esempio il circolo la cui equazione riportata all' estremità di un diametro è

$$y^2 = 2rx - x^2.$$

Si ricava successivamente da quest' equazione

$$dy = \frac{r-x}{y} \cdot dx, \quad dx = \frac{ydy}{r-x},$$

la prima uguaglianza dà $\frac{r-x}{y} \cdot dx = 0$, ovvero $r-x = 0$, donde $x = r$; ora

al valore di $x=r$ corrispondono due valori di y, cioè: $y=r$ e $y=-r$, così nei due punti del circolo le cui ordinate passano pel centro, la tangente è parallela all' asse, il che è avidente d'altra parte. La seconda ugnaglianza dà $\frac{ydy}{r-x}=0$ ossia $y=0$; e siccome a questo valore di y corrispondono due valori di x, cioè: $x=0$ e $x=2r$, ne resulta che ai due punti dove questi valori hanno luogo la tangènte è perpendicolare all' asse. Questi punti sono l'*origine* e l'altra estremità del diametro.

6. Applicando queste considerazioni alla parabola conica, si ricava dalla sua equazione, $y^2=px$, i valori

$$dy=\frac{pdx}{2y},\quad dx=\frac{2ydy}{p},$$

il che dà, da una parte, $p=0$ e dall'altra, $y=0$. Ma il valore $p=0$ che resulta dall' ipotesi $dy=0$ è assurdo, poichè il parametro p non è per nulla una quantità variabile, così non possiamo supporre $dy=0$, e conseguentemente non esiste verun punto della curva la cui tangente sia parallela all' asse. Il secondo valore $y=0$ c' insegna che la tangente del vertice della parabola è perpendicolare all' asse.

7. L' equazione generale di una linea retta essendo (*Vedi* APPLICAZIONE),

$$y=ax+b.$$

Se vogliamo farle esprimere la condizione che la retta *tocchi* una curva qualunque in un punto le cui coordinate sono x', y', bisognerà osservare che a quel punto quest' equazione diventa

$$y'=ax'+b,$$

e, inoltre, che la tangente trigonometrica a dev' essere ugnale a $\frac{dy'}{dx'}$ perchè la retta sia tangente. Le condizioni del contatto sono dunque

$$y'=ax'+b,\quad a=\frac{dy'}{dx'},$$

se ne deduce

$$y-y'=\frac{dy'}{dx'}\left(x-x'\right)\ .\ .\ .\ .\ .\ (f).$$

Tale è l'*equazione della tangente*.

Si deduce immediatamente dall' espressione (f) l'*equazione della normale*, poichè quest' ultima linea essendo perpendicolare alla tangente al punto x', y' la sua equazione è (*Vedi* APPLICAZIONE),

$$y-y'=-\frac{dx'}{dy'}\left(x-x'\right)\ .\ .\ .\ .\ .\ (g).$$

L' uso dell' equazioni (f) e (g) è molte volte più comodo che quello dell' espressioni che possiamo ricavare dalle formule generali (a) e (b) di sopra, e dalle formule dell' articolo SUNNORMALE. Facendo $y=0$ per determinare l' intersezione delle rette con l' asse delle x, si ottiene per la tangente

$$x-x'=-\frac{y'dx'}{dy'},$$

e per la normale,

$$x - x' = \frac{y'dy'}{dx'}.$$

Ora, per interpetrare questi resultamenti, osserviamo, nella figura 7, Tav. XLVII, che l'ascissa x, della tangente, al punto d'intersezione T è AT, quantità che dev' essere presa *negativamente*, perchè essa appartiene alla retta dell'origine A, nel mentre che l'ascissa x' del punto di contatto C è AP; così $x - x' = -AT - AP = -PT$, donde

$$\text{PT o } suttangente = \frac{y'dx'}{dy'}.$$

Quanto alla normale, l'ascissa x del suo punto d'intersezione con l'asse è in questo caso AD, nel mentre che l'ascissa x' del punto di contatto è sempre AP, abbiamo dunque $x - x' = AD - AP = PD$, donde

$$\text{PD o } sunnormale = \frac{y'dy'}{dx'}.$$

Quest'espressioni della suttangente e della sunnormale sono identiche con quelle che abbiamo precedentemente trovate.

8. L'equazioni (f) e (g) sono particolarmente utili nei casi in cui si può proporre, tanto di condurre una tangente ad una curva da un punto dato fuori della curva, quanto di condurre una tangente sottoposta a certe condizioni, come di essere parallela ad una retta data di posizione, o di fare un angolo dato con l'asse delle x, ec. ec. In generale, tutte le volte che si tratta di determinare il punto di contatto e non di partire da questo punto, l'uso dell'equazioni è più diretto e più elegante di quello dell'espressioni della suttangente e della sunnormale. In altra parte abbiamo fatto conoscere come da quest'equazioni si ricava il mezzo di determinare gli asintoti delle curve. (*Vedi* Asintoti).

Metodo inverso delle tangenti. Sotto questo nome s' indica il metodo per trovare la natura o l'equazione di una curva mediante alcune delle sue proprietà, come per mezzo della sua suttangente, o della sua tangente, o della sua normale, ec. La prima questione di questo genere fu proposta dal Beaune, l'amico e il commentatore del Cartesio. Siccome la sua soluzione dipende generalmente dall' integrazione di un' equazione differenziale del prim' ordine, i primi geometri che si sono occupati di quest' equazione avevano chiamato *metodo inverso delle tangenti*, la parte del calcolo integrale di cui esse sono l'oggetto; ma questa denominazione viziosa non è più in uso. Svilupperemo, mediante alcuni esempii, gli artifizj del calcolo con l'ajuto dei quali possiamo risalire all'equazione di una curva quando solamente si conosce una delle sue proprietà caratteristiche.

1. *Trovare l' equazione della curva la cui suttangente è* $= \frac{2y^2}{a}$.

L'espressione generale della suttangente essendo $\frac{ydx}{dy}$, ponendo l'equazione

$$\frac{2y^2}{a} = \frac{ydx}{dy},$$

ne ricaveremo

$$2ydy = adx$$

e, integrando,

$$y^2 = ax,$$

equazione di una parabola il cui parametro è a.

2. *Trovare la curva nella quale la sunnormale è una quantità costante uguale ad m.*

L' espressione generale della sunnormale essendo $\frac{ydy}{dx}$, poniamo

$$m = \frac{ydy}{dx}.$$

Ne ricaveremo

$$mdx = ydy,$$

e integrando,

$$mx = \frac{1}{2}y^2,$$

ovvero

$$y^2 = 2mx.$$

La curva è dunque ancora una parabola il cui parametro è $2m$.

3. *Trovare la curva la cui normale è costante ed uguale ad n.*

Uguagliando n all' espressione generale della normale, (*Vedi* SUNNORMALE) si ha

$$n = y\sqrt{\left[1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right]},$$

equazione dalla quale si deduce,

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{[n^2 - y^2]}},$$

e

$$x = \int ydy\left(n^2 - y^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(n^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

o, definitivamente,

$$y^2 = n^2 - x^2,$$

equazione di un circolo il cui raggio $= n$.

4. *Trovare la curva nella quale la differenza tra la sunnarmale e l' ascissa è costante ed $= a$.*

La condizione domandata essendo espressa da

$$\frac{ydy}{dx} - x = a;$$

ne ricaveremo

$$ydy = adx + xdx,$$

e, integrando

$$\frac{1}{2}y^2 = ax + \frac{1}{2}x^2,$$

ovvero

$$y^2 = 2ax + x^2,$$

equazione di un' iperbola equilatera riferita al vertice a di cui l' asse $= 2a$.

5. *Essendo date un' infinità di parabole coniche: AM, Am, ec. ec. le quali tutte hanno il loro vertice al punto A, (Tav. XLVIII, fig. 5) ma i cui parametri sono differenti, trovare una curva ON che le tagli tutte perpendicolarmente.*

Conduciamo una tangente TO alla parabola AM, al punto d' intersezione O, e da questo stesso punto una tangente OQ alla curva domandata. Per la natura del problema, QO sarà normale alla parabola AM, e la suttangente TP della parabola sarà nel medesimo tempo sunnormale della curva cercata. Ora la suttangente di una parabola è uguale al doppio dell' ascissa, così non si tratta più che di determinare la curva ON di cui la sunnormale sia uguale a $2x$. Ma TP essendo preso in senso inverso di PQ, faremo $2x$ negativo e porremo

$$-2x = \frac{ydy}{dx},$$

donde

$$ydy + 2xdx = 0.$$

Integrando, avremo

$$\frac{y^2}{2} + x^2 = c,$$

c indicando una costante arbitraria.

Quest' espressione messa sotto la forma

$$y^2 = \frac{2}{1}\left(c - x^2\right) \ldots\ldots (h),$$

c' insegna che la curva rercata è un' ellisse di cui c è il quadrato della metà dell' asse dell' x; e di cui il quadrato della metà dell' altro asse è doppio di c. Non abbiamo considerato che una sola delle parabole, ma è evidente che la curva dell' equazione (h) le taglia tutte nella stessa maniera.

6. *Trovare la curva la cui tangente è costante ed $= a$.*

Il valore generale della tangente essendo

$$y\sqrt{\left[1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right]},$$

abbiamo l' equazione

$$a = y\sqrt{\left[1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right]},$$

dalla quale si ricava

$$dx = \pm dy \cdot \frac{\sqrt{[a^2 - y^2]}}{y}.$$

Quest' equazione, della quale non possiamo ottenere l' integrale sotto una forma finita, è quella di una curva chiamata *trattrice* (*Vedi* QUESTA PAROLA).

7. *Determinare la natura della curva nella quale l' area contata a partire dal vertice, e compresa tra l' arco, l' ascissa e l' ordinata, è uguale ai due terzi del rettangolo dell' ascissa e dell' ordinata.*

L'espressione generale dell'area di una curva essendo (*Vedi* QUADRATURA) $\int y dx$, abbiamo in questo caso

$$\int y\,dx = \frac{2}{3}xy\,;$$

donde si ricava differenziando

$$ydx = \frac{2}{3}xdy + \frac{2}{3}ydx\,,$$

il che dà

$$\frac{1}{3}ydx = \frac{2}{3}\,xdy\,,$$

ossia

$$ydx = 2xdy,$$

che si può mettere sotto la forma

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}.$$

Si ottiene integrando

$$\mathrm{Log}\,y = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,x = \mathrm{Log}\,\sqrt{x}\,,$$

e passando dai logaritmi ai numeri $y = \sqrt{x}$, donde $y^2 = x$. Laonde questa è un'equazione di una parabola conica il cui parametro è preso per unità.

TARTAGLIA (NICCOLÒ), celebre geometra italiano, nato a Brescia nel principio del secolo decimosesto; suo padre esercitava l'umile professione di vetturale, ed appena riusciva con questa a procurare il più meschino sostentamento per la sua famiglia, che alla di lui morte rimase immersa nella più squallida miseria. Niccolò, orfano di sei anni, cominciava allora a compitare, nè imparò quasi altro dagli altri; perocchè, quando volle esercitarsi a scrivere, dovette fermarsi alla metà dell'alfabeto, non essendo in grado di pagare il suo maestro. Per colmo di sventura, ricavè cinque colpi di sciabola dai soldati di Gastone di Foix, allorchè fu presa Brescia nel 1512: uno di questi gli spaccò le labbra e gli cagionò un imbarazzo nella pronunzia, per cui fu per dispregio chiamato *Tartaglia*, nome che gli fu conservato in seguito, e che egli rese illustre, essendosi innalzato al primo ordine dei matematici del suo secolo, a fronte degli ostacoli che si frapponevano allo svilupparsi del suo ingegno. Privo di ogni mezzo d'istruzione, si mise a studiare tutti i libri che gli capitavano tra le mani, preferendo quelli in cui scorgea calcoli e figure di geometria. Dopo alcuni anni di studi sì singolari, fu in grado d'insegnare egli stesso ciò che aveva con tanta fatica imparato, e passò dieci anni a Verona, spiegò gli *Elementi* di Euclide a Venezia, tenne una cattedra di matematiche a Brescia, e tornato di nuovo a Venezia vi morì nel 1557.

Abbiamo altrove riferito con alcune particolarità la storia della celebre contesa che Tartaglia ebbe con Cardano in proposito della risoluzione delle equazioni del terzo grado, scoperta la cui gloria è rimasta ingiustamente a que-

st' ultimo. Noi crediamo perciò inutile di tornare a parlare adesso di questa circostanza, e ci contenteremo di rinviare il lettore agli articoli nei quali ne abbiamo trattato (*Vedi* Cardano, *e* Equazione). Oltre la soluzione delle equazioni del terzo grado, per quelle *formule* alle quali si è conservato ingiustamente il nome di *Cardano*, le matematiche debbono a Tartaglia alcuni metodi divenuti per altro inutili ai nostri giorni per costruire i problemi di Euclide con una sola apertura di compasso, ed alcune teorie sulla leggi dei coefficienti dei termini di un binomio e sul moto dei projetti. Deve essere altresì riguardato come uno dei primi che abbiano applicate le matematiche all' artiglieria, e all' arte militare.

Le opere di questo geometra sono: I *Nuova scienza, cioè invenzione nuovamente trovata, utile per ciascuno speculativo matematico bombardiero, ed altri*, Venezia, 1537, in-4; ed ivi, 1550, 1551, 1583, in-4, con un supplemento al terzo libro, che tratta delle misure delle distanze e delle altezze; II *Euclide diligentemente rassettato ed all' integrità ridotto, secondo le due traduzioni* (di Campano e di Zamberto), ivi, 1543, 1544, 1545, in-fol.; ed ivi, 1565, 1569, 1585, in-4: è la prima traduzione italiana d' Euclide; III *Archimedis opera, emendata ec.*, ivi, 1543, in-4. Montucla, nella sua *Storia delle matematiche*, tom. I, pag. 563, si è ingannato dicendo che tale traduzione latina di Archimede comparve insiame coll' opera seguente; IV *Quesiti ed invenzioni diverse*, ivi, 1550, 1551, in-4, ed ivi, 1554, in-4, con un supplemento al sesto libro, che tratta dell' arte di fortificare le piazze. Tale opera contiene varie ricerche sul servigio dell' artiglieria, sulla teoria del tiro, sulla fabbricazione della polvere e sulla difesa delle piazze. Parlando della scoperta della polvere attribuita a Schwartz, l' autore si dichiara contro l' opinione generale, secondo la quale sarebbe l' effetto del caso. Ciò che deve fare anco più stupore si è che reputa Archimede il primo e il vero inventore della polvere (*lib.* III, *quest.* V); V *La travagliata invenzione, ossia regola generale per sollevare non solamente ogni affondata nave, ma una torre solida di metallo*, ivi, 1551, in-4. Si parlava un giorno, al cospetto dell' autore, dei mezzi impiegati per trarre una nave dal fondo del mare: non vi volle di più per farvi pensare Tartaglia, il quale non tardò a proporre un nuovo metodo, che consiste in una specie di leva o di argano piantato sopra due vascelli ancorati presso la nave sommersa. L' autore dà in pari tempo la descrizione di una campana di vetro per discendere nel mare e rimanervi alcun tempo. Avea preso ogni cautela per garantire il palombaro dai flutti e dalle bestie marine: dimenticò solo il modo di farlo respirare. Tartaglia, che avea composto tale trattato allorchè provava forti contrarietà per parte dei suoi compatriotti, gli diede il titolo di *Travagliata invenzione*, che si riferisce meno alla difficoltà dell' opera che allo stato dell' autore; VI *Ragionamenti sopra la* Travagliata invenzione, *nei quali si dichiara il libro di Archimede* De insidentibus aquae, ivi, 1551, in-4; VII *General trattato de' numeri e misure, nel quale si dichiarano i primi principj e la prima parte della geometria*, ivi, 1556-60, 2 vol., in-fol.; VIII *Trattato di aritmetica*, ivi, 1556, in-4; tradotto in francese da Gosselin, Parigi, 1578, in-8, e ivi, 1613, in-4; IX *Descrizione dell' artifiziosa macchina fatta per cavare il galeone*, Venezia, 1560, in-4. È un mezzo quasi simile a quello stato immaginato dall' autore, e che ebbe l' esito il più cattivo dinanzi al porto di Venezia. La operazione fu diretta da un certo Campi di Pesaro; X *Archimedis de insidentibus aquae, libri duo*, ivi, 1565, in-4. È un' edizione a parte della traduzione latina di Archimede; XI *Jordani opusculum de ponderositate, correctum novisque figuris auctum*, ivi, 1565, in-4; XII *Opere*, ivi, 1606, in-4. Tale raccolta si compone delle opere seguenti: 1.° *Quesiti ed invenzioni diverse*;

2.° *la travagliata invenzione*; 3.° *Nuova scienza*; 4.° *Ragionamenti sopra Archimede*. Sopra questo dotto si consulti ancora quanto ne hanno scritto Montucla e Tiraboschi.

TAUTOCRONA (*Mec.*) (da ταὐτός, *uguale*, e da χρόνος, *tempo*). Espressione della quale ci serviamo per indicare degli effetti la cui durata è la stessa, vale a dire che cominciano e finiscono in tempi uguali.

Le vibrazioni di un pendolo, quando la loro grandezza è piccolissima, sono vibrazioni *tautocrone* (*Vedi* Pendolo).

Curva tautocrona. Curva la cui proprietà è tale che se da uno qualunque dei suoi punti si lascia cadere un corpo pesante lungo la sua concavità, arriverà sempre al punto il più basso nello stesso intervallo di tempo.

La natura di questa curva ha molto occupato i geometri dell' ultimo secolo, ed è una delle più brillanti scoperte dell' Huygens di aver riconosciuto che, quando il mezzo nel quale scende il corpo pesante non offre resistenza, la *tautocrona* è una cicloide. Le ingegnose applicazioni fatte dall' Huygens, di questa proprietà della cicloide alla costruzione degli orologi hanno più contribuito alla perfezione di questi utili instrumenti di tutto ciò che si era fatto fin allora. (*Vedi* Pendolo).

Quando vogliamo tener conto della resistenza dei mezzi, il problema della *tautocrona* diventa uno dei più difficili della meccanica, non solamente per la complicazione che questa resistenza porta nelle valutazioni della velocità, ma ancora perchè la legge che essa segue nei differenti mezzi è interamente ignota. Supponendo la resistenza proporzionale alla velocità, il Newton ha trovato che la *tautocrona* è ancora una cicloide, ma quest' ipotesi non è per niente applicabile fisicamente, poichè la resistenza che prova un corpo mosso in un fluido è, in certi casi, assai sensibilmente proporzionale al quadrato della velocità, motivo per cui si è creduto potere adottare generalmente quest' ultimo rapporto. L' Eulero e Giovanni Bernoulli sono i primi che risolvettero il problema, nell' ipotesi della resistenza in ragione del quadrato della velocità, essi furono seguiti dal Fontaine, la soluzione del quale presenta il vantaggio di potersi applicare a diverse ipotesi di resistenza, e finalmente il Lagrange, in una memoria inserita tra quelle dell' Accademia di Berlino, 1765, sembrava avere esaurito la materia, quando il D' Alembert riprendendo la questione sotto un' altra faccia, giunse ad una formula di una grandissima generalità che dà la soluzione del problema, per il caso in cui si trattasse di fare i tempi come una funzione qualunque dell' arco; il che contiene il tautocronismo stesso come un caso particolare. (*Vedi* L' Eulero, *Mém. de l' Acad. de Pétersbourg*, tom. IV, e *Mécanique*, tom. II. Giovanni Bernoulli, *Mém. de l' Acad. des Sciences*, 1730. Il Fontaine, *Mém. de l' Acad. des Sciences*, 1736. Il Lagrange, *Mém. de Berlin*, 1765 e 1770. Il D' Alembert, *Mém. de Berlin*, 1765).

TAVOLA. In matematiche s' indica in generale con questo nome una serie di numeri disposti metodicamente sia per facilitare la valutazione numerica di una funzione di quantità variabili, sia per dare immediatamente questa valutazione. Così, per esempio, dicesi *tavola di Pitagora* la serie dei prodotti a due a due dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, prodotti essenziali e senza i quali non potrebbe effettuarsi la moltiplicazione degli altri numeri. (*Vedi* Moltiplicazione).

Quando una *tavola* contiene particolarmente la serie dei valori che si ottengono per una funzione dando dei valori successivi alla variabile di questa funzione, si dispone ordinariamente in due colonne, la prima delle quali contiene i valori della variabile e la seconda i valori corrispondenti della funzione. Per

esemplo, se le funzione φx indica il logaritmo naturale o *iperbolico* di x, facendo successivamente $x=1$, $x=2$, $x=3$, ec., e calcolando secondo i noti metodi. (*Vedi* Logaritmo) i valori che ne resultano per φx cioè pel logaritmo di x, si formerà una *tavola* dei logaritmi naturali disponendo questi valori come segue.

Numeri	*Log. naturali*
1	0,0000000
2	0,6931472
3	1,0986123
4	1,3862943
5	1,6094379
6	1,7917594
7	1,9459101
8	2,0794415
9	2,1972245
10	2,3025851

Le tavole le più importanti per l'astronomia e per le scienze che ne dipendono sono le tavole dei logaritmi dei *numeri* e dei *seni*, esse vanno unite alle *tavole* dette *astronomiche* che servono a calcolare i luoghi e i moti degli astri. Prima della scoperta dei logaritmi, gli astronomi si servivano pei loro calcoli della tavole dei seni naturali delle quali le più estese sono quelle di Retico pubblicate nel 1613 da Pitiseo (vedasi su questo soggetto una nota del Prony inserita nelle *Memorie* dell'Istituto di Francia e intitolata: *Eclaircissement sur un point de l'histoire des tables trigonométriques*). Questo gran lavoro basterebbe per immortalare il suo autore se la storia della scienza non avesse ad annoverarlo ancora fra i primi propagatori del vero sistema del mondo. *Vedi* Retico.

Ciò che abbiamo detto alla parola Logaritmo sulle principali tavole logaritmiche, pubblicate fino a questo giorno, ci dispensa dal parlare adesso di queste tavole divenute lo strumento universale dei calcoli astronomici e geodesici, ma non possiamo passare sotto silenzio certe vaste tavole manoscritte alla costruzione delle quali si connette un aneddoto assai curioso e la pubblicazione delle quali interessa l'onore nazionale. Ecco il fatto: quando il governo francese ebbe decretato lo stabilimento di un nuovo sistema metrico divenne indispensabile il comporre delle tavole trigonometriche per la divisione del quarto di circolo in 100 gradi, non meno che il ridurre a questa divisione tutte le altre tavole astronomiche. Il Prony, allora direttore del catasto, fu incaricato di questo immenso lavoro, e non gli fu difficile il convincersi che anco associandosi tre o quattro abili cooperatori, non gli sarebbe bastato la massima durata presumibile della sua vita per condurre a termine questo lavoro. Nel momento in cui era maggiormente preoccupato di tal difficoltà che gli sembrava insuperabile, il Prony vide sulla mostra di un librajo la bella edizione inglese del 1776 dell'opera di Smith intitolata *Della ricchezza delle nazioni*: aprì il libro a caso e si abbattè nel primo capitolo che tratta della divisione del lavoro e nel quale si cita per esempio la fabbricazione degli spilli. Aveva percorse appena le prime pagine, che per una specie d'inspirazione concepì la speranza di mettere i logaritmi in fabbricazione come gli spilli. Su quel momento ei dava alla scuola politecnica delle lezioni sopra una parte della scienza strettamente legata con questo genere di lavoro, vale a dire sul calcolo delle differenze e sulle sue applicazioni alla interpolazione. Andò a passare alcuni giorni in campagna e tornò a Parigi col piano di fabbricazione che fu poi adottato nella esecuzione.

Quando sarà noto che queste tavole, terminate in un breve spazio di tempo, comprendono diciassette grossi volumi in-foglio, ognuno potrà farsi un'idea di questo immenso lavoro, che forma *il monumento di calcolo il più vasto* e *il più imponente che sia stato mai eseguito* o *immaginato*; (leggasi il rapporto su queste tavole fatto all'istituto da Lagrange, Laplace, e Delambre). Nell'avvertimento posto in fronte alle *tavole* di Callet si trova esposta la nomenclatura delle differenti parti di questa bella operazione, che non è ancora pubblicata ad onta dell'offerta fatta alcuni anni fa dal governo inglese al governo francese di stampare queste tavole a spese comuni della Francia e dell'Inghilterra. Eppure monumenti siffatti assicurano alla nazione dalla quale sono stati creati uno di quei generi di gloria che esse più d'ogni altro deve ambire: rincresce infinitamente che si lasci sepolta nel suo manoscritto una produzione giudicata senza l'eguale dai Lagrange e dai Laplace e si perseveri così ostinatamente e voler correre il rischio della irreparabile sua perdita che può da un momento all'altro essere occasionate da uno di quelli accidenti di cui non si hanno sventuratamente ebe troppi esempi.

Le *tavole astronomiche* propriamente dette sono serie di numeri che indicano le situazioni e i movimenti degli astri o che servono a calcolarli. Le più antiche tavole di questa specie sono quelle date de Tolomeo nel suo *Almogesto* e che furono poscia rettificate e aumentate da Alfonso re di Castiglia nel 1252 (*Vedi* ALFONSO). Dopo il risorgimento delle scienze in Europa, e particolarmente dopo il ristabilimento del vero sistema del mondo per opera di Copernico, il numero delle tavole astronomiche è sempre andato crescendo, e il grado di perfezione al quale sono state portate non può che eccitare una grande ammirazione. Noi indicheremo succintamente, nel loro ordine cronologico le più notabili o le più stimate di queste tavole.

Copernico, dopo trent'anni d'osservazioni e di calcoli pubblicò una nuova collezione di tavole dei moti celesti nel 1543, nella immortale sua opera: *De revolutionibus orbium coelestium*. Queste tavole furono successivamente aumentate e corrette mediante le osservazioni di altri astronomi e divennero le più corrette di tutte quelle che vennero in luce prima della pubblicazione delle celebri *tavole Ridolfine*, opera di Ticone Brahè e di Keplero. Queste ultime furono pubblicate a Lintz nel 1627.

Le tavole ridolfine ristampate a Parigi nel 1650, servirono di modello ad un numero grande di tavole, gli autori delle quali si sforzarono di renderne la forma più comoda. Tali fra le altre sono le seguenti: 1° Cristiani Reinharti, *Tabulae astronomicae*, 1630; 2° Philippi Lansbergii, *Tabulae motuum coelestium perpetuae*, Middelburgo, 1632; 3° Ismael Bonillau, *Astronomia filolaica*, 1645; 4° Maria Cunitz, *Urania propitia* 1650; 5° B. Riccioli, *Tabulae novae astronomicae*, 1665.

Le tavole di Street, denominate *Tavole caroline*, pubblicate la prima volta a Londra nel 1661 e poi a Norimberga nel 1705, sono state per lungo tempo considerate come le più perfette: in generale se n'è fatto uso fino alla pubblicazione delle tavole di Lahire, la cui superiorità era talmente incontestabile che tutti gli astronomi le adottarono.

Le tavole di Lahire comparvero nel 1687, e con una continuazione pubblicata nel 1702: il loro titolo è di *Tabulae astronomicae Ludovici magni*. Il primo posto che esse occuparono fu loro tolto dalle tavole che Cassini pubblicò nel 1740 nei suoi *Elementi di astronomia*.

Le tavole di Halley, pubblicate a Londra nel 1749, e a Parigi nel 1759 per le cure di Lalande fecero alla loro volta obliare quelle di Cassini e rimasero le più perfette fino alla pubblicazione delle tavole di Lalande nel 1771.

Oltre le tavole di cui ora abbiamo parlato dobbiamo rammentarne ancora al-

cune altre, come le *tavole del sole* di Lacaille, le *tavole della luna* di Mayer pubblicate dall' ufizio delle longitudini di Parigi, e le *tavole della luna* di Carlo Mason che servono ai calcolatori del *Nautical Almanack*. Le tavole le più moderne, in Francia, sono le *tavole del sole* di Delambre, la *tavole della luna* di Burckhard, le *tavole di Giove e di Saturno* di Bouvard, e le *tavole della luna* secondo la divisione centesimale del circolo del barone Damoiseau.

TAVOLETTA (*Agrimen.*). Strumento che serve a levare la pianta di un terreno, sul terreno medesimo, senza aver bisogno di fare veruna operazione separata.

Tale istromento si compone di una tavola rettangolare di legno bene stagionato, i cui lati hanno la lunghezza di 12 lo 15 pollici, e che è fissata stabilmente sopra un sostegno a tre piedi (*Tav.* CCXXXVI, *fig.* 3). Sopra questa tavola si pone un foglio di carta ben teso ed incollato ad un telajo che cinge ad incastro tutta la tavoletta. Per tirare le linee, si fa uso di una riga o di un' alidada di rame armata di due traguardi e qualche volta di un canocchiale.

Per accennare almeno l' uso della tavoletta, supponiamo che si tratti di levare la pianta di un terreno ABCDEF (*Tav.* CLXVIII, *fig.* 4). Dopo aver posto l' istrumento nell' interno di questo terreno in modo che il suo piano sia esattamente orizzontale, si dirigerà successivamente l' alidada nelle direzioni dei punti A, B, C, ec., nei quali si porranno delle biffe o mire, se in tali punti non vi siano oggetti che ne possano far le veci, come alberi ec., e si avrà cura di farla girare costantemente intorno ad un punto *g* scelto convenientemente sulla carta. In ciascuna direzione cominciando dal punto *g* si tirerà una linea luogo l' alidada: quindi, dopo avere misurato sul terreno colla catena le distanze del piede della tavoletta da tutti i punti di mira si daranno alle linee già tirate e partendosi dal punto *g* delle lunghezze proporzionali a queste distanze facendo uso di una scala di decimi. Così si determineranno immediatamente i punti *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* del piano, i quali rappresenteranno i punti A, B, C, D, E, F del terreno, ed unendo questi punti a due a due per mezzo di rette, la figura *abcdef* sarà il piano del terreno proposto.

Tutti i trattati di agrimensura contengono un numero grande di dettagli sull' uso della *tavoletta*.

TAYLOR (Brook), celebre geometra inglese, nacque il 18 Agosto 1685 in Edmonton nella contea di Middlesex. Attese con ardore e profitto allo studio delle lingue, della letteratura e delle matematiche, ed in età di 15 anni fu in grado di passare all' università di Cambridge, ove nel 1701 fu fatto membro del collegio. Il favore che in quel tempo godevano nell' università le matematiche, e la stima in cbe tenevansi i geometri, indussero il giovine Taylor a lanciarsi con trasporto particolare nell' arringo aperto da Newton a quei che volevano spiegare i fenomeni del sistema del mondo. Ei si fece conoscere la prima volta nel 1708 con una memoria sui centri di oscillazione, che fu pubblicata alcuni anni dopo nelle *Transazioni filosofiche*. La Società Reale di Londra lo ammise nel 1712 nel numero de' suoi membri, ed egli presentò tosto a quella dotta compagnia tre memorie interessantissime, l' una sull' ascensione dell' acqua tra due superficie piane, la seconda sui centri di oscillazione, e la terza sul celebre problema della corda vibrante di cui abbiamo parlato altrove. Queste ed altre diverse produzioni, che erano il frutto di lavori non meno coscenziosi che profondi, meritarono a Taylor un' alta considerazione nella Società Reale che lo nominò suo segretario. L' opera la più importante di questo geometra è senza contrasto il libro intitolato *Methodus incrementorum directa et inversa*, nel quale Taylor ha stabilito le leggi principali del calcolo delle differenze finite, ed ha esposto la celebre formola conosciuta nel calcolo differenziale sotto il nome di *Teorema di Taylor*.

Tale teorema è il titolo principale di Taylor ad essere inscritto per sempre nei fasti della scienza. Lagrange ci sembra il primo che abbia messo in piena evidenza tutto il partito che se ne può trarre nell' alta analisi, e noi non possiamo a meno di riportare il giudizio che ne ha dato nel fascicolo 9 del *Giornale della scuola politecnica:* » In una memoria, ei dice, stampata tra quelle » dell' Accademia di Berlino nel 1772, affermai che la teoria dello sviluppo » delle funzioni in serie conteneva i veri principj dal calcolo differenziale, sciolti » da ogni considerazione d' infinitamente piccoli o di limiti; e dimostrai con » siffatta teoria *il teorema di Taylor, che si può riguardare come il prin-* » *cipio fondamentale di tale calcolo*, e che non era stato per anco dimostrato » se non se coll' ajuto del medesimo calcolo, o colla considerazione delle diffe- » renze infinitamente piccole ».

Dobbiamo pure a Taylor un' opera sulla *prospettiva*, che fu amaramente criticata da Bernoulli: tra i rimproveri che quel celebre geometra faceva a Taylor vi ha quello di essersi appropriato un metodo che non era suo, e di fatti questo metodo era stato insegnato lungo tempo prima (nell' anno 1600) a Pessro da Guid' Ubaldo del Monte in un trattato benissimo compilato sulla prospettiva (*Vedi* Guid' Ubaldo). L' opera di Taylor però ebbe tre edizioni in Inghilterra, e tradotta venne in inglese e in italiano. Questo geometra, al quale si debbono pure molte altre ricerche interessanti sui diversi rami della scienza, morì nel fiore dell' età il 20 Dicembre 1731.

TECNIA (*da* τέχνη, *arte*). Parola impiegata dal signor Wronski per indicare i rami delle matematiche che hanno per oggetto speciale la misura o la valutazione delle quantità.

Nella deduzione filosofica a priori di tutte le parti della scienza dei numeri, data dal signor Wronski (*Introd. alla Fil. delle Mat.*), questo sapiente fa conoscere che una quantità matematica può considerarsi sotto due punti di vista essenzialmente differenti e fondati l' uno e l' altro sopra la natura stessa dell' intelligenza umana. Mediante il primo di questi punti di vista, si scopre la *natura* particolare o la costruzione primitiva di una quantità. Mediante il secondo, si scuopre la sua *misura* ovvero la sua valutazione numerica. Abbiamo digià (*Vedi Mat.* 15 e *Fil.* 65) esposto le differenze caratteristiche di queste due maniere di considerare le quantità. Così in questo punto possiamo contentarci di rammentarle mediante un solo esempio. Si sa che la base dei logaritmi naturali o iperbolici è un numero trascendente il cui *valore* è dato dalla serie indefinita

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}+\text{ec.}\;.\;.\;.\;.\;.\;(a)$$

dimodochè si ottiene questo valore mediante l' addizione successiva dei termini che lo compongono, il che somministra delle valutazioni tanto più approssimate quanto il numero dei termini che s' impiegano è più grande. Ma la quantità 2,718281828459 . . . . ec., alla quale si giunge con questo mezzo, ci fa conoscere il *valore numerico* o il rapporto della base dei logaritmi naturali con l' unità, ma non quello in che consiste questa base essa stessa, la sua *natura* o la sua costruzione primitiva; e, ciò non ostante dipende da questa costruzione primitiva operata mediante l' intendimento che creata la quantità in questione, gli dà una forma particolare, distinta da quelle di tutte le altre quantità, e la rende mediante ciò capace di una valutazione numerica. Ora, la *natura* della base dei logaritmi naturali (*vedi* Logaritmi n.° 13) è data dall' espressione

$$\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}\;.\;.\;.\;.\;.\;(b),$$

la quale, alla sua volta, ci fa ben conoscere l' operazione trascendente della ragione nella costruzione primitiva di questa base, ma non i mezzi di valutarne la grandezza numerica; dimodochè ciò non segue che mediante una determinazione secondaria, vale a dire, mediante una trasformazione operata sopra l'espressione (*b*), che possiamo giungere da quest' espressione all' espressione (*a*), che fa conoscere questi mezzi di valutazione e scoprire l' uguaglianza

$$\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\text{ec.}$$

i due membri della quale sono essenzialmente eterogenei.

La *natura* e la *misura* delle quantità matematiche sono dunque due oggetti distinti e necessari delle matematiche in generale, e in ciascuno dei rami di questa scienze diviene essenziale di distinguere ciò che appartiene al primo di questi oggetti da ciò che appartiene al secondo.

Appoggiato sopra questi principii incontestabili, il signor Wronski dà il nome di *teoremi* alle proposizioni che hanno per oggetto la *natura* delle quantità matematiche, e quello di *metodi* alle proposizioni che hanno per oggetto la *misura* di queste quantità. Il sistema dei teoremi forma così, in generale, la Teoria matematica, e il sistema dei metodi, la Tecnia Matematica.

Riportandoci a quanto abbiamo detto, Matematiche 2, 15, 16, 17, 18, 19, 20 e 21, e Filosofia 52, 65; potremo ancora definire la Teoria e la Tecnia matematiche nella seguente maniera:

La *teoria matematica* ha per oggetto i *modi distinti e indipendenti* dalla generazione e dal paragone delle quantità. La Tecnia matematica ha per oggetto i *modi universali* di questa generazione e di questo paragone.

In questo punto presenteremo il complesso della *Tecnia* della scienza dei numeri come è stata data dal signor Wronski nelle sue diverse opere.

1. Una funzione teorica qualunque Fx essendo data, trasformarla in funzioni di *numerazione* o di *facoltà*, tale è lo scopo generale della tecnia. Le due forme generali di questa trasformazione, dedotte alla parola Matematiche n.° 16, sono

$$Fx=A+\Phi x\,,\quad\text{e}\quad Fx=A\,.\,\Phi x\,,$$

la prima delle quali si riferisce alla trasformazione della funzione Fx in funzioni di numerazione, e la seconda alla trasformazione di questa stessa funzione Fx in funzioni di facoltà.

2. Partendo dalla prima forma generale

$$Fx=A+\Phi x\,,$$

e indicando con φx la funzione arbitraria che deve servire di *misura* alla valutazione proposta della funzione Fx, si riconosce che la trasformazione in questione è operata mediante i due *algoritmi tecnici primitivi* conosciuti sotto il nome di *serie* e di *frazioni continue*. La deduzione di questi algoritmi tecnici essendo stata data (Mat., 17 e 18), in questo punto rammenteremo solamente le loro leggi generali, almeno nel caso, in qualche modo primitivo, dove si conserva la stessa misura φx a ciascuna trasformazione particolare.

3. Costruiamo con le differenziali dei diversi ordini della funzione proposta Fx e della sua misura φx, le quantità

$$A_0 = F\dot{x}$$

$$A_1 = \frac{\mho[F\dot{x}]}{1 . d\varphi\dot{x}} = \frac{dF\dot{x}}{d\varphi\dot{x}}$$

$$A_2 = \frac{\mho[d^1\varphi\dot{x} . d^2F\dot{x}]}{1 . (1 . 2) . (d\varphi\dot{x})^3}$$

$$A_3 = \frac{\mho[d^1\varphi\dot{x} . d^2\varphi\dot{x}^2 . d^3F\dot{x}]}{1 . (1 . 2) . (1 . 2 . 3) . (d\varphi\dot{x})^6}$$

$$A_4 = \frac{\mho[d^1\varphi\dot{x} . d^2\varphi\dot{x}^2 . d^3\varphi\dot{x}^3 . d^4F\dot{x}]}{1 . (1 . 2) . (1 . 2 . 3) . (1 . 2 . 3 . 4) . (d\varphi\dot{x})^{10}}$$

ec. = ec.

e, in generale,

$$A_\mu = \frac{\mho[d^1\varphi\dot{x} . d^2\varphi\dot{x}^2 \ldots . d^{\mu-1}\varphi\dot{x}^{\mu-1} . d^\mu F\dot{x}]}{\left(1 . 1^{1|2} . 1^{3|1} . 1^{4|1} \ldots . 1^{\mu|1}\right) . \left(d\varphi\dot{x}\right)^{\frac{\mu(\mu+1)}{2}}},$$

nelle quali il punto situato sopra la variabile x indica che bisogna dare a questa variabile, dopo le differenziazioni, il valore che rende $\varphi x = 0$. Quanto alle funzioni indicate dalla caratteristica $\mho$, abbiamo spiegato la loro costruzione alla parola SERIE, n.° 8.

Con l'aiuto di queste quantità, la generazione della funzione Fx in *serie* è

$$Fx = A_0 + A_1 . \varphi x + A_2 . \varphi x^2 + A_3 . \varphi x^3 + A_4 . \varphi x^4 + \text{ec.}$$

qualunque sia la funzione arbitraria φx.

4. Con le quantità A_0, A_1, A_2, ec., delle quali abbiamo dato la costruzione, costruiamo ora delle nuove quantità

$$B_3 = A_2 . A_2 - A_1 . A_3$$
$$B_4 = A_2 . A_3 - A_1 . A_4$$
$$B_5 = A_2 . A_4 - A_1 . A_5$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B_\mu = A_2 . A_{\mu-1} - A_1 . A_\mu$$
$$C_4 = B_3 . A_3 - A_2 . B_4$$
$$C_5 = B_3 . A_4 - A_2 . B_5$$
$$C_6 = B_3 . A_5 - A_2 . B_6$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_\mu = B_3 . A_{\mu-1} - A_2 . B_\mu$$
$$D_5 = C_4 . B_4 - B_3 . C_5$$
$$D_6 = C_4 . B_5 - B_3 . C_6$$
$$D_7 = C_4 . B_6 - B_3 . C_7$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$D_\mu = C_4 . B_{\mu-1} - B_3 . C_\mu$$
$$E_6 = D_5 . C_5 - C_4 . D_6$$

$$E_7 = D_5 . C_6 - C_4 . D_7$$
$$E_8 = D_5 . C_7 - C_4 . D_8$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$E_\mu = D_5 . C_{\mu-1} - C_4 . D_\mu$$
$$F_7 = E_6 . D_6 - D_5 . E_7$$
$$F_8 = E_6 . D_7 - D_5 . E_8$$
$$F_9 = E_6 . D_8 - D_5 . E_9$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$F_\mu = E_6 . D_{\mu-1} - D_5 . E_\mu$$
$$G_8 = F_7 . E_7 - E_6 . F_8$$
$$C_9 = F_7 . E_8 - E_6 . F_9$$
$$G_{10} = F_7 . E_9 - E_6 . F_{10}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$G_\mu = F_7 . E_{\mu-1} - E_6 . F_\mu$$
$$H_9 = G_8 . F_8 - F_7 . G_9$$
$$H_{10} = G_8 . F_9 - F_7 . G_{10}$$
$$H_{11} = G_8 . F_{10} - F_7 . G_{11}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$H_\mu = G_8 . F_{\mu-1} - F_7 . G_\mu$$

ec. = ec.

e formiamo inseguito le quantità generali

$$a_0 = A_0$$
$$a_1 = A_1$$
$$a_2 = -\frac{A_2}{A_1}$$
$$a_3 = \frac{B_3}{A_1 . A_2}$$
$$a_4 = \frac{C_4}{A_2 . B_3}$$
$$a_5 = \frac{D_5}{B_3 . C_4}$$
$$a_6 = \frac{E_6}{C_4 . D_5}$$
$$a_7 = \frac{F_7}{D_5 . E_6}$$
$$a_8 + \frac{G_8}{E_6 . F_7}$$

$$a_3 = \frac{H_3}{F_7 . G_3}$$

ec. = ec.

la cui legge è manifeste.

Con l'aiuto di quest'ultime quantità, la generazione tecnica della funzione Fx, la *frazione continua*, è

$$Fx = a_0 + \cfrac{a_1 . \varphi x}{1 + \cfrac{a_2 . \varphi x}{1 + \cfrac{a_3 . \varphi x}{1 + \cfrac{a_4 . \varphi x}{1 + \text{ec.}}}}}$$

espressione che possiamo ancora mettere sotto la forma

$$Fx = a_0 + \cfrac{\varphi x}{b_1 + \cfrac{\varphi x}{b_2 + \cfrac{\varphi x}{b_3 + \cfrac{\varphi x}{b_4 + \text{ec.}}}}}$$

facendo

$$b_1 = \frac{1}{a_1},\ b_2 = \frac{1}{a_2 . b_1},\ b_3 = \frac{1}{a_3 . b_2},\ b_4 = \frac{1}{a_4 . b_3},\ \text{ec.}$$

e, in generale,

$$b_\mu = \frac{1}{a_\mu . b_{\mu-1}}.$$

In altra parte abbiamo esposto la deduzione e la dimostrazione di queste leggi. (*Vedi* FRAZIONI CONTINUE E SERIE), e senza dubbio non abbiamo qui bisogno di fare osservare ch'esse danno in un modo generale o universale la generazione tecnica di una funzione qualunque Fx di una variabile x, con l'aiuto di una funzione interamente arbitraria φx della stessa variabile. Le particolarità nelle quali siamo entrati mettono nella più piena luce l'importanza degli algoritmi tecnici primitivi delle *serie* e delle *frazioni continue*, laonde non ci arresteremo di più ed invece procederemo alla deduzione degli algoritmi i quali rispondono alla seconda forma di trasformazione; questi algoritmi non essendo fin qui stati oggetto di articoli particolari reclamano alcuni sviluppi.

5. Nella seconda forma generale di trasformazione

$$Fx = A \times \Phi x \ldots\ldots\ldots (c),$$

la quantità A può indifferentemente considerersi come dipendente o come indipendente dalla variabile x, e questo è ciò che rende le trasformazioni effettuate seguendo questa seconda forma essenzialmente differenti da quelle della

prima forma. Cominciamo dall'esaminare il caso in cui il fattore A è funzione di Fx.

Allorquando il fattore A è dipendente da x, questo fattore è esso stesso la *misura generale* della funzione Fx, dimodochè dev' essere tale che il valore di x, il quale rende $Fx = o$ lo renda ancora *zero*, affinchè il rapporto

$$\frac{Fx}{A}$$

non diventi infinito, e per conseguenza, perchè la funzione Φx che è l' espressione di questo rapporto possa determinarsi in tutti i casi. Ciò non ostante è importante di osservare che la funzione di x che forma il fattore A rimane indeterminata quanto alla sua natura, quantunque essa sia determinata rapporto al suo valore, mediante la circostanza che abbiamo indicata, e mediante il poter far dipendere questa funzione da una funzione qualunque arbitraria φx presa per misura.

Indichiamo dunque con $f_0 x$ la funzione rappresentata generalmente da A e dipendente dalla misura φx, ed avremo secondo la forma (c) la prima trasformazione

$$Fx = f_0 x \times \Phi_0 x.$$

Osserviamo ora che la funzione $f_0 x$ dev' essere necessariamente della forma $\varphi x - y_0$, y_0 indicando in questo punto il valore che resulta per la funzione arbitraria φx quando si dà ad x il valore che rende $Fx = o$, mentre il rapporto

$$\frac{Fx}{\varphi x - y_0},$$

ossia la quantità $\Phi_0 x$, si trova in questo modo perfettamente determinabile in tutti i casi.

Così, siccome tutto ciò che abbiamo detto per la funzione Fx si applica esattamente alle funzione $\Phi_0 x$ e che abbiamo evidentemente, per seconda trasformazione, sempre seguendo la forma (c)

$$\Phi_0 x = f_1 x \times \Phi_1 x,$$

il fattore $f_1 x$, dipendendo dalla misura φx, dev' essere ancora della stessa forma $\varphi x - y_1$, y, essendo il valore di φx quando si dà alla variabile x il valore che rende $\Phi_0 x = o$; questa seconda trasformazione darà

$$\Phi_1 x = \frac{\Phi_0 x}{\varphi x - y_1},$$

ossia

$$\Phi_1 x = \frac{Fx}{(\varphi x - y_0)(\varphi x - y_1)}.$$

Operando sopra la funzione $\Phi_1 x$ come l' abbiamo fatto sopra le funzioni Fx e $\Phi_0 x$, ponendo di nuovo

$$\Phi_1 x = f_2 x \times \Phi_2 x,$$

la funzione $f_2 x$ sarà della forma $\varphi x - y_2$, y_2 essendo il valore di φx che corrisponde al valorè di x dato dalla relazione $\Phi_1 x = o$, ed avremo,

$$\Phi_2 x = \frac{\Phi_1 x}{\varphi x - y_2};$$

donde, ancora,

$$\Phi_2 x = \frac{Fx}{(\varphi x - y_0)(\varphi x - y_1)(\varphi x - y_2)},$$

e la quantità $\Phi_2 x$ sarà determinabile per tutti i valori di x.

Procedendo nella stessa maniera nella valutazione generale delle funzioni successive

$$\Phi_0 x,\ \Phi_1 x,\ \Phi_2 x,\ \Phi_3 x,\ \Phi_4 x,\ \text{ec.}$$

Otterremo evidentementa per un indice qualunque μ il valore

$$\Phi_\mu x = \frac{Fx}{(\varphi x - y_0)(\varphi x - y_1)\ldots(\varphi x - y_\mu)} \quad \ldots\ldots (d).$$

Ma in questa valutazione successiva delle funzioni $\Phi_0 x$, $\Phi_1 x$, $\Phi_2 x$, ec. è evidente che la forma stessa (d) di queste quantità diminuisce continuamente l'influenza della variabile x nella funzione Fx, dimodochè si deve necessariamente giungere, almeno all'infinito, ad una quantità $\Phi_\mu x$ tale che l'influenza della variabile x esista nulla o almeno infinitamente piccola. Dunque, indicando solamente con Φ_μ quest'ultima quantità, che dobbiamo considerare, come una costante, avremo definitivamente, in virtù della formula (d) l'espressione

$$Fx = \Phi_\mu \left\{ \left(\varphi x - y_0\right)\left(\varphi x - y_1\right)\left(\varphi x - y_2\right)\ldots\left(\varphi x - y_\mu\right) \right\} \quad \ldots (e).$$

Tale è, soprattutto quando μ è infinito, la generazione tecnica o la valutazione della funzione Fx col mezzo del terzo algoritmo tecnico elementare che il signor Wronski chiama Prodotti continui. Il valore della costante Φ_μ potrà essere determinato dalla relazione particolare che dà l'espressione (e) nel caso di qualunque valore determinato di x.

6. La determinazione dei fattori $\varphi x - y_0$, $\varphi x - y_1$, ec. che dà lo *prodotto continuo* la valutazione di una funzione qualunque Fx, deve sempre ottenersi con l'aiuto di questa funzione, e della sua misura arbitraria φx, ma la legge di questa determinazione o la *legge fondamentale* dell'algoritmo tecnico dei prodotti continui non è ancora data, il signor Wronski aveva annunziato che l'avrebbe fatta conoscere in un seguito della sua *Filosofia della tecnia*; questo seguito non è stato pubblicato.

In mancanza di questa legge fondamentale faremo osservare che qualunque funzione Fx potendo svilupparsi in una serie.

$$Fx = A_0 + A_1 \varphi x + A_2 \varphi x^2 + A_3 \varphi x^3 + A_4 \varphi x^4 + \text{ec.} \quad \ldots (f),$$

la quale procede seguendo le potenze progressive di una funzione arbitraria φx, questa serie uguagliata a zero forma un'equazione di un grado infinito, la quale ammette un numero infinito di valori per la funzione φx (*vedi* Matematica, n.° 8). Così indicando con y_0 uno di questi valori di φx e con x_1 il valore di x che gli corrisponde, avremo da una parte $Fx_1 = 0$, e dall'altra il secondo membro dell'espressione (f) dove l'equazione del grado infinito sarà esattamente

divisibile pel fattore $\varphi x - y_0$, e più generalmente pel fattore

$$m_1 \varphi x - m_1 \varphi y_0,$$

m_1 essendo una quantità costante. Eseguendo questa divisione troveremo

$$A_0 + A_1 \varphi x + A_2 \varphi x^2 + A_3 \varphi x^3 + A_4 \varphi x^4 + \text{ec.} \ldots = $$
$$(m_1 \varphi x - m_1 y_0)(B_0 + B_1 \varphi x + B_2 \varphi x^2 + B^3 \varphi x^3 + \text{ec.} \ldots)$$

ponendo

$$B_0 = -\frac{A_0}{m_1 y_0},$$

$$B_1 = -\frac{A_1 + m_1 B_0}{m_1 y_0},$$

$$B_2 = -\frac{A_2 + m_1 B_1}{m_1 y_0},$$

$$B_3 = -\frac{A_3 + m_1 B_2}{m_1 y_0},$$

$$\text{ec.} = \text{ec.} \ldots$$

Ora, indicando con y_1, y_2, y_3, ec. all'infinito le altre radici dell'equazione infinita, siccome evidentemente avremo

$$A_0 + A_1 \varphi x + A_2 \varphi x^2 + A_3 \varphi x^3 + A_4 \varphi x^4 + \text{ec.} \ldots = $$
$$(m_1 \varphi x - m_1 y_0)(m_2 \varphi x - m_2 y_1)(m_3 \varphi x - m_3 y_2) \ldots, \text{ ec.}$$

Ne concluderemo

$$Fx = M\left\{\left(\varphi x - y_0\right)\left(\varphi x - y_1\right)\left(\varphi x - y_2\right) \ldots\right\},$$

M indicando il prodotto delle quantità costanti m_1, m_2, m_3, ec.

Così, quando per la natura della funzione Fx, l'equazione $Fx = 0$ avrà un numero infinito di radici e che potremo conoscere queste radici, si otterranno immediatamente i valori y_0, y_1, y_2, ec. i quali resultano per φx dalla successiva sostituzione di ciascuna di queste radici in luogo di x e si giungerà alla valutazione della funzione Fx in *prodotto continuo*. Questo è quello che meglio farà comprendere il seguente esempio.

7. Sia $\text{sen}\, x$ la funzione di x che si tratta di valutare in prodotto continuo per mezzo della misura generale φx. Ponendo l'equazione

$$\text{sen}\, x = 0,$$

si vede che quest'equazione è soddisfatta quando si dà ad x il valore

$$x = m\pi, \quad \text{poichè} \quad \text{sen}\, m\pi = 0,$$

m essendo un numero intero qualunque e π la semi-circonferenza del circolo il cui raggio è l'unità (*Vedi* SENO), x ammette dunque un numero indefinito di valori corrispondenti a tutti i numeri interi positivi e negativi che si possano prendere per m, e il valore generale y_μ di φx è

$$y_\mu = \varphi\left(\mu\pi\right).$$

Facendo dunque successivamente $\mu = 0$, $\mu = 1$, $\mu = -1$, $\mu = 2$, $\mu = -2$, ec. avremo

$$\operatorname{sen} x = \mathrm{M} \Big\{ \Big(\varphi x - \varphi(0)\Big)\Big(\varphi x - \varphi(\pi)\Big)\Big(\varphi x - \varphi(-\pi)\Big) \times$$

$$\Big(\varphi - \varphi(2\pi)\Big)\Big(\varphi x - \varphi(-2\pi)\Big) \ldots\ldots \Big\} \ldots\ldots\ldots (g).$$

Per determinare la costante M diamo un valore qualunque determinato a alla variabile x, ed otterremo

$$\mathrm{M} = \frac{\operatorname{sen} a}{(\varphi a - \varphi(0))(\varphi a - \varphi(\pi))(\varphi a - \varphi(-\pi)) \ldots \text{ec.}}.$$

Così, sostituendo questo valore in (g), verrà

$$\operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen} a}{\varphi a - \varphi(0)} \cdot \Big(\varphi x - \varphi(0)\Big) \frac{\varphi x - \varphi(\pi)}{\varphi a - \varphi(\pi)} \times$$

$$\times \frac{\varphi x - \varphi(-\pi)}{\varphi a - \varphi(-\pi)} \times$$

$$\times \frac{\varphi x - \varphi(2\pi)}{\varphi a - \varphi(2\pi)} \times$$

$$\times \frac{\varphi x - \varphi(-2\pi)}{\varphi a - \varphi(-2\pi)} \times$$

$$\times \ldots\ldots\ldots \text{ec.}$$

a essendo un valore arbitrario se facciamo $a = 0$, il primo fattore

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\varphi a - \varphi(0)},$$

si riduce a $\frac{0}{0}$, e per ottenere il suo valore, bisogna prendere le differenziali del suo numeratore e del suo denominatore rapporto alla variabile a (*Vedi* DIFFERENZA); si trova con questo metodo

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\varphi a - \varphi(0)} = \frac{\cos a}{\left(\frac{d\varphi a}{da}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{d\varphi a}{da}\right)}$$

a motivo di $\cos a = \cos 0 = 1$. Rimettendo dunque x in luogo di a e segnando con un punto situato sopra questa variabile, $\dot{x}$, il valore o che bisogna darle dopo la differenziazione, avremo definitivamente

$$\text{sen}\, x = \frac{1}{\left(\frac{d\varphi \dot{x}}{dx}\right)} \cdot \left(\varphi x - \varphi(0)\right) \cdot \frac{\varphi x - \varphi(\pi)}{\varphi(0) - \varphi(\pi)} \times$$

$$\times \frac{\varphi x - \varphi(-\pi)}{\varphi(0) - \varphi(-\pi)} \times$$

$$\times \frac{\varphi x - \varphi(2\pi)}{\varphi(0) - \varphi(2\pi)} \times$$

$$\times \ldots\ldots\ldots \text{ec.} \ldots\ldots (h).$$

8. L indicando il logaritmo naturale, se prendiamo $L(1+nx)$ per la funzione arbitraria φx formando la misura della valutazione, troveremo

$$\left(\frac{d\varphi \dot{x}}{dx}\right) = \frac{ndx}{(1+n\dot{x})dx} = n$$

e, per conseguenza,

$$\text{sen}\, x = \frac{1}{n} \cdot L\left(1+nx\right) \cdot \frac{L\left(\frac{1+nx}{1+n\pi}\right)}{L(1+n\pi)} \times$$

$$\times \frac{L\left(\frac{1+nx}{1-n\pi}\right)}{L(1-n\pi)} \times$$

$$\times \frac{L\left(\frac{1+nx}{1+2n\pi}\right)}{L(1+2n\pi)} \times$$

$$\times \ldots\ldots \text{ec.} \ldots\ldots (i).$$

Fintanto che la quantità arbitraria n ha un valore finito, i fattori del *prodotto continuo* contengono delle quantità dette *immaginarie*, ma se facciamo $n = \frac{1}{\infty}$, siccome generalmente si ha (*Vedi* LOGARITMO)

$$L\left(1 + \frac{1}{\infty} \cdot X\right) = \infty\left[\left(1 + \frac{1}{\infty}X\right)^{\frac{1}{\infty}} - 1\right] = \frac{1}{\infty} \cdot X,$$

e, per conseguenza

$$L\left\{\frac{1 + \frac{1}{\infty}X}{1 + \frac{1}{\infty}Y}\right\} = \infty \cdot \left(X - Y\right)$$

l'espressione (i) diventa in questo caso

$$\text{sen}\, x = x\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \ldots\ldots \text{ec.}$$

Questo è il primo prodotto continuo scoperto da Giovanni Bernoulli. L'elegante deduzione che ne abbiamo data appartiene al signor Wronski. (*Vedi* Filosofia della tecnia, prima sezione).

9. Esiste un'altra specie di *prodotti continui* nei quali i fattori formano una progressione aritmetica; tale è, per esempio, il prodotto

$$2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 10 \,.\, 12 \,.\, 14 \,.\, \text{ec.} \ldots\ldots \textit{all' infinito}.$$

La loro forma generale

$$x(x+r)(x+2r)(x+3r)(x+4r) \ldots\ldots \textit{all' infinito},$$

ci prova che essi sono identici con la fattoriella

$$a^{m|r}$$

quando $m=\infty$. Il signor Wronski gli chiama *prodotti continui fattorielle*.

Questi prodotti fattorielle generalmente non possono dare valori determinati che nei *loro rapporti*, ed è mediante ciò che il Wallis, che gli ha considerati il primo, ha trovato per il numero π, o la semi-circonferenza il cui raggio è l'unità, l'espressione degna d'osservazione

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{2 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 8 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, \text{ec.}}{1 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 9 \,.\, 9 \,.\, 11 \,.\, \text{ec.}}.$$

Ci sarà certamente cosa grata d'indicare in questo punto il mezzo di ottenere il *rapporto* di questi prodotti fattorielle.

10. La fattoriella a esponente binomio $a^{m+n|r}$ potendo decomporsi in fattorielle a esponenti monomi nelle due seguenti maniere (*Vedi* Fattoriella, n.° 3)

$$a^{m+n|r} = a^{m|r}.\left(a+mr\right)^{n|r},$$

$$a^{m+n|r} = a^{n|r}.\left(a+nr\right)^{m|r},$$

ne resulta l'uguaglianza

$$a^{m|r}.\left(a+mr\right)^{n|r} = a^{n|r}.\left(a+nr\right)^{m|r},$$

donde si ricava

$$\frac{a^{m|r}}{(a+nr)^{m|r}} = \frac{a^{n|r}}{(a+mr)^{n|r}}.$$

Se facciamo in quest'ultima $n=\infty$ e $m=\frac{p}{r}$, varrà

$$\frac{a^{\frac{p}{r}|r}}{(\infty r)^{\frac{p}{r}}} = \frac{a^{\infty|r}}{(a+p)^{\infty|r}} \ldots\ldots (k),$$

poichè la base $a+nr$ diventando infinita, l'accrescimento finito r non esercita più alcuna influenza sopra i diversi fattori della fattoriella $(a+nr)^{m|r}$, la quale allora si riduce ad una semplice potenza.

Per qualunque altra base b e qualunque altro accrescimento s, troveremo ugualmente

$$\frac{b^{\frac{q}{s}|s}}{(\infty s)^{\frac{q}{s}}} = \frac{b^{\infty|s}}{(b+q)^{\infty|s}},$$

così dividendo l' uguaglianza (k) per quest' ultima, otterremo

$$\frac{a^{\infty|r}.(b+q)^{\infty|s}}{b^{\infty|s}.(a+p)^{\infty|r}} = \frac{(\infty s)^{\frac{q}{s}}}{(\infty r)^{\frac{p}{r}}} . \frac{a^{\frac{p}{r}|r}}{b^{\frac{q}{s}|s}},$$

questo rapporto non può ammettere valori finiti che fintantochè esista tra le quantità p, q, r, s, la relazione

$$qr = sp,$$

ovvero

$$\frac{q}{s} = \frac{p}{r},$$

ma in questo caso facendo $\frac{q}{s} = \frac{p}{r} = m$, si ha

$$\frac{a^{\infty|r}.(b+q)^{\infty|s}}{b^{\infty|s}.(a+p)^{\infty|r}} = \left(\frac{s}{r}\right)^m . \frac{a^{m|r}}{b^{m|s}}.$$

Quandu gli accrescimenti s ed r sono uguali, il che conduce all' uguaglianza delle quantità p e q, quest' ultima formula si riduce a

$$\frac{a^{\infty|r}.(b+p)^{\infty|r}}{b^{\infty|r}.(a+p)^{\infty|r}} = \frac{a^{\frac{p}{r}|r}}{b^{\frac{p}{r}|r}},$$

il che equivale alla stessa cosa che

$$\frac{a(b+p)(a+r)(b+p+r)(a+2r)(b+p+2r)\ldots\ldots \text{ec.}}{b(a+p)(b+r)(a+p+r)(b+2r)(a+p+2r)\ldots\ldots \text{ec.}} =$$

$$= \frac{a^{\frac{p}{r}|r}}{b^{\frac{p}{r}|r}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (l).$$

11. Applichiamo queste formula al prodotto continuo del Wallis,

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10\ldots\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11\ldots\ldots}.$$

Paragonando con (l), avremo

$$a=2,\quad b=1,\quad p=1,\quad r=2,$$

donde

$$\frac{1}{2}\pi=\frac{2^{\frac{1}{2}|2}}{1^{\frac{1}{2}|2}}.$$

Per rendere più semplice quest' espressione, osserviamo che (*vedi* FATTORIELLA),

$$2^{\frac{1}{2}|2}=2^{\frac{1}{2}}.1^{\frac{1}{2}|1}=\sqrt{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}|-1}$$

$$1^{\frac{1}{2}|2}=\sqrt{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}|1}.$$

Cominceremo dunque ad avere, sostituendo

$$\frac{1}{2}\pi=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}|-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}|1}}\;\ldots\ldots(m),$$

ma generalmente si ha,

$$a^{m|r}.\,a^{m|-r}=a.\Big(a-(m-1)r\Big)^{2m-1|r}$$

e, per conseguenza

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}|1}.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}|-1}=\frac{1}{2},$$

donde si deduce

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}|1}=\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}|-1}},$$

sostituendo in (m), verrà

$$\frac{1}{4}\pi=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}|-1}.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}|-1},$$

il che dà definitivamente, prendendo la radice quadrata dai due membri di

quest' ultima uguaglianza,

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}|-1},$$

questa è la bella espressione del Vandermonde. (*Vedi* Ciacolo).

12. Esaminiamo ora il secondo caso della trasformazione generale,

$$Fx=A\times\Phi x,$$

quello in cui la quantità A è indipendente dalla variabile x. La condizione di questa trasformazione è evidentemente adempita dall' uso dell' algoritmo generale delle facoltà, sotto la forma generale

$$Fx=\left(\psi x\right)^{\varphi x|\xi} \; \ldots\ldots \; (o),$$

z e ξ essendo due quantità date, ψx indicando una funzione di z determinata dalla natura della funzione Fx, φx essendo la funzione arbitraria che serve di misura; poichè seguendo questa generazione tecnica della funzione Fx, tutti i fattori ψx, $\psi\left(x+\xi\right)$, $\psi\left(x+2\xi\right)$, ec. formando la facoltà, sono indipendenti dalla variabile x. Questa generazione (o) costituisce il quarto ed ultimo algoritmo tecnico, elementare, primitivo, al quale il signor Wronski ha dato il nome di *facoltà esponenziali*.

Nel caso particolare in cui la misura è la semplice variabile x, la valutazione della funzione Fx può generalmente essere operata sotto la forma

$$Fx=F(0).\left(\frac{F(\dot{z}+1)}{F\dot{z}}\right)^{x|\xi} \; \ldots\ldots \; (p),$$

il punto situato sopra z indicando che bisogna dare a questa variabile ausiliare il valore *zero*. Infatti, abbiamo dalla natura delle facoltà,

$$\left(\frac{F(z+1)}{Fz}\right)^{x|1}$$

$$=\frac{F(z+1).F(z+2).F(z+3)\ldots\ldots F(z+x-1).F(z+x)}{Fz.F(z+1).F(z+2).F(z+3)\ldots\ldots F(z+x-1)}$$

$$=\frac{F(z+x)}{Fz},$$

così la forma (p) si riduce a

$$Fx=F(0).\frac{F(z+x)}{Fz},$$

e facendo $z=0$, si ha l' identità

$$Fx=F(0).\frac{Fx}{F(0)}=Fx.$$

Ma la formula (p), che si riduce ad una semplice identità quando x è un numero intero, riceve una significazione determinata, e il suo secondo membro

non è più identico col primo, quando x è un numero frazionario, irrazionale, o *immaginario*. Allora sviluppando la facoltà che lo compone, per mezzo della legge fondamentale delle facoltà (*vedi* Facoltà, n.° 17), si ottiene per la funzione Fx, degli sviluppi interamente diversi da tutti quelli che resulterebbero dall' uso dei tre altri algoritmi tecnici. Non possiamo entrare in maggiori particolarità sopra questo algoritmo delle *facoltà esponenziali*, di cui la legge fondamentale non è per ora punto conosciuta.

13. I quattro algoritmi tecnici elementari, le *serie*, le *frazioni continue*, i *prodotti continui* e le *facoltà esponenziali* sono i soli algoritmi primitivi possibili. Ma esiste ancora una classe di algoritmi tecnici derivati i quali formano ciò che si chiama i *Metodi d' interpolazioni*, e la quale appartiene così alla parte elementare della tecnia dell' algoritmia. Non gli rammentiamo in questo punto che per completare questa parte elementare, e rimanderemo agli articoli dove ne abbiamo digià parlato (*vedi* Matematiche, n.° 21 e Interpolazione), per trattare immediatamente la parte sistematica della tecnia.

Abbiamo veduto (Matem., n. 22 e *Filos.*, n.° 65) che esiste un algoritmo tecnico sistematico, il quale abbraccia tutti gli algoritmi tecnici elementari, e per conseguenza tutta la scienza dei numeri; quest' algoritmo costituisce la Legge suprema del signor Wronski. Qualunque sia l' estrema importanza di questa legge, come l' abbiamo digià indicato più volte nel corso di questo dizionario, dobbiamo in questo punto limitarci a darne la sua esposizione.

Sia Fx una funzione qualunque della variabile x, questa variabile essendo dipendente o indipendente da altre variabili, e siano Ω_0, Ω_1, Ω_2, ec., delle funzioni qualunque arbitrarie della medesima variabile x, per mezzo delle quali si tratta di operare la generazione universale della funzione Fx. Facciamo $\Omega_0 = 1$, e costruiamo un seguito di quantità Ξ_1, Ξ_2, ec. nella seguente maniera

$$\Xi_0 = Fx$$

$$\Xi_1 = \frac{\mathfrak{S}[\Delta^1 Fx]}{\mathfrak{S}[\Delta^1 \Omega_1]} = \frac{\Delta Fx}{\Delta \Omega_1}$$

$$\Xi_2 = \frac{\mathfrak{S}[\Delta^1 \Omega_1 \, . \, \Delta^2 Fx]}{\mathfrak{S}[\Delta^1 \Omega_1 \, . \, \Delta^2 \Omega_2]}$$

$$\Xi_3 = \frac{\mathfrak{S}[\Delta^1 \Omega_1 \, . \, \Delta^2 \Omega_2 \, . \, \Delta^3 Fx]}{\mathfrak{S}[\Delta^1 \Omega_1 \, . \, \Delta^2 \Omega_2 \, . \, \Delta^3 \Omega_3]}$$

$$\text{ec.} = \text{ec.}$$

e, in generale, per gl' indici diversi da zero

$$\Xi_\mu = \frac{\mathfrak{S}[\Delta^1 \Omega_1 \, . \, \Delta^2 \Omega_2 \, . \, \Delta^3 \Omega_3 \, . \, . \, . \, . \, . \, \Delta^{\mu-1} \Omega_{\mu-1} \, . \, \Delta^\mu Fx]}{\mathfrak{S}[\Delta^1 \Omega_1 \, . \, \Delta^2 \Omega_2 \, . \, \Delta^3 \Omega_3 \, . \, . \, . \, . \, \Delta^{\mu-1} \Omega_{\mu-1} \, . \, \Delta^\mu \Omega_\mu]},$$

le funzioni indicate dalla caratteristica $\mathfrak{S}$ essendo quelle delle quali abbiamo insegnato la costruzione (*Vedi* Serie n.° 8).

Costruiamo, in secondo luogo, un' altra serie di quantità,

$$\Phi(\rho)_0 = \Omega_\rho$$

$$\Phi(\rho)_1 = \frac{\mho[\Delta^1\Omega_\rho]}{\mho[\Delta^1\Omega_1]} = \frac{\Delta\Omega_\rho}{\Delta\Omega_1}$$

$$\Phi(\rho)_2 = \frac{\mho[\Delta^1\Omega_1 \,.\, \Delta^2\Omega_\rho]}{\mho[\Delta^1\Omega_1 \,.\, \Delta^2\Omega_2]}$$

$$\Phi(\rho)_3 = \frac{\mho[\Delta^1\Omega_1 \,.\, \Delta^2\Omega_2 \,.\, \Delta^3\Omega_\rho]}{\mho[\Delta^1\Omega_1 \,.\, \Delta^2\Omega_2 \,.\, \Delta^3\Omega_3]}$$

ec. = ec.

e in generale, per gl' indici diversi da zero,

$$\Phi(\rho)_\mu = \frac{\mho[\Delta^1\Omega_1 \,.\, \Delta^2\Omega_2\Delta \,.\, {}^3\Omega_3 \ldots\ldots \Omega^{\mu-1}\Omega_{\mu-1} \,.\, \Delta^\mu\Omega_\rho]}{\mho[\Delta^1\Omega_1 \,.\, \Delta^2\Omega_2 \,.\, \Delta^3\Omega_3 \ldots\ldots \Delta^{\mu-1}\Omega_{\mu-1} \,.\, \Delta^\mu\Omega_\mu]}.$$

Con quest' ultime quantità formiamo le seguenti quantità generali

$$\Psi\left(\mu\right)_1 = -\Phi\left(\mu+1\right)_\mu$$

$$\Psi\left(\mu\right)_2 = -\Phi\left(\mu+2\right)_\mu - \Psi\left(\mu\right)_1 . \Phi\left(\mu+2\right)_{\mu+1}$$

$$\Psi\left(\mu\right)_3 = -\Phi\left(\mu+3\right)_\mu - \Psi\left(\mu\right)_2 . \Phi\left(\mu+3\right)_{\mu+1} - \Psi\left(\mu\right)_1 . \Phi\left(\mu+3\right)_{\mu+2}$$

$$\Psi\left(\mu\right)_4 = -\Phi\left(\mu+4\right)_\mu - \Psi\left(\mu\right)_3 . \Phi\left(\mu+4\right)_{\mu+1} - \Psi\left(\mu\right)_2 . \Phi\left(\mu+4\right)_{\mu+2} - \Psi\left(\mu\right)_1 . \Phi\left(\mu+4\right)_{\mu+3}$$

ec. = ec.

costruiamo finalmente la quantità generale

$$A_\mu = \dot{\Xi}_\mu + \dot{\Psi}\left(\mu\right)_1 . \dot{\Xi}_{\mu+1} + \dot{\Psi}\left(\mu\right)_2 . \dot{\Xi}_{\mu+2} + \dot{\Psi}\left(\mu\right)_3 . \Xi_{\mu+3} + \text{ec.}$$

nella quale il punto situato sopra le funzioni Ψ e Ξ indica un valore qualunque determinato della variabile x, ed avremo per la generazione universale della funzione Fx,

$$Fx = A_0 \,.\, \Omega_0 + A_1 \,.\, \Omega_1 + A_2 \,.\, \Omega_2 + A_3 \,.\, \Omega_3 + \text{ec.}$$

Tale è nella sua maggior semplicità, la *legge suprema* delle matematiche, il signor Wronshi ne ha data nella *prima sezione della sua filosofia della tecnia*, una dimostrazione degna della maggiore attenzione sotto il rapporto dei processi interamente nuovi che ci sono impiegati. Dobbiamo rimandare, per tutte le particolarità, all' opere di questo sapiente.

TELESCOPIO. Strumento di ottica, composto di più lenti, o di lenti combinate con degli specchi, per mezzo del quale si scorgono distintamente degli oggetti lontani, che non si vedrebbero che confusamente o sarebbero affatto invisibili all' occhio nudo.

Alla parola Canocchiale abbiamo reso conto della invenzione di questo strumento mirabile, la cui influenza sui progressi dell' astronomia si è già fatta palese in un modo così stupendo, e i cui perfezionamenti futuri ci permetteranno senza dubbio un giorno di penetrare più innanzi nelle maraviglie dei cieli. In quest' articolo daremo la descrizione succinta delle diverse specie di telescopj.

I telescopj hanno ricevuto diverse denominazioni a seconda del numero e della forma delle loro lenti e dei loro usi particolari: tali sono il *telescopio di Galileo* o *di Olanda*, il *telescopio astronomico*, il *telescopio terrestre*, il *telescopio aereo*, il *telescopio acromatico*, e il *telescopio di riflessione* sì *catottrico* che *catadiottrico*. I primi cinque, compresi sotto il nome generale di *telescopj di refrazione*, sono più particolarmente indicati col nome di *canocchiali*: la loro teoria essendo basata sugli stessi principj, l' esposizione che siamo per fare di quella del *telescopio astronomico* basterà per dare un' idea esatta degli effetti di questi strumenti.

Telescopio astronomico. Canocchiale composto di due lenti convesse o pianoconvesse, una delle quali serve di objettivo e l'altra di oculare, poste alle due estremità di un tubo, e lontane l' una dall' altra di una distanza eguale alla somma delle loro distanze focali. L' *objettivo* C (*Tav.* CCXXXVIII, *fig.* 1) piano convesso dalle due parti è un segmento di sfera il cui raggio è maggiore di quello dei segmenti di sfera che compongono l' *oculare* D, convesso dalle due parti.

La distanza CD delle due lenti essendo eguale alla somma delle loro distanze focali, i loro fuochi corrispondono agli stessi punti nei quali si forma l' immagine *ab* dell' oggetto. Così i fasci luminosi, che partendo da ciascun punto di un oggetto lontanissimo AB debbono esser considerati come paralleli tra loro, quando arrivano all' objettivo C, vanno a riunirsi nel fuoco F di questa lente ove formano l' immagine *ab* dell' oggetto, la quale è rovesciata perchè i raggi che vengono dalle estremità dell' oggetto s' incrociano nel passare per l'objettivo C. L' oculare D, essendo posto dall' altra parte del fuoco F dell' objettivo a una distanza FD eguale a quella del suo proprio fuoco, i raggi luminosi dopo aver formato in F l' immagine, provano nell' attraversare quest' oculare una nuova refrazione che gli fa convergere verso un punto E, e l' occhio essendo posto in questo punto riceve i raggi come se nel fuoco F vi fosse l' oggetto reale invece della sua immagine. Da ciò resulta che l' immagine *ab* diviene l' oggetto immediato della visione, e l' occhio la vede sotto l' angolo GEH, che è tanto più grande quanto più grande è la distanza focale CF dell' objettivo e quanto più piccola è quella FD dell' oculare. Ora, la grandezza apparente di un oggetto, e dalla quale noi giudichiamo della sua distanza, essendo proporzionale all' angolo visuale sotto il quale essa ci comparisce, l' oggetto AB sembrerà tanto più grande e tanto più vicino all' occhio quanto più grande sarà quest' angolo GEH.

Questo telescopio aumenta dunque il diametro apparente di un oggetto, tante volte quante la distanza focale dall' objettivo contiene la distanza focale dell' oculare, talmentechè, se questa prima distanza è per esempio venti volte più grande della seconda, il diametro apparente dell' oggetto diventerà venti volte maggiore, o, il che è lo stesso, questo diametro sarà veduto a traverso al telescopio quale lo sarebbe ad occhio nudo se l' oggetto non fosse posto che alla ventesima parte della distanza alla quale si trova realmente l' occhio. Si può enunziare questo fenomeno nel modo seguente: *il diametro apparente di un*

oggetto, veduto attraverso al telescopio, sta ol suo diametro apparente veduto ad occhio nudo come la distanza focale dell' objettivo sta alla distanza focale dell'oculare.

La distanza focale di una lente piano-convessa essendo presso a poco eguale al doppio del raggio della sfera di cui questa lente è un segmento, e la distanza focale di una lente convessa dalle sue due parti differendo poco dal raggio della sfera della quale i due segmenti che la compongono supposti uguali, fanno parte; si può facilmente determinare la distanza dell' objettivo dall' oculare di un telescopio, ossia ciò che comunemente si dice la lunghezza del telescopio, per la natura delle lenti di cui si vuol fare uso nella sua costruzione (*Vedi* Lente) come pure l' ingrandimento che farà provare agli oggetti, vale a dire la sua *amplificazione. Vedi* Amplificazione.

Il telescopio che ora abbiamo descritto, ha ricevuto il nome di *astronomico* perchè non se ne fa uso che nelle osservazioni astronomiche, nelle quali è affatto indifferente il vedere gli oggetti diritti o rovesciati. Aggiungendoli due altre lenti dette pure *oculari* si fanno provare ai raggi luminosi nuove refrazioni che raddirizzano l' immagine, e si ha allora il *telescopio terrestre*. Si veda quanto su questo proposito e sul telescopio di Galileo è stato detto all' articolo Cannocchiala.

Telescopio aereo. Questo telescopio, inventato da Huygens, non differisce dal telescopio astronomico che nel modo di disporre le lenti, le quali non essendo situate in un medesimo tubo permettono di dare all' istrumento una lunghezza che non potrebbe ottenersi con un solo tubo senza renderlo incomodissimo e difficilissimo a maneggiarsi. Esso si compone di un grosso bastone AB (*Tav.* CCXXXVIII, *fig.* 2) piantato verticalmente, la cui lunghezza è quella che dovrebbe avere il tubo del telescopio. Questo bastone è piano da un lato, e su questo lato si fissano due righe parallele tra loro e distanti l' una dall' altra di un pollice e mezzo (40 $\frac{7}{2}$ millimetri), talmentechè formano un incavo o scanalatura dall' alto al basso del bastone, scanalatura che deve essere un poco più larga al di dentro che al di fuori. Nell' alto del bastone vi ha una rotella A che gira sul suo asse e sulla quale passa una corda G il doppio più lunga del bastone. Questa corda, della grossezza del dito minimo, serve ad elevare l' apparecchio che contiene l' objettivo; essa è armata nella sua estremità in H di un contrappeso eguale a quello dell' apparecchio. Un pezzo di legno lungo due piedi, viene adattato nella scanalatura che esso può percorrere in tutta la sua lunghezza scorrendo liberamente, ma con fregamento; alla sua metà sono fissati due bracci L ed *l* che sostengono ad angolo retto un altro braccio E, che porta una specie di forchetta F nella quale si muove liberamente un tubo IK al quale è fissato un objettivo. Al tubo IK è adattato un regolo di legno che lo soprayanza di 8 in 10 pollici e al quale è attaccato un filo di seta di cui l' altra estremità è fissata all' apparecchio dell' oculare. Questo secondo apparecchio si compone di un tubo Q molto corto fissato a una riga QV che è posta sopra un asse R che l' astronomo tiene nella sua mano; l' estremità V della riga riceve il capo del filo di seta che si avvolge sopra un piccolo cavicchio in modo che si possa allungare e accorciare a piacere. Il tubo Q contiene l' oculare che si ricopre con un circolo forato con un piccolissimo buco nel mezzo onde separare i raggi luminosi divergenti che potrebbero affaticare l'occhio. Finalmente un sostegno X vien collocato sul terreno, perchè l' osservatore appoggiandovi sopra il braccio possa tener fermo l' oculare.

Tale era il gran telescopio di Huygens col quale potè egli scoprire l' anello di Saturno ed uno de' suoi satelliti. Il suo objettivo aveva una distanza focale di 12 piedi e il suo oculare una di 3 pollici. Egli si servì ancora di un telesco-

pio di 23 piedi di lunghezza con due oculari uniti insieme, aventi ognuno un raggio di curvatura di 9 linee.

Il *telescopio acromatico* è la stessa cosa del telescopio astronomico ordinario reso più perfetto dalla sostituzione delle lenti acromatiche alle lenti ordinarie.

Telescopio di riflessione. Il primo inventore di questa specie di telescopio è il padre Mersenne; ma le obiezioni che gli fece Cartesio sull'idea che gli aveva esposta di tale istrumento lo sconsigliarono dall'attendere alla sua esecuzione. Venti anni dopo, nel 1663, Giacomo Gregory diede nella sua *Optica promota* la descrizione di un telescopio di riflessione, e verso lo stesso tempo in Francia, Cassegrain propose uno strumento presso a poco simile. Nulladimeno se è fuori di dubbio che Newton non ha concepito il primo l'idea dell'istrumento al quale è stato dato il suo nome, è egualmente fuori di dubbio che è stato il primo a vincere le difficoltà le quali avevano arrestato Gregory e Cassegrain, e che non solamente era a lui riserbato, colle immortali sue scoperte, di dimostrare i vantaggi del telescopio di riflessione, ma di costruirne pure uno un poco più lungo di sei pollici col quale poteva leggere ad una lontananza maggiore che con un buon canocchiale ordinario di quattro piedi. Questo successo di Newton, ad onta di ciò che era permesso di sperarne, non eccitò dapprima l'emulazione degli ottici perchè non fu che nel 1719 che Hadley giunse a costruire due telescopj di riflessione di 5 piedi e 2 pollici inglesi, che riuscirono così bene che col loro mezzo si vedevano i satelliti di Giove o di Saturno tanto distintamente come con un telescopio di 123 piedi. Hadley essendosi in seguito unito con Bradley e con Molineux all'oggetto di perfezionare i mezzi di costruzione e di somministrare ai più abili artisti inglesi dei metodi abbastanza sicuri da poter toglier loro il timore di rovinarsi ne' saggi infruttuosi, questa nobile associazione riuscì sì compiutamente che dopo aver comunicato il resultato delle sue ricerche a Scusset, abile ottico, o ad Hearne, fabbricante di strumenti matematici, i telescopj di riflessione divennero di un uso non meno comune di quello dei telescopj ordinarj. Non dobbiamo però passare sotto silenzio che tre ottici francesi, Paris e Gonichon riuniti in società, e Passemant ebbero il coraggio di provarsi alla costruzione dei telescopj di riflessione, e che vi riuscirono senza nessuno dei soccorsi che avevano avuti gli ottici inglesi. I primi telescopj di Paris e Gonichon furono terminati nel 1733, e quelli di Passemant un anno o due dopo.

Telescopio di Newton. Si compone questo telescopio di un tubo ABCD (*Tav.* CXXXIV, *fig.* 2) nel fondo del quale vi ha un grande specchio concavo GH di metallo, di fronte al quale e nel suo asse si pone uno specchio piano K*k*, egualmente di metallo di una figura ellittica e inclinato di 45° sull'asse del tubo, Questo specchio piano deve esser situato tra il grande specchio concavo e il suo fuoco, e ad una distanza da questo fuoco che sia eguale alla distanza del centro di questo specchio piccolo dal fuoco di una lente oculare O che è posta in un piccolo tubo laterale.

In forza di questa disposizione, i fasci luminosi EG ed FH che dall'oggetto giungono allo specchio grande GH, e che dopo la loro riflessione anderebbero a disegnare un'immagine rovesciata *mn* nel fuoco di questo specchio grande, sono ricevuti dal piccolo specchio piano K*k* e riflessi verso l'oculare LL. Siccome gli specchi piani non cangiano niente nella posizione dei raggi di luce che essi riflettono, così l'immagine sarà rovesciata in *sq* come lo sarebbe stata in *mn*.

L'amplificazione di questo telescopio è uguale al numero di volte che la distanza focale dello specchio grande contiene quella dell'oculare.

L'oculare nel telescopio di Newton essendo posto lateralmente, rende questo strumento incomodissimo per osservare gli altri in vicinanza dello zenit. Sic-

come è pure assai difficile il trovare l'oggetto, perciò si adatta al corpo del teloscopio un piccolo canocchiale ordinario che abbia molto campo e l'asse del quale sia parallelo a quello dello strumento. Questo canocchiale che dicesi *trovatore* serve a collocare il telescopio nella direzione dell'oggetto che vuolsi osservare.

Teloscopio di Gregory. Questo teloscopio si compone di due specchi concavi e di uno o di due oculari convessi o piano-convessi.

Il grande specchio concavo LL di metallo ha un foro circolare nel suo centro X, ed è posto nel fondo di un tubo aperto (*Tav.* CXXXIV, *fig.* 3): di fronte a questo specchio e verso l'altra estremità del tubo si pone un secondo specchio concavo EF di metallo, parallelo allo specchio grande, un poco più grande del foro X di questo specchio, e la cui concavità faccia parte di una sfera molto più piccola di quella sulla quale è formato lo specchio grande. Questo specchio piccolo deve esser posto al di là del fuoco dello specchio grande a una distanza tale che il suo proprio fuoco non coincida col fuoco dello specchio grande, ma ne sia lontano di una quantità eguale ad una terza proporzionale tra le distanze focali respettive de' due specchi. All'estremità del tubo grande nella quale è posto lo specchio grande, e di faccia al foro circolare di questo specchio si adatta un altro piccolo tubo NSSN nel quale si pone uno e più generalmente due oculari NN, SS.

In questo stromento, i raggi luminosi che vengono dall'oggetto, dopo essere stati riflessi dallo specchio grande LL vanno a dipingere nel suo fuoco G un'immagine rovesciata KH dell'oggetto, al di là della quale divengono di nuovo divergenti. Ricevuti questi raggi sul piccolo specchio EF, vengono da questo riflessi convergenti verso gli oculari, e divenuti anco più convergenti in forza del loro passaggio a traverso all'oculare NN, vanno a disegnare in ZZ un'immagine in senso contrario alla prima KH; ed è quest'ultima immagine che posta in forza della disposizione delle lenti nel fuoco del secondo oculare SS diviene l'oggetto immediato della visione.

L'amplificazione di questo telescopio è eguale al quadrato della distanza focale dello specchio grande diviso pel prodotto delle distanze focali dello specchio piccolo e dell'oculare.

La maggior difficoltà da vincersi per ottenere dei buoni teloscopj di riflessione, è la costruzione degli specchi metallici, dei quali la curva deve essere di una esattezza rigorosa, e la levigatezza di una eccessiva perfezione. Questi specchi sono fatti secondo Hadley con una lega di due parti di rame, di una di ottone e di un'altra di stagno. Passement componeva i suoi di 20 parti di rame, di 9 di stagno e di 8 d'arsenico: per lustrarli poi si fa uso di smeriglio e di polvere di stagno calcinato, di tutte le composizioni quella che è la più bianca, la più dura, e che meglio riflette la luce è una lega di 32 parti di rame, 15 di stagno, una di ottone, una d'argento ed una di arsenico. Ma non è buona per gli specchi molti grandi, perchè è troppo facile a rompersi. Gli specchi di platino sono superiori a tutti gli altri.

I telescopj di riflessione debbono ad Herschel un grado di perfezione incomparabile con tutto quello che era stato fatto prima di lui. Quando cominciò ad occuparsi della costruzione di questi strumenti, l'amplificazione dei più grandi di quelli che si facevano non oltrepassava quattrocento volte il diametro dell'oggetto: egli ottenne presto un'amplificazione, doppia, tripla e quadrupla di questa e giunse anco a costruire un teloscopio newtoniano di 7 piedi che ingrandiva duemila volte. Tra tutti gli strumenti però costruiti da Herschell merita di esser ricordato il suo gran teloscopio di cui il re d'Inghilterra volle fare tutte le spese. Noi lo abbiamo rappresentato nella figura 7 della Tavola CXLIX,

estratta dalle *Transazioni filosofiche*, del 1795, ove esso ha una descrizione di 65 pagine con 19 tavole. Nella nostra figura si scorge la base circolare I, I, I, sulla quale gira la macchina sopra 24 cilindri, 12 interni e 12 esterni, per mezzo di due canapi; questa base ha 44 piedi di diametro e 3 di altezza. Il piede è composto di 4 scale di 49 piedi, che reggono le taglie per mezzo delle quali si alza il tubo A; il posto dell' osservatore è in C in vicinanza dell' oculare del telescopio; E e D sono due camere di 12 piedi che contengono il peodolo e il piccolo movimento; verso la camera E sono i martinetti, ve ne sono di quelli che servono per montare la galleria B, per muovere la culatta ove è lo specchio, per montare il teloscopio e per girarlo. La culatta si muove sopra due semi-circoli di ferro e due catene. La macchina intera gira imperniata sopra un asse nel centro. In questa macchina tutto è enorme, lo specchio ha 4 piedi di apertura e pesa 1955 libbre di marco. È situata a Slongh in una corte di 160 piedi.

Questo immenso lavoro fu cominciato verso la fine del 1785 e terminato al principio del 1787; ma non fu che nel 27 Agosto 1789 che Herschel fu pienamente soddisfatto del suo strumento: il giorno dopo, il 28 Agosto, scoprì un sesto satellite di Saturno. Questo telescopio non ha che un solo specchio, e l'oculare è disposto in modo da applicarsi immediatamente alla prima immagine focale. Il suo potere amplificante aumenta più di 6000 volte il diametro apparente degli oggetti.

Sarebbe forse questo il luogo di esaminare i vantaggi e gl' inconvenienti dei diversi telescopj di cui abbiamo parlato, ma tali particolarità, ci allontanerebbero troppo dai limiti che ci siamo prefissi in questo Dizionario. In altri articoli abbiamo parlato dei cannocchiali acromatici. *Vedi* Acromatico.

TEMPELHOF (Giorgio Federico), tattico alemanno, nato a Tramp nella Marca di mezzo il 17 Marzo 1737, studiò con frutto le matematiche all' università di Halla. Entrò quindi nelle armate prussiane e si distinse in molte campagne. Dopo la pace del 1763 continuò i suoi studj a Berlino, e si mise in relazione con Eulero, Lambert, Sulzer, Lagrange ed altri dotti. Successivamente fu fatto istruttore degli uffiziali d' infanteria e di cavalleria, ebbe il diploma di nobiltà, e divenne capo comandante del corpo di artiglieria. Morì a Berlino il 13 Luglio 1807. Si hanno di lui le seguenti opere: I *Introduzione all' analisi degl' infinitamente grandi*, Berlino, 1769, in-8; II *Introduzione all' analisi degl' infinitamente piccoli*, ivi, 1769, in-8; III *Calcolo esatto degli ecclissi del sole e delle stelle, prodotti dall' interposizione della luna*, ivi, 1772, in-8; IV *Il bombardiere prussiano*, ivi, 1781, in-8; V *La Geometria pei soldati e per quelli che non lo sono*, ivi, 1790, in 8; VI *Saggio sulla soluzione del problema*: determinare l' orbita di una cometa per mezzo di tre osservazioni, Utrecht, 1780, in-4; VII *L' arte della guerra spiegata con esempj*, opera postuma, Zerbst, 1801, in-8.

TEMPERATURA (*Fisica*). Alla parola Termometro saranno descritti i diversi termometri di cui si fa uso per misurare la temperatura dei corpi: questi strumenti, fondati sulla proprietà che hanno i fluidi di dilatarsi riscaldandosi, non sono paragonabili tra loro che dentro certi limiti che noi dobbiamo qui avvertire.

Se si espongono ad un medesimo calore due termometri, l' uno a mercurio e l' altro a spirito di vino, si osservano ben presto delle differenze più o meno sensibili nelle loro indicazioni: per esempio, se il termometro a mercurio indica 20 gradi di Réaumur, il termometro a spirito di vino non accenna che 16°,5. Questo fenomeno nasce dal non dilatarsi l' alcool secondo la legge medesima del mercurio; e siccome non esistono due liquidi che si dilatino nella

stessa maniera dobbiamo aspettarci che, ad eccezione dei due punti fondamentali della scala termometrica, due strumenti costruiti con liquidi differenti non indicheranno mai lo stesso grado di temperatura. Deluc, a cui si debbono molte osservazioni sulle indicazioni termometriche, ha ottenuto i resultati che si vedono esposti nel seguente quadro.

Gradi corrispondenti
indicati dai termometri costruiti con differenti liquidi

Mercurio	Alcool rettificato	Olio d'uliva	Olio essenziale di Camomilla.	Olio essenziale di Timo.	Acqua saturata di sal marino.	Acqua pura.
80	80	80	80	80	80	80
75	73,8	74,6	74,7	74,3	74,1	71
70	67,8	69,4	69,5	68,8	68,4	62
65	61,9	64,4	64,3	63,5	62,6	53,5
60	56,0	59,3	59,1	58,3	57,1	45,8
55	50,7	54,2	53,9	53,3	51,7	38,5
50	45,3	49,2	48,8	48,3	46,6	32,0
45	40,0	44,0	43,6	43,4	41,2	26,1
40	35,1	39,2	38,6	38,4	36,3	20,5
35	30,3	34,2	33,6	33,5	31,3	15,9
30	25,6	29,3	28,7	28,6	26,5	11,0
25	21,0	24,3	23,8	23,8	21,9	7,3
20	16,5	19,3	18,9	19,0	17,3	4,1
15	10,2	14,4	14,1	14,2	12,8	1,6
10	9,7	9,5	9,3	9,4	8,4	0,2
5	9,3	4,7	4,6	4,7	4,2	0,4
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
— 5	— 3,9				— 4,1	
— 10	— 7,7				— 8,0	

La scala di questi termometri è quella di Réaumur, vale a dire che la distanza tra il punto del ghiaccio che si fonde e quello dell'ebullizione dell'acqua è divisa in 80 parti eguali.

Biot ha trovato, che indicando con t il grado segnato dal termometro a mercurio e con T il grado corrispondente segnato da un altro termometro, la relazione di queste due quantità era rappresentata con sufficiente esattezza dall'equazione

$$T = At + Bt^2 + Ct^3,$$

nella quale A, B e C sono costanti differenti per ciascun liquido. I valori di

queste quantità per l' alcool rettificato sono

$$A = 0,784\,,\quad B = 0,00208\,,\quad C = 0,00000775\,,$$

talmentechè si ha generalmente, tra le temperature indicate da due termometri, l' uno a mercurio e l' altro ad alcool l' eguaglianze

$$T = 0,784t + 0,00208t^2 + 0,00000775t^3.$$

Il termometro a mercurio deve sempre esser preso per termine di confronto con gli altri liquidi, perchè il mercurio ha la proprietà di dilatarsi di una medesima quantità per ciascun grado di calore, almeno dentro i limiti della scala termometrica, il che non procede in nessun altro corpo solido o liquido; i soli gas si dilatano uniformemente per qualunque accrescimento di temperatura, (*Vedi* CALORE). Perciò il termometro ad aria è il solo strumento atto a dare una misura esatta del calore, e per giudicare dell' esattezza delle indicazioni del termometro a mercurio fa d' uopo confrontarle colle sue. Ora si trova che tra i limiti 0° e 80° della scala di Réaumur, o tra 0° e 100° della scala centigrada, le temperature indicate dal termometro a mercurio sono esattamente le stesse di quelle indicate dal termometro ad aria; ma questo non ha più luogo per le temperature al di sopra dell' acqua che bolle, e, ammettendo come ciò dev' essere che la dilatazione dell' aria continui ad essere uniforme, ne resulta che quella del mercurio non è sensibilmente costante che tra 0° e 100°.

Il mercurio, divenendo solido a —36° e volatizzandosi a +360°, non può servire di corpo termometrico che in questi limiti di temperatura pei quali si sono ottenuti i resultati segnenti:

Temperature indicate dal termometro a mercurio.	Temperature indicate dal termometro ad aria.
— 36°	— 36°
0	0
100	100
150	148,70
200	197,05
250	245,05
300	292,70
360	350,00.

Il termometro ad aria, per quanto sia perfetto ne' suoi movimenti, non può disgraziatamente soddisfare a tutti i bisogni della scienza, perchè questo apparecchio è distrutto dalla fusione del vetro, che ha luogo ad una temperatura molto inferiore a quella della maggior parte dei metalli: cosicchè per misurare le alte temperature è forza ricorrere ad altri strumenti. Quelli che sono stati immaginati per tale oggetto diconsi *pirometri*. Il più usitato è il *pirometro di Wedgwood* che è fondato sulla proprietà che ha l' argilla di contrarsi invece di dilatarsi per effetto del calore. Questo fenomeno essendo stato osservato da Wedgwood egli fece preparare dei tubi di argilla di dimensioni esattamente determinate, quindi gli espose ad un calore sempre più intenso per studiare le leggi delle loro contrazioni. La contrazione dell' argilla, sembrando effettuarsi sempre nella stessa guisa, e questa sostanza non riprendendo il primitivo suo volume dopo il raffreddamento, Wedgwood, seppe mettere a profitto tutte queste circostanze per costruire un apparecchio che, per quanto sia imperfetto,

non ha per questo reso meno grandi servigi alle arti industriali. Il pirometro di Wedgwood è composto di una lastra di rame ABCD (*Tav.* CCIII, *fig.* 1) sulla quale sono fissati due regoli dello stesso metallo leggermente inclinati l'uno sull'altro; uno di questi regoli ha una scala di 240 parti eguali che diconsi *gradi pirometrici* e di cui lo *zero* corrisponde al punto della massima divergenza tra i due regoli. Dei piccoli tronchi di cono *abcd* fatti di argilla e cotti al calor rosso incipiente, sono formati in modo che introducendoli nel canaletto formato dai regoli possono internarsi fino alla divisione della scala indicata collo zero. Quando si vuol conoscere la temperatura di un grado di calore vi si introduce un crogiuolo chiuso contenente uno dei piccoli coni di argilla, che poi si ritira quando si giudica che abbia acquistato la temperatura del fornello. Quando si è raffreddato s'introduce nel canale facendolo scorrere fino al punto più stretto a cui possa arrivare, e la divisione della scala indica la temperatura in gradi pirometrici.

Per confrontare le indicazioni di questo strumento coi gradi del termometro, bisognerebbe conoscere esattamente la corrispondenza delle scale e il grado del termometro che corrisponde allo zero del pirometro; ma, oltrechè le leggi della contrazione dell'argilla sono pienamente ignote, è piuttosto per convenzione, che per ragione di una qualche sufficiente approssimazione, che si è stabilito che lo zero del pirometro corrisponda a 580°,55 del termometro centigrado e che ogni grado pirometrico equivale a 72°,22 dello stesso termometro.

TEMPO. Intuizione pura ed invariabile, che accompagna tutte le nostre intuizioni degli oggetti tanto interni che esterni, e senza la quale queste intuizioni non sarebbero possibili. *Vedi* Filosofia delle Matematiche n.° 15.

In *astronomia* il *tempo* si misura per mezzo del movimenti apparenti del sole; la rivoluzione diurna di quest'astro, ossia la parte del tempo che scorre tra due de' suoi passaggi consecutivi al meridiano, forma il *giorno*; la sua rivoluzione periodica, ossia il numero dei giorni che scorrono tra l'istante nel quale esso occupa un punto qualunque dell'ecelittica e quello nel quale è di ritorno nel medesimo punto, dopo aver percorso l'ellittica intera, forma l'*anno*. *Vedi* Anno e Calendario.

Si distingue il tempo in *tempo civile* e in *tempo astronomico*. Una volta era uso degli astronomi di fissare il principio del giorno all'istante del passaggio del sole al meridiano, cosicchè il giorno detto *astronomico* si contava da un mezzogiorno ad un altro; ma quest'uso è in oggi abbandonato, e il principio del giorno è fissato generalmente alla *mezzanotte*.

Il *tempo astronomico* si distingue in *tempo solare vero* e *medio* e in *tempo sidereo*. Il *tempo solare vero* è quello che si misura mediante la rivoluzione diurna del sole, e si conta perciò in giorni solari veri che sono ineguali tra loro: il *tempo solare medio* è quello che si misura colla rivoluzione diurna del sole, la cui durata è media tra le più lunghe e più corte rivoluzioni diurne di quest'astro, e si conta perciò in giorni solari medj eguali tra loro. Il *tempo sidereo* si misura col *giorno sidereo* che è la durata di una rivoluzione diurna della sfera delle stelle fisse.

Il *tempo civile* è la stessa cosa che il tempo solare medio. Si vedano per maggiori particolarità gli articoli Equazione del tempo e Ora.

TEODOLITO (*Geodesia*). Strumento di cui si fa uso per misurare gli angoli nelle operazioni geodesiche. Il suo nome è stato formato dalle parole greche θεάομαι *vedere*, e ὁδὸς *distanza*.

Esistono diverse specie di *teodoliti*, ma tutti questi strumenti si compongono in generale di un circolo graduato sul quale gira un'alidada armata di un cannocchiale. Questo cannocchiale è disposto in modo da potere alzarsi o abbassarsi

e la quantità di cui la direzione sua differisce da quella della linea orizzontale si trova indicata sopra un semi-circolo verticale. In tal guisa, quando lo strumento è posto nel piano dell' orizzonte si possono misurare tutti gli angoli orizzontali e verticali. La figura 2 della Tavola CLXIX rappresenta un *teodolito*.

TEODOSIO DI TRIPOLI, geometra celebre dell' antichità, nacque nella Bitinia. Secondo Vossio, la cui autorità è stata seguita da tutti gli storici della scienza, fu contemporaneo di Gemino di Rodi e di Sosigene, astronomi che fiorirono cinquant' anni prima dell' era cristiana, ed è perciò un errore quello commesso da alcuni scrittori che lo hanno confuso con un filosofo scettico dello stesso nome, che viveva verso la fine del secolo decimo dell' era volgare. S' ignorano le particolarità della vita di Teodosio: quanto si sa si ristringe a questo, che aveva due figli, i quali coltivavano le matematiche con successo. Dei tre opuscoli che ci rimangono di lui, il principale è il suo *Trattato della Sfera*, che ha conservato al suo autore un posto distinto nella storia della scienza. Quest' opera è divisa in tre libri. Era intenzione di Teodosio di stabilire in essa solidamente i principj geometrici dell' astronomia sferica. Non fece che raccogliere le diverse verità trovate prima di lui dai geometri e dagli astronomi; il terzo libro però contiene parecchie proposizioni assai notabili e di una difficoltà abbastanza grande da avere indotto Pappo ad illustrarle e commentarle. Montucla considera quest' opera di Teodosio come uno dei monumenti più preziosi dell' astronomia antica. Un astronomo moderno, Delambre, ne ha dato un giudizio assai diverso e molto severo. Contuttociò il *Trattato della Sfera* di Teodosio è stato lungamente classico in astronomia: tradotto in arabo, fu da questa lingua voltato in latino da un Platone di Tivoli, la cui versione fu stampata in Venezia nel 1518. G. Vogelin, professore d'astronomia, pubblicò di nuovo la sfera di Teodosio, in latino, Vienna, 1529, in-4. Ma G. Pena, matematico francese, stampò la prima edizione del testo greco con una versione latina, Parigi, 1558, in-4. L' opera stessa fu pubblicata nel medesimo anno in latino da Maurolico, Messina, in-fol., e poscia da Clavio, Roma, 1586; dal p. Mersenne nell' *Universae geometriae synopsis*, dal p. de Chales nel *Cursus mathematicus*, e da Barrow, Londra, 1675, in-4. La migliore edizione è quella di Hunt, greca e latina, Oxford, 1707, in-8. Ne è stata fatta una traduzione in francese da Henrion, Parigi, 1615, in-4. Gli altri due opuscoli che ci rimangono di Teodosio sono: 1.° *De habitationibus liber unus*; 2.° *De diebus et noctibus libri duo*. Furono pubblicati per la prima volta in greco e in latino in continuazione della *Sfera* da Dasipodio, Strasburgo, 1572. Vennero pubblicati poi in latino da Giuseppe Auria con altri opuscoli di astronomia, il primo, Roma, 1587, ed il secondo, ivi, 1591, in-4. Il *trattato delle abitazioni* è stato tradotto in francese da Forcadel. Vitruvio attribuisce a Teodosio l' invenzione di un orologio solare universale e portatile; e Suida cita di lui altre opere che andarono perdute.

TEONE, matematico greco, soprannominato l' *antico*, era di Smirne e fioriva sotto i regni di Trajano e di Adriano, nel principio del secondo secolo dell' era cristiana. Tolomeo, nella sua *Sintassi*, ci fa sapere che ebbe occasione di ripetere un' osservazione sul pianeta di Venere fatta da Teone tre anni prima. Non si conosce nessuna particolarità della vita di Teone di Smirne. Aveva composto un trattato di astronomia di cui ci rimangono pochi versi pubblicati da Bouillaud: si ha però di lui l' opera che aveva composta per agevolare la lettura di Platone. Essa è un compendio delle quattro scienze matematiche: l' aritmetica, la musica, la geometria e l' astronomia. Bouillaud ne pubblicò le prime due parti con una versione latina e con note sotto questo titolo: *Eorum quae in*

mathematicis ad Platonis lectionem utilia sunt expositio, Parigi, 1644, in-4. Se ne trova una corta espesizione nella *Storia dell' astronomia antica* di Delambre. Psello non ha fatto che eopiare l'opera di Teone nel suo trattato: *De quatuor mathematicis scientiis*. Credesi che le altre due parti non edite ancora si conservino tra i manoscritti della libreria ambrosiana di Milano. Montucla si lagna che nessuno abbia ancora pensato a pubblicarle, persuaso siccome egli è ebe esse ci farebbero eonoscere molte cese siogolari. Per altre notizie sopra Teone si censultino le opere di Montucla e di Delambre.

TEONE, celebre matematieo di Alessandria, era contemporaneo di Pappo, e fioriva nella seconda metà del quarto secolo. Fu ono dei più illustri professori della scuola di Alessandria, che tiene un luogo tanto distinto nella storia della scienza. È noto che quivi egli osservò, nel 365, degli ecelissi del sole e della luna, ma rineresce che nao ci abbia lasciato il mezzo di cni si valse per ealcolarli. Aveva due figli; nno maschio chiamato Epifanio, ed una femmina, la celebre e sventurata Ipszia (*Vedi* Ipazia), di cui fu il primo maestro. Par sua figlia ei probabilmente compose le dne opere ebe di lui ci rimangono e che sono destinate a facilitare lo studio delle matematiehe. Sono queste un *Comento* sugli *Elementi* d'Euclide, ed nn altro sull'*Almagesto* di Tolomeo. Il primo fu pubblicato per la prima volta in continuazione di Euclide, per cura di Grineo, Basilea, 1533, in-fol.; e tradotto poscia in latino da Commandino, e sovente ristampato. Il secondo era composto di 13 libri, ebe non tutti sono giunti fino a noi. Nieeolò Cabasilas ristabilì il terzo libro; si fece oso del comento di Pappo per compiere il qointo; ma la fine del decimo, totto l'undecime, e il prioripio del duodecimo mancano affatto. Per quante in questo comentu nulla vi sia che non possa trovarsi anco nell'Almagesto, pure è da considerarsi, dopo il libro di Telomeo, come l'opera di astronomia la più importante e la più curiosa che ci rimanga dei Greci, ed è l'ultima che sia uscita dalla scuola d'Alessandria. Teone è pure autore di parecchi teoremi elamentari e di alcuni esempi figurati di calcolo. È oscuro e prolisso: Delambre lo ridusse più semplice nell'esposizione che ha fatto dei comento di Teone nella sua *Storia dell'astronomia antica*. Tale comento comparve la prima volta in continuazione dell'edizione principale di Tolomeo, Basilea, 1538, in-fel. Fu tradetto in francese da Halma, Parigi, 1821, 2 vol. in-4: tale versione è accompagnata dal testo greco corretto sopra antichi manoscritti, ed è corredata di note. Da alcuni si attribuiscono a Teone le *Tavole manuali*, che altri reputano di Tolomeo: queste tavole, destinate ad agevolare i computi ai calcolatori delle effemeridi, sono state tradotte da Halma e pubblicate a Parigi, 1822-23, 2 vol. in-4. Passa sotto il nome di Teone ancora un *Comento intorno ad Arato*, che è stato tradotto in francese a pubblicato da Halma in continuazione delle *Tavole manuali*. Teone aveva composto parecchie altre opere, di cui Suida conservò i titoli: tali sono dei trattati di *Aritmetica*, della *Canicolo*, dell'*Escrescenza del Nilo*, dei *Presagj* e del *Grido dei corvi*; ed in fine un *Comento sul piccolo astrologo*; cioè sulla Raccolta degli opuscoli degli astronomi della scuola d'Alessandria, chiamata col nome di *piccola*, in contrapposizione alla *Sintassi* di Tolomeo, detta *Grande componimento astronomico*.

TEOREMA. In matematicbe, è una proposizione che enuncia una verità concernente la natura o le proprietà di un oggetto: per esempio, la proposizione: *la somma dei tre angoli di un triangolo equivale a quella di due angoli retti*, è un *teorema*.

Un teorema è sempre una proposizione sintetica, perchè aggiunge alla cognizione che già si ha dell'oggetto nuove determinazioni della sua natura: esso non è dunque mai evidente di per se stesso come un semplice *assioma*, che è

una semplice proposizione d' identità, e richiede una dimostrazione per divenira certo.

TEORIA. Questa parola, che è presso a poco sinonime di *speculazione*, si applica generalmente a un complesso qualunque di cognizioni puramente speculative, che riposano cioè sopra principj che una volta stabiliti possono colla loro combinazione condurre alla scoperta di altre cognizioni indipendentemente dalla esperienza. Nelle arti, la *teoria* è considerata come l' opposto della *pratica* o della *esecuzione*, perchè quest' ultima esige una certa abilità, che non può essere che il resoltato dell' esperienza. Quanto al vero senso della parola *teoria* in matematica, si consulti l' articolo Tecnia.

TERMINE (*Algebra*). Parte di una quantità distinta dalle altre coi segni + o —. Per esempio, se una quantità è espressa con $Ax+By+C$, Ax, By, C sono i *termini* di questa quantità.

Una quantità che non è composta che di un solo termine, come A, o Ax, o Ax^2y, ec., prende il nome di *monomio*. Le si dà il nome di *binomio* quando è composta di due termini, come $A+B$, o $A+Bx$, o x^2+xy, ec. E in generale s' indica col nome di *polinomio* quando è composta di più termini. *Vedi* Polinomio.

Si dà ancora il nome di *termini*, alle quantità che tra loro si confrontano per stabilire dei rapporti. Per esempio, se si ha $A:B=m$, A e B sono i *termini* del rapporto m. Parimenta, se le quantità A, B, C, D formano la proporzione

$$A : B :: C : D,$$

queste quantità sarenno i *termini* di questa proporzione, cioè: A il *primo termine*, B il *secondo termine*, ec. *Vedi* Proporzione.

TERMOMETRO (*Fisica*). Strumento destinato a misurare gli accrescimenti e le diminuzioni del calore della sostanze che col suo mezzo si provano. La parola *termometro* deriva dalle voci greche θερμός *caldo* e μετρὸν *misura*.

La prima invenzione di tale strumento, che risale alla fine del XVI secolo, è attribuita ad un olandese chiamato Drebbel. Fu quindi perfezionato dall' Accademia del Cimento di Firenze nel XVII secolo: ma i principj esatti della sua costruzione non furono scoperti che lunga pezza dopo, e contemporaneamente da Farenheit a Danzica e da Résumur in Francia.

Il termometro oggidì il più in uso è quello che dicasi *termometro di Deluc*, perchè questo celebre fisico ne ha fatto l'oggetto di un gran numero di ricerche particolari. L' apparecchio di cui si compone e che adesso passeremo a descrivere non differisce da quelli di Faranheit e di Réaumur.

Si prende un tubo di vetro MN (*Tav.* XLVI, *fig.* 3) esattamente calibrato che porta ad una delle sue estremità N una palla di vetro NO, si scalda questa palla tenendo aperta l' estremità M dal tubo all' oggetto di dilatare l' arie che esso contiene, quindi si rovescia a s' immerge per l' estremità M in un bicchiere pieno di mercurio. A misura che l' aria interna si condensa raffreddandosi, il mercurio sale nel tubo in forza della pressione esterna dell' atmosfera. Quando il tubo ed una parte della palla son pieni di mercurio, si rivolta l' istrumento e si chiude ermeticamente l' estremità aperta alla fiamma di une lucerna. Fatta questa prima costruzione, s' immerge la palla nell' acqua bollente e allore il mercorio dilatandosi sale nel tubo fino ad un punto B che si dice punto *d' ebullizione* e al quale si conserva costantemente finchè la palla di vetro rimane nell' acqua bollente. S' immerge poscia la palle nel ghiaccio che si fonde, il mercurio scende fino ad un punto A ove si conserve costante-

mente fisso fintantochè il ghiaccio è interamente fuso. Questo punto A si dice *punto di congelazione naturale*. La distanza AB, tra i punti in tal modo determinati si chiama la distanza fondamentale, che serve a costruire la scala sulla quale si misurano i gradi del calore, secondo la maggiore o minore altezza della colonna di mercurio. Così, dopo avere attaccato il tubo ad una piccola tavoletta, si divide la distanza fondamentale AB in 80 parti eguali, e si continua a segnare delle divisioni eguali tanto al di sotto di A che al di sopra di B, finchè si estende la lunghezza del tubo. In A si segna o e si comincia a contare da questo punto sì per andare in alto che per andare in basso. Nell'uso popolare del termometro i gradi al di sopra di zero diconsi i *gradi del calore*, e i gradi al di sotto i *gradi del freddo*.

Il *termometro* detto di *Réaumur*, contiene dello spirito di vino colorato invece di mercurio, ma la sua scala è la stessa di quella di cui abbiamo dato adesso la costruzione. Réaumur fu il primo a segnare collo zero il punto di congelazione, e con 80 quello di ebullizione.

Il *termometro di Farenheit* è di mercurio come quello di Delue, e ne differisce soltanto nella scala, poichè la distanza fondamentale AB vi è divisa in 180 parti o gradi, e lo zero si trova posto al di sotto di A ad una distanza eguale a 32 di queste parti, talchè il punto di congelazione naturale trovasi segnato 32° e quello di ebullizione 212°. Il punto zero di questo termometro si dice *punto di congelazione artificiale* perchè corrisponde a un grado di freddo ottenuto, mediante una mescolanza di neve e di ammoniaca.

Altri fisici hanno adottato scale differenti tra le quali dobbiamo particolarmente distinguere quella del termometro svedese detto *termometro di Celsio*, adottato dai chimici francesi sotto il nome di *termometro centigrado*. La distanza fondamentale essendo divisa in 100 parti eguali il punto di ebullizione in questo termometro è segnato 100°, il punto di congelazione naturale 0°.

Il termometro a mercurio di Celsio o centigrado, e quello di Réaumur o piuttosto di Delue, sono i soli di cui fanno uso i dotti francesi. Gl'Inglesi usano il termometro di Farenheit. Si può facilmente trovare la corrispondenza dei gradi di questi diversi strumenti, ossia ridurre il numero dei gradi indicati da uno di questi termometri ai numeri dei gradi indicati dagli altri nelle stesse circostanze per mezzo delle seguenti semplicissime relazioni.

Sia R il numero dei gradi sulla scala di Delue o di Réaumur, F quello della scala di Farenheit e C quello della scala centigrada, si avrà:

1.° Per convertire i gradi di Réaumur in gradi di Farenheit

$$\frac{9R}{4}+32=F.$$

2.° Per convertire i gradi di Farenheit in gradi di Réaumur

$$\frac{4(F-32)}{5}=R.$$

3.° Per convertire i gradi Réaumur in gradi centigradi

$$\frac{5R}{4}=C.$$

4.° Per convertire i gradi centigradi in gradi di Réaumur

$$\frac{4C}{5}=R.$$

5.° Per convertire i gradi di Farenheit in gradi centigradi

$$\frac{5(F-32)}{9}=C.$$

6.° Per convertire finalmente i gradi centigradi in gradi di Farenheit

$$\frac{9C}{5}+32=F.$$

Nell' uso di queste formule deve osservarsi di dare il segno + al numero che esprime i gradi in una scala qualunque, quando questi gradi sono al di sopra dello zero della scala, e il segno — quando i gradi sono al di sotto dello zero. Proponiamoci per esempio di trovare i numeri dei gradi che corrispondono, nei termometri di Deluc e di Celsio a 25° del termometro di Farenheit. Facendo F = 25 nelle formule 2.° e 5.°, si avrà

$$\frac{4(25-32)}{9}=R=-3\frac{1}{9}$$

$$\frac{5(25-32)}{9}=C=-3\frac{8}{9}$$

il che significa che 25° del termometro di Farenheit corrispondono a $3^\circ\frac{1}{9}$ al di sotto di zero nel termometro di Deluc, e a $3^\circ\frac{8}{9}$ al di sotto di zero nel termometro di Celsio. Se si trattasse di ridurre $-10^\circ\frac{1}{9}$ di Réaumur in gradi centigradi e in gradi di Farenheit, si troverebbe nella stessa guisa, facendo $R=-10\frac{1}{9}=-\frac{91}{9}$,

$$\frac{-\frac{91}{9}\cdot 9}{4}+32=32-\frac{91}{4}=9^\circ\frac{1}{4}=F,$$

$$\frac{-\frac{91}{9}\cdot 5}{4}=-\frac{91}{9}\cdot\frac{5}{4}=-\frac{455}{36}=-12^\circ\frac{23}{36}=C.$$

Donde segue che $10^\circ\frac{1}{9}$ *al di sotto di zero* del termometro di Deluc equivalgono a $9^\circ\frac{1}{4}$ *al sopra di zero* di Farenheit, e a $12^\circ\frac{23}{36}$ *al di sotto di zero* del termometro centigrado.

La costruzione dei termometri, per rendere questi strumenti paragonabili tra loro, presenta delle difficoltà ed esige delle precauzioni minuziose di cui occorre vedere i dettagli nei trattati di fisica.

Termometro ad aria. Consiste questo termometro in un tubo MNO ricurvo

in N (*Tav.* XLVI, *fig.* 4) e terminato con in bolla O. La parte superiore della bolla contiene dell'aria, e il resto dello spazio è ripieno di mercurio che si alza presso a poco fino alla metà della parte più lunga del tubo. Quando l'aria è riscaldata in O, essa si dilata e il mercurio si alza; quando l'aria si raffredda, il mercurio si abbassa. Tale era in principio il termometro di Drebbal.

Nel *termometro a aria* di Lambert, la distanza fondamentale tra i punti di congelazione naturale e di ebullizione, determinata come abbiamo indicato di sopra, è divisa in 370 parti.

Vi ha un'altra specie di termometro a aria di cui si fa uso per misurare i piccolissimi cangiamenti di temperatura. Si compone questo, al pari del termometro ordinario, di un tubo di vetro terminato con una palla vuota: ma, invece d'introdurvi del mercurio, non si fa altro che separare l'aria interna dall'aria esterna, per conoscere le variazioni di temperatura per mezzo dei cangiamenti di volume dell'aria interna. A tale effetto, si prende la palla nella mano all'oggetto di riscaldare un poco l'aria che vi si trova rinchiusa: questo riscaldamento avendola alquanto dilatata ed avendone scacciata una parte, si pone all'orifizio una piccola gocciola di spirito di vino colorato, e quindi si lascia raffreddare lo strumento ritirandone la mano. L'aria interna si contrae raffreddandosi, e la piccola goccia di liquido entra nel tubo, ove sale a scende secondochè la massa dell'aria interna si dilata o si ristringe.

Quando invece di un tubo terminato da una sola palla, si fa uso di un tubo che ha una palla ad ognuna delle sue estremità e nel quale si è introdotta, per un piccolo foro che poscia si chiude, una gocciola di spirito di vino colorato, lo strumento prende il nome di TERMOSCOPIO. La bolla colorata non è allora influenzata che dalla differenza di temperatura delle due masse d'aria che essa separa, e indica questa differenza di temperatura colla posizione che essa occupa nel tubo.

TERMOSCOPIO (*Fisica*). Strumento destinato a far conoscere i cangiamenti che avvengono nell'aria rapporto al caldo e al freddo. Spesso si confonde col termometro. *Vedi* TERMOMETRO.

TERRA (*Astron.*). In astronomia è uno dei pianeti principali che compongono il sistema solare, è il terzo nell'ordine delle distanze dal sole, e descrive intorno a quest'astro un'orbita ellittica compresa tra le orbite di Venere e di Marte. Gli astronomi la indicano col segno ♁. In geografia è il globo che noi abitiamo, composto di parti solide e di parti fluide.

La teoria della terra è stata considerata in ogni tempo come una delle parti le più importanti delle scienze fisiche, o almeno come quella che più intimamente interessa l'esistenza materiale dell'uomo. Non può dubitarsi che le prime ricerche di quello spirito d'investigazione che eminentemente distingue l'essere ragionevole non abbiano dovuto rivolgersi particolarmente sul luogo nel quale ei deve condurre la sua esistenza. Affezionato per la sua natura a questo luogo che ei può percorrere ma che non gli è lecito di abbandonare, il primo suo bisogno intellettuale era quello di scoprirne la forma, di determinarne i limiti, di studiarne gli accidenti. Così fino dalla più remota antichità sono stati fatti dei tentativi per misurare le dimensioni della terra, che già si era scoperto essere un globo o un corpo sferico isolato nel seno dello spazio assoluto: e, se i resultati di queste prime misure non possono oggidì passare nemmeno per una grossolana approssimazione, non dobbiamo per questo avere una minore ammirazione pel genio di coloro che i primi si sono accinti animosamente alla soluzione di un problema, del quale tutte le forze riunite della scienza moderna non sono state ancora bastanti a dare una soluzione rigorosa.

La sfericità o la forma rotonda della terra si manifesta per diversi fenomeni

fisici facili ad osservarsi. Tale, per esempio, è la linea circolare che termina l'orizzonte di qualunque spettatore, la cui vista non sia limitata da montagne o da ineguaglianze di suolo. Infatti, quando siamo nel mezzo di una vasta pianura, se si osserva intorno a noi ci sembra di occupare il centro di un circolo che ha per circonferenza la linea lo cui l'atmosfera sembra confondersi col suolo. A misura che si cammina, si scopre una nuova porzione di terreno dalla parte verso la quale ci dirigiamo, mentre si cessa di scorgerne una porzione eguale dalla parte opposta: ma sembra sempre che il punto che si occupa sia il centro di una circonferenza determinata dall'incontro del suolo coll' atmosfera. Lo stesso fenomeno si osserva in cima ad un'alta montagna, colla sola differenza che la circonferenza dell'orizzonte visibile è tanto più grande quanto uno è più elevato; ma qualunque sia l'estensione del terreno che si scopre la sua figura è sempre circolare. Ora è evidente che simili apparenze non potrebbero aver luogo se la superficie della terra, facendo astrazione dalle ineguaglianze del terreno, non fosse una superficie convessa in tutti i sensi. Una tal curvatura diviene in special modo sensibile in mare. Tutti sanno che quando un vascello comincia a scoprire la terra, i primi oggetti visibili sono le parti le più elevate del suolo, cioè la sommità degli edifizj. Per esempio, dalla vetta A di un albero di vascello (*Tav.* LV, *fig.* 4) si scopre la sommità B' di un edifizio, prima che sia possibile di scorgerne il piede D, che rimane nascosto dalla convessità delle acque.

La forma rotonda dell'ombra della terra negli ecclissi della luna è un altro fenomeno che prova la sua sfericità, e se ne dovette fare uso come di un mezzo di dimostrazione dacchè fu acquistata la certezza che questi ecclissi riconoscono per causa immediata il passaggio della luna attraverso all'ombra projettata dalla terra (*Vedi* ECCLISSE). Ma, senza ricorrere a simili argomenti che già suppongono cognizioni astronomiche sufficientemente estese, bastano i fenomeni dell' orizzonte visibile e i differenti aspetti che presenta la volta celeste quando si cangia di luogo sulla terra, per dimostrar chiaramente che la terra è un corpo sferico.

I primi osservatori si accorsero dunque ben presto della figura rotonda della terra, che fin d'allora dovettero considerare come una sfera perfetta, poichè le ineguaglianze della sua superficie, confrontate col suo volume, sono appena valutabili; ma la misura delle sue dimensioni offrì loro delle difficoltà insormontabili, quantunque in ultima analisi, in questa ipotesi della terra esattamente sferica, il problema si riduca alla determinazione della grandezza di una parte aliquota di uno de' suoi circoli massimi. Abbiamo detto altrove che la posizione di un punto della superficie della terra è interamente determinata quando si conosce la sua *longitudine* e la sua *latitudine*, e che tutti i punti che sono situati sul medesimo *meridiano* terrestre hanno la stessa longitudine (*Vedi* LATITUDINE, LONGITUDINE e MERIDIANO), mentre le loro latitudini sono differenti: così si può agevolmente comprendere che, per trovare la lunghezza di un meridiano, basta misurare la distanza di due de' suoi punti, o, il che è lo stesso, l'arco compreso tra questi punti, perchè il rapporto di quest'arco all' intero meridiano è sempre dato dal numero de' suoi gradi, che è eguale alla differenza delle latitudini dei due punti. Supponiamo, per esempio, che partendo da un punto A, la cui latitudine sia di 24 gradi, si sia condotta sulla terra una meridiana che passi per un altro punto B, la cui latitudine sia di 25 gradi: la distanza del punto A dal punto B, ossia l'arco del meridiano terrestre compreso tra A e B, sarà dunque di un *grado*, e sarà per conseguenza la trecentosessantesima parte in un intero circolo massimo della terra. Così, per ottenere la grandezza di questo circolo in misure usuali come il metro o la tesa, non ci

resterà più che da misurare con un metro o con una tesa la distanza dei punti A a B, e da moltiplicare per 360 il numero di metri o di tese che avremo trovato. Per quanto semplice apparir possa questa operazione, essa esige, per essere eseguita con una precisione capace di dare un' approssimazione sufficiente, metodi di calcolo ed istrumenti di cui erano sprovvisti gli antichi, e presenta inoltre difficoltà che farà pienamente conoscere ciò che siamo per dire.

La prima valutazione della grandezza della terra è riferita da Aristotile nel suo libro *De Coelo*, nel quale, al capitolo IV, dice che gli *antichi matematici* avevano trovato che la circonferenza della terra era di 400000 stadj. Ma siccome egli non spiega punto la lunghezza dello stadio di cui parla, e d'altronde, supponendo che egli abbia voluto intendere dello stadio dei Greci in uso al suo tempo, ne risulterebbe pel grado terrestre, composto così di $1111 \frac{1}{9}$ stadj, un valore presso a poco doppio di quello che ci danno le moderne misure, così è d'uopo considerare questa valutazione piuttosto come una vaga congettura che come una vera misura. Nulladimeno, in occasione della gran questione degli *antichi* e dei *moderni*, si pretese che i Caldei fossero gli antichi matematici di cui parla Aristotile, e che la lunghezza del loro stadio fosse di 51 tese e 10 pollici, donde si concluse che gli antichi avevano misurato la terra colla stessa esattezza dei moderni. Sventuratamente per questa pretensione non poco ridicola, la lunghezza di 51 tese e 10 pollici non resulta dalla restituzione delle misure caldee per mezzo di altre misure contemporanee, ma dall' ipotesi gratuita che i $1111 \frac{1}{9}$ stadj del grado terrestre fossero equivalenti alle 57060 tese trovate da Picard per la lunghezza del grado da lui misurato.

Una misura della terra più autentica è quella d'Eratostene: questi, dopo aver misurato l'arco del meridiano compreso tra Siene ed Alessandria, ed averlo trovato di $7^\circ \frac{1}{5}$, ne concluse che la circonferenza della terra aveva 250000 stadj, il che dà al grado terrestre $694 \frac{4}{9}$ stadj. Se si ammetta che lo stadio di cui fece uso Eratostene fosse lo stadio egiziano, la sua valutazione del grado sarebbe inferiore al vero non meno di 20000 tese, mentre se si suppone che si servisse dello stadio olimpico, sarebbe essa troppo grande almeno di 6000 tese. Del resto pare che Eratostene non misurasse effettivamente la distanza da Alessandria a Siene, ma si contentasse di considerarla di 5000 stadj secondo la comune opinione dei viaggiatori. Egli s' ingannò ancora supponendo queste due città sotto lo stesso meridiano, mentre Siene trovasi a più di 3 gradi all' oriente di Alessandria.

Passeremo sotto silenzio un' altra misura della terra tentata da Possidonio, la quale non presenta esattezza veruna, per venir tosto a parlare del primo tentativo eseguito con mezzi realmente scientifici; intendiamo dire della misura di un grado del meridiano operata dagli astronomi arabi sotto il regno dell' illustre Califfo El Mamoun. Questo principe avendo risoluto di misurare la terra più esattamente di quello che fatto avevano gli antichi, inviò degli abili matematici in una vasta pianura della Mesopotamia chiamata *Singiar*: quivi si divisero essi in due sezioni, una delle quali andò verso il nord e l'altra verso il sud, misurando, ognuna col cubito alla mano, una linea meridiana condotta geometricamente. In tal guisa si allontanarono gli uni dagli altri, finchè misu-

rando l' altezza del polo non si furono discostati di un grado dal luogo della loro partenza, dopo di che si riunirono insieme e trovarono pel valore del grado terrestre, gli uni 56 miglia e gli altri 56 miglia e due terzi, essendo il miglio composto di 4000 cubiti. Dopo aver discusso le loro misure, adottarono l'ultima.

Il cubito di cui qui si tratta è, secondo Albufeda, il *cubito nero* che comprendeva 27 *digiti*, ognuno dei quali era della lunghezza di sei grani d'orzo posti gli uni accanto agli altri, mentre, secondo Almassoudi, altro autore arabo, questo cubito sarebbe stato stabilito dal Califfo in 27 digiti della lunghezza di cinque grani d'orzo. Almassoudi pretende ancora che il grado terrestre fosse trovato di 27 miglia. Secondo le esperienze riferite da Thévenot nella relazione del suo *Viaggio d'Asia*, occorrono 144 grani di orzo per formare l'estensione di un piede e mezzo di Parigi; così, adottando questa valutazione, che è tutt' altro che rigorosa, il grado misurato dagli Arabi sarebbe stato trovato di 63750 tese secondo Albufeda, e di 53123 tese secondo Almassoudi.

Fino al principio del secolo XVII, non si eseguì veruna misura della terra della quale fosse possibile di fare alcun conto, ma il tentativo ingegnoso di Fernel impegnò finalmente diversi astronomi ad attendervi in un modo più geometrico e più esatto. Snellio entrò il primo nell'arringo, e se s'ingannò nel calcolo de' suoi triangoli, donde avvenne che egli trovò per la lunghezza del grado una quantità minore di quella che in realtà resulta dalla sua operazione, gli rimane la gloria incontrastabile di avere inventato il metodo impiegato in seguito dagli astronomi di tutte le nazioni, metodo di cui passiamo adesso a dare una spiegazione per l'intelligenza di ciò che saremo per dire.

Indichiamo con A, B, C, ec. (*Tav.* XLVI, *fig.* 6) una serie di luoghi eminenti, come montagne, torri, campanili ec., tra i quali debba passare la meridiana. Dopo aver preso con un buono strumento gli angoli che fanno tra loro le linee tirate dagli uni agli altri di questi oggetti, e formata in tal guisa una serie di triangoli collegati tra loro, la quale termini alle estremità della linea da misurarsi, si misura l'angolo che fa uno dei lati di questi triangoli colla meridiana, il che somministra il mezzo di determinare la posizione di tutti gli altri lati rapporto a questa linea. Ciò fatto, si misura in qualche posizione comoda, come in una pianura, una lunga base LM, e per mezzo di operazioni trigonometriche se ne conclude la lunghezza di un lato dei triangoli vicini, per esempio AB. Conosciuto una volta questo lato, è facile calcolare la lunghezza di tutti quelli della serie dei triangoli, e, mediante la loro posizione nota rispetto alla meridiana, le parti di questa meridiana *Ab*, *bc*, *cd*, ec. comprese tra le parallele che passano per A, B, C, D, ec. Si ha coll'addizione di tutte queste parti la lunghezza dell'arco del meridiano compreso tra le parallele dei luoghi estremi; non riman dunque da fare altro, che misurare la differenza di latitudine di questi luoghi estremi, donde si viene a conoscere a qual porzione del meridiano corrisponde la lunghezza trovata, e così si conclude la lunghezza del grado a quella della circonferenza. Per una maggiore esattezza, e come un mezzo di verificazione, si deve determinare all'estremità della serie dei triangoli opposta alla base, una nuova base NO, e se la lunghezza misurata di questa nuova base è la stessa di quella che resulta dal calcolo, collegandola con un ultimo lato GI, possiamo esser certi che non si è commesso nessun errore.

Con questo metodo Snellio misurò un arco di $1^\circ\ 11'\ 30''$ sulla meridiana di Berg-op-Zoom, ma come abbiamo avvertito s'ingannò ne' suoi calcoli, e il suo errore gli fece valutare il grado terrestre a 55021 tese. La morte gl'impedì di rettificare l'errore di cui si era accorto, e fu Musschenbroeck, nelle mani

del quale caddero i suoi manoscritti, che calcolò di nuovo tutti i triangoli di Snellio, secondo le correzioni che questi vi aveva fatte, e in tal modo trovò 57038 tese pel valore del grado.

Questa rettificazione della misura di Snellio non ebbe luogo che dopo la celebre misura eseguita da Picard: nel tempo intermedio, Riccioli aveva intrapreso un' operazione simile, altri dotti si erano egualmente applicati a grandi lavori sullo stesso soggetto; ma tutti i loro resultati erano talmente discordanti che l'Accademia delle Scienze credè di doversi occupare seriamente di questa interessante questione, ed incaricò Picard, già celebre per molte altre osservazioni delicatissime, di misurare nuovamente un grado terrestre nelle vicinanze di Parigi. Ei l'intraprese e l'eseguì negli anni 1669 e 1670. Questa misura, eseguita con un sistema di precisione fino allora sconosciuto, fissò la lunghezza del grado terrestre a 57060 tese. In seguito sono stati notati alcuni leggeri errori nelle operazioni, ma è oggimai dimostrato rigorosamente che tali errori possono produrre tutto al più una differenza di una trentina di tese nella lunghezza del grado. Non deve passarsi sotto silenzio che fu la nuova misura di Picard che rimise Newton sulla via delle immortali sue scoperte, inducendolo a ricominciare sui resultati della medesima tutti i calcoli che aveva abbandonati sulla fede di una falsa valutazione del grado terrestre. *Vedi* GRAVITÀ.

La Francia aveva dato allora al mondo dotto la prima determinazione veramente approssimata della grandezza della terra, quando ad un tratto la questione venne a rappresentarsi sotto un aspetto affatto nuovo e bene altrimenti complicato. Il re, dietro la proposizione dell'Accademia delle Scienze, avendo inviato Richer a Cayenne per diverse osservazioni astronomiche, questo dotto osservò che il suo orologio ritardava ogni giorno di circa due minuti e mezzo sul tempo medio, per quanto avesse dato al pendolo la stessa lunghezza che si prendeva in Francia, e fu obbligato, per regolarlo, di accorciare questo pendolo di una linea e un quarto. L'annunzio di questo fenomeno eccitò lo stupore degli astronomi, e già cominciava ad esser messo in dubbio, quando, alcuni anni dopo, Varin e Deshayes, inviati in diversi luoghi della costa d'Affrica e d'America per farvi delle osservazioni, notarono questo fatto nei luoghi prossimi all'equatore: la lunghezza di cui furono obbligati ad accorciare il pendolo fu anco più considerevole di quella di Richer. Tali osservazioni non permettendo più di dubitare che la lunghezza del pendolo a secondi non variasse sotto le diverse latitudini, Huygens che mediante la sua bella teoria delle forze centrali avrebbe potuto annunziare il fenomeno *a priori*, ne cercò le cause e tosto riconobbe che la principale di esse risedeva nella rotazione della terra sul suo asse. Ma ciò che vi ha veramente di notabile nel suo lavoro si è che le sue riflessioni lo condussero a concludere che la terra non è esattamente sferica come fino allora erasi creduto, ma che è schiacciata verso i poli ed elevata sotto l'equatore. Egli tentò pure di calcolare la quantità dello schiacciamento, ossia la differenza tra il diametro dell'equatore e quello dei poli, e la trovò eguale a $\frac{1}{578}$; vale a dire che prendendo il numero 578 per rappresentare il diametro equatoriale, quello dei poli verrebbe rappresentato da 577.

Nel tempo medesimo, Newton, con un'applicazione della nuova sua teoria della gravitazione, giungeva alla stessa conclusione, ma fissava la quantità dello schiacciamento soltanto a $\frac{1}{230}$, quantità che differisce assai meno dalle valutazioni moderne.

Nell' ipotesi della terra schiacciata, un solo grado è insufficiente per determinare le sue dimensioni, e d' altronde diveniva oltremodo interessante il misurare più gradi per poter confrontare i resultati dell' esperienza con quelli della teoria. Queste considerazioni colpirono il governo francese, che sempre pronto a favorire i progressi delle scienze, ordinò che non solo fosse verificata la misura di Picard impiegandovi tutti quei nuovi mezzi che la perfezione continuamente crescente degli strumenti e delle teorie poteva aver fatto scoprire, ma che fosse ancora prolungata la meridiana attraverso alla Francia fino a Dunkerque verso il nord, e fino a Collioure verso il mezzogiorno; estensione che comprendeva l' ampiezza di circa 8 gradi. Lahire fu incaricato della parte del nord, e Domenico Cassini di quella del mezzogiorno, e da tutte queste operazioni resultò che la lunghezza media del grado terrestre in Francia era di 57058 tese. Persuasi da un singolare paradosso geometrico che se la terra era una sferoide schiacciata verso i poli, i gradi terrestri dovevano diminuire di lunghezza andando dall' equatore verso i poli, e forse non tenendosi sufficientemente in guardia contro le illusioni che questo pregiudizio poteva far nascere, gli autori di queste nuove misure trovarono che i gradi terrestri diminuivano di lunghezza dal mezzogiorno al settentrione, e si affrettarono a pubblicare questo resultato con tanta maggior fiducia che essi credevano con ciò di confermare lo schiacciamento della terra considerato allora generalmente come probabilissimo.

Per parecchi anni si rimase convinti che le osservazioni concordavano colla teoria, almeno quanto alla conseguenza generale, ma finalmente i geometri vennero a far vacillare questa fiducia dimostrando rigorosamente che questo preteso accordo delle osservazioni colla teoria riposava sopra un falso ragionamento, e che, ben lungi dell' andar decrescendo dall' equatore verso il polo, i gradi di una sferoide schiacciata verso i suoi poli dovevano andar crescendo a partire dall' equatore. Il paralogismo geometrico sul quale trovavasi fondato l' errore è troppo specioso per non darne qui la soluzione: poichè vi sono ancora molte persone che esso potrebbe sedurre nel modo stesso che ha potuto ingannare matematici istruitissimi.

Se la terra fosse una sfera perfetta, il meridiano terrestre sarebbe una mezza circonferenza di circolo, e dividendolo in 180 gradi eguali, i raggi condotti dai punti di divisione al centro della sfera formerebbero 180 angoli eguali, ognuno d' un grado. Questi raggi, prolungati indefinitamente, dividerebbero in 180 gradi eguali il meridiano celeste, talmentechè le divisioni del meridiano terrestre corrisponderebbero esattamente a quelle del meridiano celeste. Reciprocamente, se si supponesse il meridiano celeste diviso in 180 gradi eguali, le rette condotte dai punti di divisione al centro della terra dividerebbero il meridiano terrestre in 180 gradi eguali. Tutto questo è evidente. Ora, il numero dei gradi di un arco del meridiano terrestre non può conoscersi che mediante quello dell' arco corrispondente del meridiano celeste: se due punti A e B, per esempio, del meridiano terrestre sono situati in modo che lo zenit del punto A sia distante dallo zenit del punto B della quantità di un grado, vale a dire se questi due zenit intercettano un arco di un grado sul meridiano celeste, la distanza di questi due punti sarà di un grado terrestre. È noto che lo zenit di un punto della terra è all' estremità della verticale alzata da questo punto, o, in altri termini, è l' intersezione del meridiano celeste colla perpendicolare alzata dal punto del quale si tratta sulla superficie della terra, vale a dire sul piano tangente a questa superficie che s' immagina condotto pel punto. Così è unicamente l' angolo formato dalle verticali de' due punti della superficie della terra che determina l' arco del meridiano compreso tra questi punti, e se è vero che nel caso di una sfera perfetta tutte le verticali concorrono al centro, ciò non ha più luogo nel

caso di una sferoide schiacciata; i gradi di questa sferoide non possono più essere eguali tra loro e sono necessariamente maggiori nella parte schiacciata. Il che passeremo ora a rendere evidente.

Sia ACBD (*Tav.* XLVI, *fig.* 13) un' ellisse di cui AB sia l' asse maggiore e CD l' asse minore: supponiamo che da ognuno dei punti m, n, o, p, ec. dell' arco AC si siano condotte delle perpendicolari alle tangenti alla curva, delle quali questi punti siano i *punti di contatto*; le intersezioni di tutte queste perpendicolari genereranno la curva EI, che sarà l' evoluta del quarto di ellisse AC (*Vedi* EVOLUTA), ed ognuna di queste perpendicolari sarà il raggio del *circolo osculatore*, o il raggio di curvatura del punto dell' ellisse al quale essa corrisponde. Ciò posto, è evidente che considerando la semi-ellisse CAD come un meridiano terrestre, gli zenit dei diversi punti m, n, o, p, ec. si troveranno sul prolungamento delle perpendicolari della curva in questi punti. Così, per non considerare che gli archi estremi, gli zenit dei punti C ed s saranno sul meridiano celeste in Z' e Z, e gli zenit dei punti A ed m in Z''' e Z'': ora, se gli archi celesti ZZ' e Z''Z''' sono ciascuno eguali ad un grado, gli angoli delle verticali, cioè ZIZ' e Z''EZ''' saranno eguali, e gli archi terrestri Am e Cs saranno ognuno di un grado terrestre. Ma questi archi Am e Cs potendo esser considerati come appartenenti a circoli i cui raggi siano mE e CI, le loro lunghezze sono proporzionali a quelle di questi raggi, perchè sono ognuno la stessa parte aliquota della circonferenza di cui fanno parte. Dunque l' arco di un grado terrestre Am situato nella parte allungata dell' ellisse è più piccolo dell' arco di un grado terrestre Cs situato nella parte schiacciata, e ne resulta rigorosamente che, se la terra è schiacciata verso i poli, i gradi terrestri del meridiano debbono esser più piccoli verso l' equatore che verso i poli, o, in altri termini, che debbono andare continuamente crescendo a partire dall' equatore.

Ecco ora la causa dell' errore di cui abbiamo parlato. Non osservando che le perpendicolari all' ellisse non sono come quelle del circolo, le quali concorrono al centro, per determinare i gradi dell' ellisse, si descriveva sul suo asse AB (*Tav.* CCXXXVII, *fig.* 1) un circolo che si divideva in gradi, dopo di che si conducevano dei raggi nei punti di divisione, e siccome l' angolo di un grado GCB verso la parte allungata intercetta un arco ellittico EB maggiore dell' arco DF compreso tra i lati dell' angolo di un grado ICH verso la parte schiacciata, se ne concludeva che lo schiacciamento della terra verso i poli produceva un decrescimento nei gradi terrestri cominciando dall' equatore.

Bastava additare un tale errore perchè fosse tosto riconosciuto, e gli autori delle nuove misure si trovarono nella impossibilità di combattere le dimostrazioni che venivano loro opposte. Ma, non volendo abbandonare osservazioni che credevano sicurissime, si videro finalmente costretti a sostenere che la terra era una sferoide allungata verso i poli. Nuove misure prese nel 1733 e 1734, non più sul meridiano ma sopra un circolo di latitudine, sembrarono dover fortificare questa singolare conclusione, e per lo spazio di circa quaranta anni la terra rimase per la Francia una sferoide allungata, malgrado le dimostrazioni di Newton e di Huygens.

Non si può prevedere quanto tempo avrebbe ancora durato questo scandalo scientifico, se il governo francese non avesse finalmente preso a cuore le objezioni che alcuni geometri rinnovavano di tempo in tempo contro un sistema che non potevano conciliare colle leggi dell' idrostatica. Sostenevano essi che supponendo anco che le osservazioni fatte in Francia avessero tutta l' esattezza possibile, la differenza tra i gradi consecutivi erano troppo piccole per esser valutate perfettamente, e che perciò era impossibile di dedurre alcuna cosa di ragionevole prima di aver misurato dei gradi in luoghi lontanissimi gli uni da-

gli altri. Furono dunque ordinate nuove operazioni, e, perchè fossero decisive, si stabilì che si misurasse un grado in vicinanza dell' equatore e un altro grado presso il circolo polare.

Godin, Bouguer e La Condamine partirono nel 1735 per il Perù, e l'anno dopo Maupertuis, Clairaut, Camus e Lemonnier, ai quali poi si unì l'abate Outhier corrispondente dell'Accademia e l'astronomo svedese Celsio, andarono in Lapponia. I primi, a motivo di tutte le difficoltà che incontrarono nel loro viaggio, non poterono tornare in Francia che circa sette anni dopo la loro partenza: i secondi non restarono che sedici mesi assenti. Tutto quello che qui possiamo dire di queste belle spedizioni si è che esse risolvettero la questione in favore dello schiacciamento della terra, e che i Cassini stessi ebbero il nobile coraggio, dopo aver verificato tutte le loro antiche misure, di riconoscere pubblicamente di aver commesso alcuni errori, e che le nuove loro rettificazioni concorrevano a dimostrare che la terra era una sferoide schiacciata verso i poli. La lunghezza del grado del meridiano, misurato all' equatore, fu trovata di 56753 tese, e quella del grado in Lapponia, sotto una latitudine media di 66° 20', di 57422 tese. Nella verificazione dei gradi della Francia fatta da Cassini di Thury unitamente a Lacaille fu riscontrato che la tesa di cui si era servito Picard non era la stessa di quella che fu adoprata al Perù, e che è divenuta il modello di tutte le misure prese in seguito per la determinazione del metro.

Riunendo i resultati delle operazioni di cui fin qui abbiamo parlato, egualmente che di alcune altre eseguite da astronomi stranieri presso a poco verso lo stesso tempo, abbiamo formato il seguente quadro.

Latitudine del mezzo del grado		Lunghezza del grado in tese	Nomi degli osservatori
0°	0'	56753	Bouguer, Godin, La Condamine, al Perù.
33	18 A	57037	Lacaille, al Capo di Buona Speranza.
39	12	56888	Mason e Dixon, agli Stati Uniti.
43	1	56979	Boscovich e Maire, negli Stati Romani.
44	44	57024	Beccaria, nel Piemonte.
45	0	57028	Cassini de Thury, Lacaille, in Francia.
45	57	56881	Lisgnig, in Ungheria.
48	43	57086	id. id.
49	23	57069	Picard (corretto), in Francia.
66	20	57422	Maupertuis, Lemonnier, in Svezia.

Tutti questi gradi sono nell' emisfero boreale, ad eccezione del secondo misurato da Lacaille nell' emisfero australe. Dobbiamo inoltre fare osservare che l' esattezza delle osservazioni di Lisganig è stata messa in dubbio.

Se lo schiacciamento della terra verso i poli resulta positivamente da queste misure, non è però possibile di dedurne alcuna cosa di sicuro sulla curva del meridiano nè sulla quantità dello schiacciamento, perchè combinandole a due a due per dedurne il rapporto degli assi della supposta ellissoide, si ottengono resultati affatto discordanti. Per esempio, il grado del Perù confrontato con quello del circolo polare dà per lo schiacciamento $\frac{1}{213}$, mentre, confrontato col grado di Picard, dà $\frac{1}{314}$; il grado australe confrontato con quello dell' equatore dà $\frac{1}{78}$. Eulero, discutendo in una memoria impressa tra quelle dell' Accademia di Berlino del 1752 questi resultati, trovò che i gradi del Perù, della Lapponia e il grado australe si conciliano con sufficiente esattezza colla figura ellittica e dando uno schiacciamento di $\frac{1}{230}$; ma il grado della Francia non si piega in nessun modo a questa conciliazione.

Le differenze che si fanno osservare in questi rapporti hanno fatto supporre che i meridiani della terra non siano ellittici, e che non siano nemmeno archi simili. La misura del grado australe di Lacaille, misura fatta colla più rigorosa esattezza, sembra inoltre annunziare che lo schiacciamento sia più considerevole nell' emisfero australe che nell' emisfero boreale. Nella gran misura dei dodici gradi eseguita da Delambre e Méchain per lo stabilimento del nuovo sistema metrico francese (*Vedi* Misura), si osserva in un certo numero di questi gradi un cammino irregolare, dei salti bruschi, che deviano dalla figura ellittica. Ciò non ostante non si commetterà mai un errore sensibile considerando come ellittica la figura totale di un meridiano; tanto almeno resulta dalle misure le più recenti eseguite dai dotti inglesi sopra basi più ampie e colle precauzioni le più minuziose.

Siccome non possiamo entrare nei dettagli di tali operazioni, per terminare tutto ciò che ha relazione colle misure dei gradi terrestri riuniremo nella seguente tavola quelle che si considerano come le più esatte, esprimendole in metri.

Paese	Amplitudine dell' arco misurato	Latitudine del mezzo dell' arco	Lunghezza del grado in metri	Nomi degli osservatori
Svezia.	1° 37′ 19″	66° 20′ 40″	111488	Svanberg.
Russia.	3 35 5	58 17 37	111362	Struve.
Inghilterra.	3 57 13	52 35 45	111241	Roy, Kater.
Francia.	8 20 0	46 52 2	111211	Lacaille, Cassini.
Francia.	12 22 13	44 51 2	111108	Delambre, Méchaln.
Roma.	2 9 47	42 59 0	111025	Boscovich.
Stati Uniti.	1 28 45	39 12 0	110880	Mason, Dixon.
Capo di B. S.	1 13 17,5	33 18 30	111163	Lacaille.
India.	15 57 40	16 8 22	110653	Lambton, Everest.
India.	1 34 56	12 32 21	110644	Lambton.
Perù.	3 7 3	1 31 0	110580	Bouguer, LaCondamine.

Il complesso di tutte queste misure dà le seguenti generali dimensioni pel globo terrestre:

Diametro equatoriale. . . . . 12754863 metri
Diametro polare 12712251
Differenza o schiacciamento 42612

Così, il rapporto de' due diametri della terra è presso a poco quello di 298 e 299, il che dà per lo schiacciamento un valore un poco più grande di $\frac{1}{300}$.

Quest' ultimo resultato si accorda troppo esattamente con quelli che si ottengono con altri mezzi di coi siamo per tener discorso, perchè non possa oggimai più dubitarsi che le dimensioni della terra siano conosciute presentemente ad un grado sufficiente di approssimazione. Infatti, abbiamo detto che fino dall'esperienze di Richer era stato generalmente riconosciuto che il pendolo a secondi varia di lunghezza sotto le differenti latitudini, e che la causa principale di questa variazione è la rotazione della terra sul suo asse, rotazione che deve dare ai corpi situati alla superficie una forza centrifuga, il cui effetto è quello di neutralizzare una parte della forza del peso in virtù del quale questi corpi tendono verso il centro. Ora, il moto di un pendolo è prodotto dalla caduta del corpo pesante che lo compone, e ad eguaglianza di condizioni, la celerità della caduta deve essere evidentemente tanto più grande quanto più grande è l'intensità della forza che la determina. Abbiamo veduto altrove (*Vedi* Pendolo) che la celerità acquistata nella caduta obbliga, per mezzo della resistenza del punto di sospensione, il pendolo

a risalire, talmentechè la durata di un'oscillazione è intimamente collegata coll'intensità della forza del peso e somministra il modo di determinarla comparativamente. Ma la forza centrifuga dovuta alla rotazione della terra e che agisce in senso inverso al peso ha necessariamente la massima intensità all'equatore, e deve andare continuamente decrescendo dall'equatore verso il polo, poichè i circoli descritti nella stessa durata di 24 ore dai diversi punti di un meridiano terrestre sono tanto più piccoli quanto più questi punti sono vicini al polo, ove la forza centrifuga diviene nulla.

Così, nel caso che la terra fosse una sfera perfetta, siccome in tutti i punti della sua superficie la forza del peso sarebbe la stessa, le modificazioni di questa forza costante per effetto dell'influenza delle diverse forze centrifughe dalle quali sono animati i corpi posti in questi punti, seguirebbero esattamente le leggi dell'aumento regolare della forza centrifuga, dal polo ove è nulla, fino all'equatore ove è massima; e, secondo la teoria delle forze centrali, conoscendo il numero delle vibrazioni del pendolo, di una lunghezza invariabile, sotto una data latitudine e per una durata qualunque, potrebbe calcolarsi esattamente il numero delle vibrazioni che eseguirebbe nella stessa durata di tempo sotto un'altra latitudine. Ma se la terra non è una sfera perfetta, i resultati dell'esperienza non potranno più accordarsi con quelli del calcolo, e questa differenza prodotta dall'influenza della forma particolare della terra può divenire, come faremo adesso vedere, un mezzo per determinare questa forma.

Il peso o la gravità di un corpo, fatta astrazione dalla forza centrifuga, resulta, come abbiamo detto altrove, dall'attrazione della terra: questa attrazione non è una forza semplice, ma una forza composta prodotta dalle attrazioni riunite di tutte le particelle di materia di cui è composta la terra, poichè l'attrazione in generale non è la tendenza della materia ad avvicinarsi ad un centro particolare, ma è una proprietà che possiedono tutte le particelle materiali di dirigersi le une verso le altre, e di premere contro l'ostacolo che si oppone alla loro unione. Dunque, se la terra fosse una sfera perfetta, l'attrazione che eserciterebbe sopra un corpo posto alla sua superficie al polo o all'equatore sarebbe sempre la stessa per una ragione di simetria, mentre è evidente che se la terra ha una figura diversa, non esistendo più la stessa simetria, lo stesso resultato non può più aver luogo. Un corpo situato sotto l'equatore ed un secondo corpo perfettamente eguale situato al polo di una sferoide schiacciata si troveranno in condizioni geometriche essenzialmente differenti rispetto alla massa di questa sferoide, e ne resulterà necessariamente una differenza nelle forze attrattive che agiscono sui due corpi. Senza entrare in maggiori particolarità, si vede chiaramente che la forza del peso non può esser costante su tutti i punti di un meridiano ellittico, e che essa deve andare decrescendo dal polo ove è massima, fino all'equatore ove è minima.

Sonovi dunque sulla sferoide schiacciata due cause che concorrono a diminuire l'intensità della forza del peso, e che per conseguenza tendono a modificare la celerità di uno stesso pendolo che si trasporta in luoghi differenti. L'influenza d'una di queste cause, cioè della forza centrifuga, essendo conosciuta, se dalla esperienza è data la modificazione totale, diviene allora possibile di determinare l'influenza della seconda causa; e siccome questa dipende in ultima analisi dalla differenza dei due assi della sferoide, il pendolo offre dunque un mezzo prezioso per trovare questa differenza, ossia la quantità dello schiacciamento della terra.

In seguito di numerose esperienze fatte sulla lunghezza del pendolo a secondi sotto tutte le latitudini accessibili all'uomo, la differenza totale tra i pesi all'equatore e al polo è $\frac{1}{194}$ del peso al polo: perciò, siccome la quantità di

cui la forza centrifuga diminuisce il peso all' equatore è soltanto $\frac{1}{289}$ (*Vedi* Centrale), la differenza di queste due frazioni, ossia $\frac{1}{590}$ è la diminuzione del peso dovuta allo schiacciamento della terra, il che dà $\frac{1}{320}$ pel valore di questo schiacciamento. Mathieu, mediante il confronto delle sei misure assolute del pendolo eseguite sulla meridiana in occasione dei grandi lavori del nuovo sistema metrico, ha concluso uno schiacciamento di $\frac{1}{298,2}$.

Il problema della figura della terra non ha occupato i geometri meno degli astronomi, e mentre questi ultimi si sforzavano di risolverlo per mezzo di operazioni lunghe e penose, i primi non temevano di affrontarlo direttamente, e domandavano la sua soluzione ad una teoria ancora nella infanzia. Se fino ad ora i teorici sembrano essere stati meno felici degli sperimentatori, non deve dimenticarsi che è stata la teoria che la prima ha fatto avvertito lo schiacciamento del globo terrestre, e che da essa deve attendersi la soluzione completa di una questione collegata sì intimamente colla costruzione meccanica dell' universo. Abbiamo detto di sopra che la scoperta dello schiacciamento della terra era stata fatta nel tempo medesimo da Huygens e da Newton: siccome però il primo aveva un' idea molto meno esatta di Newton intorno alla causa e alla misura del peso, la sua valutazione non può esser menzionata oggidì che come un punto storico della scienza: nulladimeno, siccome la base del suo ragionamento è esattamente la stessa di quella su cui Newton stabilisce una valutazione differentissima, noi crediamo di doverla qui indicare.

S' immaginino due canali condotti l' uno dal centro della terra ad un punto dell' equatore, l' altro dallo stesso centro della terra al polo, e sì l' uno che l' altro pieni di uno stesso fluido. Essi sarebbero di un' eguale lunghezza se la terra restasse in quiete; ma la rotazione della terra diminuisce nel primo di questi canali il peso di ciascuna particella di fluido di quella quantità di forza centrifuga che vien prodotta dalla rotazione nella particella medesima. Per un' altra parte questa forza centrifuga cresce per ogni particella in ragione della sua distanza dal centro, vale a dire aritmeticamente. Si ha dunque una somma di pesi eguali dei quali il più lontano è diminuito di tutto lo sforzo della forza centrifuga, mentre il più vicino al centro non prova diminuzione nessuna, ed i pesi intermedj ricevono diminuzioni proporzionali alle loro distanze dal centro; così il peso totale prova una diminuzione che è la metà di quello che avverrebbe se tutte le parti che lo compongono fossero alla massima distanza. Ora, in quest' ultimo caso, la diminuzione sarebbe di $\frac{1}{289}$, perchè all' equatore la forza centrifuga è di $\frac{1}{289}$ di quella della gravità; così il canale esteso dal centro all' equatore proverà una diminuzione di peso eguale alla *metà di un dugentottantanovesimo*, vale a dire $\frac{1}{578}$, e per conseguenza, per contrabbilanciare quello che si stende dal centro al polo e sul quale la rotazione non produce nessuna diminuzione di peso, dovrà avere $\frac{1}{578}$ di lunghezza di più. Dunque il rapporto del semiasse o raggio polare al

raggio equatoriale deve esser quello dei numeri 578 e 579, donde resulta $\frac{1}{579}$ per le quantità dello schiacciamento.

Ma la gravità sulla terra essendo il resultato dell'attrazione scambievole di tutte le parti della terra in ragione inversa dei quadrati delle loro distenze respettive, le particelle situate nell'interno di una sfera pesano meno verso il centro di quelle che sono situate alla sua superficie, e lo stesso ha luogo in una sferoide poco differente dalla sfera. Così, considerando, come Huygens, due canali che si facciano equilibrio, Newton tien conto di questa diminuzione di tendenza o di peso verso il centro che resulta per ogni particelle dalla sua situazione nell'interno della sfera, e che la rende più sensibile all'effetto della forza centrifuga, donde resulta un maggiore allungamento del canale equatoriale. Quanto alla determinazione della quantità di questo allungamento, mancando a Newton i mezzi diretti di calcolo, vi giunse per mezzo di un metodo indiretto ma ingegnosissimo, e trovò che rappresentando con 230 il semiasse polare, il raggio equatoriale vien rappresentato da 231, vale a dire che lo schiacciamento è $\frac{1}{231}$.

Quando le misure di Cassini, che sembrevano contradire la teoria di Newton, ebbero fatto sostenere l'opinione opposta di un allungamento verso i poli della sferoide terrestre, molti grandi geometri ripresero ad esaminare tutta questa teorie, e, partendosi sempre dalla considerazione dei due canali in equilibrio e dalla ipotesi che la terra fosse stata in origine una massa fluida omogenea, tentarono di trattare il problema con metodi diretti di calcolo. Stirling, che dobbiamo citare il primo tra quelli che si applicarono a questo genere di ricerche, scoprì e pubblicò nelle *Transazioni filosofiche* del 1735 un teorema elegantissimo, per mezzo del quale ei giunse ad una valutazione dello schiacciamento poco differente da quella di Newton. Supponendo una sferoide omogenea generate dalla rivoluzione di un'ellisse intorno al suo asse minore, Stirling esamina quale deve essere la direzione primitiva non meno che la quantità del peso in ognuno de' suoi punti. Trovando che in una tale sferoide in quiete, una particella non potrebbe restare sulla superficie senza rotolare dalla parte dei poli, e che perciò un fluido di cui fosse ricoperta una simile sferoide ad una piccola profondità non potrebbe rimanere in equilibrio, concluse che questa sferoide doveva avere una rotazione sul suo asse, perchè i corpi pesanti tendessero perpendicolarmente alla sua superficie, e determinò le celerità di questo moto. Il calcolo fece vedere a Stirling che allora la forza media del peso sta alla forza centrifuga in un punto qualunque, come il prodotto del diametro medio pel seno totale sta al prodotto dei quattro quinti della differenza degli assi dell'ellissoide pel coseno della latitudine. Vale a dire che indicando con D il diametro medio, con e la differenza degli assi, con R il raggio delle tavole dei seni e con λ la latitudine di un punto terrestre, il rapporto della forza media della gravità alle forza centrifuga sarà per questo punto

$$\frac{5DR}{4e\cos\lambda}.$$

Per un punto situato all'equatore si ha $\lambda = 0$, $\cos\lambda = 1$; così, prendendo il diametro D, che è allora il diametro equatoriale, per unità, il rapporto della gravità alle forza centrifuge è all'equatore $\frac{5}{4e}$: ora è noto che quest'ultima è

sotto l'equatore $\frac{1}{289}$ della prima, dunque

$$\frac{5}{4e}=289, \quad \text{donde} \quad e=\frac{5}{1156}.$$

Da questa differenza resulta che se si rappresenta il diametro equatoriale col numero 1156, il diametro polare sarà rappresentato dal numero 1151, vale a dire che questi diametri staranno tra loro come questi numeri, o più semplicemente come i numeri 229 e 230, e che la quantità dello schiacciamento è $\frac{1}{230}$, che non differisce che in un modo appena sensibile dal numero $\frac{1}{231}$ trovato da Newton per mezzo del suo metodo indiretto.

Stirling aveva appena pubblicato il suo teorema che Bouguer, Maclaurin, e in special modo Clairaut si diedero ad un nuovo esame della questione, facendo uso di diverse ipotesi sulla composizione della terra e sulle densità de' suoi strati concentrici. Clairaut dimostrò che, qualunque sia la variazione che esiste nelle densità degli strati terrestri, lo schiacciamento deve esser minore di $\frac{1}{230}$, che corrisponde al caso dell'omogeneità, ed in questo si approssima alle esperienze che ci fanno valutare $\frac{1}{300}$ lo schiacciamento della terra. D'Alembert, Eulero, Lagrange e Laplace si accinsero in seguito a generalizzare sempre più la questione impiegandovi i mezzi potenti di calcolo di cui avevano arricchito la scienza, e possiamo dire che ciò che allora era umanamente possibile tutto è stato fatto da questi illustri geometri. Ma ad onta di tanti sforzi il problema rimane ancora insoluto, poichè mancano del tutto i dati fisici, e nessuna delle ipotesi colle quali si è voluto trattarlo vanta a favor suo una probabilità bastantemente grande da poterla abbracciare con fiducia. Perchè questo probleme potesse esser risoluto in un modo diretto e rigoroso, bisognerebbe conoscere la natura delle forze elementari e primitive della materia, non meno che le leggi che seguono queste forze nel loro equilibrio per costituire i tre stati distinti aeriforme, fluido e solido sotto i quali ci si presenta la materia: senza questa cognizione, tutti i tentativi che volessero farsi col fine di scoprire e di spiegare la forma de'corpi celesti in generale e della terra in particolare non potranno mai condurre che a risultati ipotetici, di cui la sola esperienza potrebbe costatare il maggiore o minore valore, poichè la costruzione di questi corpi, mediante l'equilibrio della materia, dipende evidentemente dalla costruzione della materia stessa. Noi dunque dobbiamo per ora rimetterci, in quanto alla valutazione dello schiacciamento della terra, unicamente ai resultati della misura dei gradi del meridiano e a quelli delle osservazioni del pendolo, e adottare il numero $\frac{1}{300}$ come quello che meglio di ogni altro rappresenta questo schiacciamento.

Sebbene il numero $\frac{1}{300}$ sia molto considerabile quando si tratta delle dimensioni assolute del globo terrestre, diviene quasi impossibile il farne conto nella

costruzione delle sfere che servono a rappresentarlo, poichè per uno sferoide il cui semiasse maggiore avesse per esempio 6 decimetri, lo schiacciamento non sarebbe che di due millimetri, ed una quantità così piccola sarebbe interamente insensibile alla vista se si giungesse a rappresentarla con esattezza. Lo stesso ha luogo, a più forte ragione, delle montagne di cui la più alta non giunge a gran distanza, in linea verticale, alla lunghezza di una lega marina di 20 per grado: il diametro della terra contenendo circa 2292 di queste leghe, non potrebbe rappresentarsi una tal montagna sopra un globo di sei decimetri di diametro che con una prominenza appena sensibile al tatto, ma insensibile affatto all' occhio. Possiamo dunque continuare a rappresentare la terra con una sfera perfetta, mentre le scabrosità della sua superficie confrontate col suo volume sono molto meno considerevoli dalle piccole scabrosità che si veggono sulla scorza di un'arancia.

Se il problema della figura della terra è ancora complicato da difficoltà insormontabili, non è così però delle questioni relative ai movimenti da cui è animato questo globo. Qui il cammino della scienza è certo, i suoi metodi sono rigorosi, e la teoria ed i fatti concorrono a prestarsi un vicendevole appoggio. Finalmente siamo giunti a sapere che la terra non è immobile nel centro dell'universo, come per sì lungo tempo è stato creduto, ma che essa è dotata di due moti distinti, di cui l' uno sotto il nome di *moto diurno* è una rotazione sul suo asse che si effettua nel corso di 23 ore, 56 minuti e 4 secondi, e l'altro, sotto il nome di *moto annuo*, è una rivoluzione intorno al sole che si compie nella durata di un anno. Le diverse particolarità di questi moti essendo già state l'oggetto di diversi articoli di questo Dizionario, dobbiamo qui limitarci a presentarne un semplice sunto.

La terra descrive intorno al sole un' ellisse di cui esso occupa uno dei fuochi, e che è situata nel piano dell'ecclittica. Questo moto è dimostrato teoricamente come una conseguenza necessaria delle leggi della gravitazione universale (*Vedi* Attrazione e Gravità), e si manifesta empiricamente nel fenomeno dell'aberrazione della luce (*Vedi* Aberrazione). La sua durata periodica, che determina quella dell' anno, è di $365^g\,5^{or}\,48'\,51''$: in questo tempo il sole, per una illusione ottica, sembra percorrere l' ecclittica da occidente in oriente.

Supponendo la distanza media della terra dal sole di 100000 parti, l' eccentricità della sua orbita, vale a dire la distanza d' uno dei fuochi dell' ellisse dal suo centro, è di 1679 di queste parti (*Vedi* Eccentricità); così, quando la terra è al suo afelio, ossia nel punto della sua orbita il più lontano dal sole, la sua distanza da quest' astro è di 101679 parti, e quando è al suo perielio ne è distante 98321 di queste stesse parti. La sua distanza massima sta dunque alla distanza minima come 30 a 29.

Il moto di rotazione della terra sul suo asse si effettua da occidente in oriente in un intervallo di 23 ore 56 minuti e 4 secondi. Siccome in questo intervallo la terra si è avanzata nella sua orbita ed è cangiata la sua situazione rispetto al sole, uno stesso meridiano terrestre non torna a coincidere col sole che dopo una rotazione intera più una piccola parte della rotazione seguente, talmentechè riferendo al sole la rotazione della terra sul suo asse la durata di questa rotazione è di 24 ore. È questo moto che produce l'illusione di un moto in senso inverso del sole, dei pianeti e delle stelle fisse. Nel suo doppio moto di rotazione e di traslazione la terra conserva sempre il suo asse in una medesima direzione; e a questa circostanza si dà il nome di *parallelismo dell' asse della terra*. La rotazione della terra vien resa manifesta nell' esperienza della diminuzione del peso all' equatore e dalla deviazione della caduta dei corpi. *Vedi* Deviazione.

Il centro della terra non abbandona mai il piano dell' ecclittica col quale il suo asse fa un angolo di 23 gradi e mezzo. Questa inclinazione essendo costante,

o almeno senza una variazione sensibile, ne resulta che il sole non corrisponde mai perpendicolarmente per due istanti di seguito al medesimo punto della superficie della terra. E questa è la causa che dà luogo al cangiamento delle stagioni, come passeremo adesso a far vedere.

La terra, nella sua rivoluzione annua intorno al sole, avendo il suo asse di rotazione AB (*Tav.* CXCIV, *fig.* 1) inclinato sul piano dell'ecclittica, ha il suo moto di rotazione nel piano dell'equatore EQ, cosicchè ogni giorno deve sembrare che il sole descriva un circolo parallelo a questo equatore. Ma questi circoli cangiano continuamente, perchè quando la terra è in ♈ il sole corrisponde perpendicolarmente all'equatore, e sembra che in quel giorno descriva l'equatore medesimo; mentre, quando la terra è in ♋, il sole corrisponde perpendicolarmente al circolo del tropico MN, sul quale sembra allora che esso si muova. Nelle posizioni intermedie della terra, il sole sembra percorrere dei circoli intermedj tra l'equatore e il tropico. Da ♋ in ♎ l'effetto è tutto opposto: il sole, dopo che ha sembrato percorrere il tropico MN, descrive ogni giorno un circolo che va continuamente avvicinandosi all'equatore, fintantochè, quando la terra è giunta in ♎, esso corrisponde di nuovo perpendicolarmente all'equatore. Da ♎ in ♑ i circoli descritti si trovano tra l'equatore e l'altro tropico TC, che sembra esser percorso dal sole quando la terra è giunta al punto ♑. Finalmente, da ♑ in ♈, il sole corrisponde successivamente ai circoli intermedj tra TC ed EQ, e quando la terra, dopo una rivoluzione, è di ritorno nel segno dell'Ariete, l'equatore sembra esser di nuovo descritto dal sole.

Nelle due posizioni estreme in cui il sole corrisponde perpendicolarmente all'equatore, la durata del giorno è eguale a quella della notte; in tutte le altre posizioni queste durate sono diseguali. L'ispezione della figura fa vedere che i giorni più lunghi hanno luogo per un emisfero quando il sole corrisponde al suo circolo tropico. Nelle nostre regioni, la primavera comincia quando la terra è nella Libbra, e per conseguenza quando il sole ci sembra nel segno dell'Ariete. Lo stesso avviene per tutte le altre stagioni, nelle quali la terra si trova realmente nel segno diametralmente opposto a quello che sembra occupare il sole. La distanza della terra dal sole non influisce in nessuna maniera sul calore delle stagioni, poichè è appunto nell'inverno che la terra percorre quella parte della sua orbita nella quale si trova il perielio.

Per tutto ciò che ha rapporto alla terra si vedano nel Dizionario le parole, Precessione, Nutazione, Perturbazione, Anno e Sole. Quanto alle opere che debbono consultarsi in proposito alla determinazione della sua figura, ecco la lista delle principali: Maupertuis, *De la figure de la terre*; Bouguer, *Figure de la terre*; La Condamine, *Mesure des trois premiers degrés*; Cassini, *Méridienne de Paris vérifiée*; Clairaut, *Théorie de la figure de la terre*; D'Alembert, *Recherches sur differens points du système du monde*; Lagrange, *Mémoires de Berlin*, 1773; Laplace, *Méconique céleste*.

TERZO (*Geom.*) Nome che si dà alla sessantesima parte di un secondo nella divisione sessagesimale del circolo. (*Vedi* Angolo n.° 15).

Si chiama ancora *terzo*, la sessantesima parte di un secondo di tempo. (*Vedi* Ora).

I *terzi*, siano di gradi, siano d'ora, s'indicano con tre piccoli tratti ''' situati alla destra della cifra che ne esprime il numero e un poco al di sopra: per esempio 14''', significa 14 *terzi*.

TESA (*Agrim.*). Misura lineare divisa in 6 parti chiamate *piedi*, e che non è più in uso in Francia dopo lo stabilimento del *metro*. *Vedi* Misura.

TESEO (*Astron.*). Nome sotto il quale trovasi talvolta indicata la costellazione di Ercole

TESSANECK (Giovanni), dotto matematico, nacque nel 1720 in Boemia, e morì nel 1780 a Praga, ove era professore di matematiche trascendenti dell'università. I suoi scritti principali sono: I *Expositio sectionis secundae et tertiae libri primi principiorum mathematicorum philosophiae naturalis a Newtono inventorum*, Praga, 1766, in-8: tale scritto essendo stato accolto dai dotti con sommo favore, l'autore compì la spiegazione del primo libro de' *Principj* di Newton, e la pubblicò col titolo: II *Newtonis philosophiae naturalis principia mathematica, commentationibus illustrata liber I*, ivi, 1768, in-8; e ivi, 1780, in-4, nuova edizione aumentata; III *Pertractatio quorumdam modorum quaestiones geometricas persolvendi*, ivi, 1770, in-8; IV *Pertractatio elementorum calculi integralis*, ivi, 1771, in-8; V Una gran quantità di *dissertazioni* sopra molti ed interessanti soggetti. Per altre notizie su tale distinto matematico ricorrasi alle fonti indicate dalla *Biografia universale*.

TESTA DEL DRAGONE (*Astron.*). Nome che si dà al nodo ascendente della luna, che viene comunemente indicato col segno ☊.

TETRAEDRO (*Geom.*). Uno dei cinque solidi o corpi regolari; è formato da quattro facce che sono triangoli equilateri eguali. Il tetraedro può immaginarsi come una piramide triangolare, di cui le quattro facce siano tutte eguali. *Vedi* Poliedro, Piramide, Regolare.

TETRAGONO (*Geom.*). Poligono di quattro angoli: questo nome deriva dalle parole greche τετρα; *quattro*, e γωνι *angolo*: così il quadrato, il rombo, il trapezio, ec. sono *tetragoni*; più comunemente però si dà loro il nome di *quadrilateri*. *Vedi* Quadrilatero.

TETRAPASTON (*Macc.*). Nome che gli antichi davano ad una macchina composta di quattro pulegge. *Vedi* Puleggia.

TICONE. *Vedi* Brahé.

TOALDO (Giuseppe), professore dell'università di Padova, nacque nel 1719 a Pianezza, piccolo villaggio presso Vicenza. Destinato allo stato ecclesiastico, la sua inclinazione per le scienze gli fece consacrare a queste tutte quelle ore che poteva sottrarre allo studio delle belle lettere e della teologia. Nominato arciprete di un villaggio, non tralasciò le occupazioni sue favorite. Avea già composta una prefazione e delle note interessanti per una ristampa delle opere di Galileo, quando nel 1762 gli venne fatto di ottenere la cattedra di geografia fisica ed astronomica nell'università di Padova. Ridusse ad osservatorio un'antica torre che aveva servito agli Eccelini, vi fece collocare i suoi strumenti, e vi continuò le osservazioni del suo predecessore Poleni. La meteorologia attirò più di ogni altra cosa la sua attenzione. Credè di avere stabiliti dei principj per calcolare con probabilità gli accidenti futuri dell'atmosfera. Avendo osservato che in capo a diciotto anni i fenomeni meteorologici si riproducono e si succedono con poco divario nel medesimo ordine, formò le tavole di tre di tali periodi, ai quali diede il nome di *Saros*, e che gli astronomi chiamano ancora *Cicli Toaldini*. Una sua memoria su questo argomento fu premiata dall'accademia di Montpellier. Zelante fautore delle utili scoperte e dei progressi delle scienze, tale professore armò la specola di Padova del primo parafulmine che sia stato eretto negli Stati Veneti. Infaticabile nello studio, ogni anno pubblicava qualche nuova opera: il suo metodo per determinare le longitudini; le sue tavole di vitalità; il suo discorso sugl' inverni straordinarj; i suoi trattati d' astronomia e di gnomonica riscossero i meritati applausi dei dotti. I giornali italiani, e gli atti delle Accademie di Ber-

lino e di Londra contengono un numero grande di dissertazioni di Toaldo, delle quali Lalande sovente rendeva conto all' Accademia delle Scienze di Parigi. Colpito da apoplessia tale dotto morì a Padova agli 11 Dicembre 1798.

Le principali sue opere sono: I *Trigonometria piana e sferica*, *colle tavole trigonometriche*, Padova, 1769, in-4; ed ivi, 1794, in-4; II *Saggio meteorologico sulla vera influenza degli astri*, ivi, 1770, in-4; ed ivi, 1797, in-4; tradotto in francese da Daquin, Chambery, 1784, in-4; e in tedesco da Feldban, Berlino, 1786, in-8; III *Novae tabulae barometri aestusque maris*, ivi, 1771, in-4; IV *Della maniera di difendere gli edifizj dal fulmine*, Venezia, 1772, in-4; V *Compendio della sfera e della geografia*, ivi, 1773, in-8; VI *La meteorologia applicata all' agricoltura*, ivi, 1775, in-4; tradotto in francese, in tedesco e in spagnuolo; VII *Saggio di studj veneti nell' astronomia e nella marina*, ivi, 1782, in-8; VIII *De methodo longitudinum ex observato transitu lunae per meridianum*, Padova, 1784, in-4; IX *Trattato di gnomonica*, Venezia, 1789, in-4; X *Schediasmata astronomica*, Padova, 1791, in-4; XI *Discorso sui barometri*, nel vol. 5 del giornale di Modena; questo discorso contiene la difesa di Leibnitz contro Deluc intorno all' abbassamento del mercurio nel barometro; XII *De aestu reciproco maris adriatici*, nelle *Transazioni filosofiche* di Londra, anno 1779; XIII *Dell' impulsione della luna sul barometro*, in francese negli Atti dell' Accademia di Berlino, anno 1779; XIV *Il saros meteorologico, e saggio di un nuovo ciclo pel ritorno delle stagioni*, in francese nel giornale di Rozier, anno 1782; XV *Completa raccolta di opuscoli, osservazioni e notizie*, Venezia, 1802, 4 vol. in-8. Si consulti per altre notizie su questo dotto e sulle sue opere l' articolo che lo riguarda nella *Biografia universale*.

TOCCANTE (*Geom.*). Linea retta che tocca in un punto una linea curva. Al giorno d' oggi gli vien dato generalmente il nome di *tangente* (*Vedi* Tangente).

TOFINO de San Miguel (Don Vincenzo), astronomo spagnuolo nato nel 1740, entrò giovanissimo nella marina, e si diede con tanta applicazione e profitto allo studio delle scienze esatte, che nel 1770 divenne professore de' cadetti di marina nell' isola di Leon. Le replicate prove di abilità che egli diede gli fecero affidare l' incarico di visitare insieme con altri dotti scelti da lui le coste della Spagna, di levarne le carte e di pubblicarle insieme al resultato delle loro osservazioni che dovevano servire per ispiegare tali carte. Fu per molti anni direttore dell' osservatorio di Cadice; e quando i dotti francesi, Borda, Pingré, Fleurieu e Verdun visitarono quello stabilimento, fecero i più grandi elogi della intelligenza ed esattezza colla quale vi si eseguivano le osservazioni. Insignito in seguito delle più meritate onorificenze, Tofino, che era già membro corrispondente dell' Accademia delle Scienze di Parigi, morì a Madrid nel 1806. I suoi scritti sono: I *Compendio di geometria elementare e di trigonometria rettilinea*, Leon, 1771, in-4; II *Osservazioni astronomiche fatte a Cadice nell' Osservatorio reale*, Madrid, 1776-77, 2 vol. in-4. III *Atlante delle coste di Spagna*, 1786, in-fol. mass. IV *Portolano delle coste di Spagna nel mediterraneo*, Madrid, 1787, in-4; e ivi, 1795, in-4; V *Portolano delle coste di Spagna nell' oceano atlantico*, Madrid, 1790. Questi due portolani servono a completare le carte dell' *Atlante*. I nomi di Giorgio Juan, d' Ulloa, di Tofino e di Varela, di cui si onora la Spagna, attestano che quella nazione non rimase addietro alle altre quanto alle scienze matematiche nel secolo decimottavo.

TOLOMEO (Claudio, Κλαύδιος Πτολεμαῖος). L' antichità, colpita dal maestoso edifizio del sistema completo di astronomia presentato dall' *Almagesto*, a dimenticando il genio e i lavori d' Ipparco, proclamò l' autore di quel celebre libro

come l' astronomo il più grande che fosse mai esistito, e spesso nell' entusiasmo della sua ammirazione non dubitò di accordargli il nome di *divino*. Per lunghi secoli una tale opinione fu rispettata come una verità storica incontrastabile, e la scienza tutta rimase rinchiusa nell' *Almagesto*. Senza dubbio Tolomeo è stato lodato con troppa esagerazione, senza dubbio i suoi lavori sono stati accettati per lungo tempo con troppa fiducia come l' ultimo e il più sublime sforzo dell' umano ingegno nella scienza astronomica; ma i progressi maravigliosi che hanno distrutto le principali sue ipotesi non potrebbero spogliarlo totalmente della sua gloria, nè il sistema astronomico che porta il suo nome cessa per questo di essere l' opera la più ingegnosa e la più ammirabile che possa immaginarsi fuori della verità. La critica storica ha egualmente obiettato con ragione che questo sistema non era un' idea unica e spontanea di Tolomeo, ma soltanto il resultato dei lavori e delle ricerche di tutta l' antichità. Non può per altro negarsi a questo grand' uomo l' onore di alcune scoperta importanti che appresso indicheremo, e d' altronde avrebbe sempre reso alla scienza un servigio eminente, e il suo merito sarebbe pure incomparabile, quando non avesse fatto altro che coordinare i lavori degli astronomi che l' avevano preceduto, formandone un gran quadro sistematico che ha servito di base alla scienza per quattordici secoli!

Si è per lungo tempo creduto che Tolomeo fosse nato a Pelusio; ma dietro la testimonianza di alcuni antichi scrittori si crede oggi comunemente, senza poterlo per altro affermare con sicurezza, che nascesse a Tolemaide in Egitto, e vivesse verso la metà del secondo secolo dell' era nostra. Ma, oltre che vi resta tuttora alcuna incertezza sul vero luogo della sua nascita, è ancora impossibile di determinarne l' epoca precisa non meno che quella della sua morte. Non è una delle singolarità le meno risaltanti della storia la mancanza completa di tutte le notizie biografiche sopra un uomo di cui è stata sì grande la celebrità. Perciò i suoi lavori ci occuperanno più degli avvenimenti della sua vita; ma crediamo di dovere soprattutto applicarci a dare una idea precisa del suo sistema del mondo, nel che seguiremo l' esposizione chiara e compiuta che ne è stata fatta dal dotto Laplace.

Una delle scoperte le più importanti di Tolomeo è quella dell' evezione della luna. Prima d' Ipparco non si erano considerati i moti di quest' astro che relativamente agli ecclissi, nei quali bastava aver riguardo alla sua equazione del centro, specialmente supponendo con quell' astronomo l' equazione del centro del sole più grande della vera, errore che teneva luogo in parte dell' equazione annua della luna. Sembra che Ipparco avesse già scoperto che questa supposizione non rappresentava più il movimento della luna nelle sue quadrature, e che le osservazioni offrivano in questo rapporto grandi anomalie. Tolomeo seguì con accuratezza queste anomalie, ne determinò la legge, e ne fissò il valore con molta precisione. Per rappresentarle, fece movere la luna in un epiciclo trasportato da un eccentrico il cui centro girava intorno alla terra in senso contrario al moto dell' epiciclo.

Fu un' opinione generale dell' antichità che il moto uniforme e circolare, come il più perfetto, dovesse esser quello degli astri. Quest' errore si è mantenuto fino a Keplero che esso arrestò lungo tempo nel corso delle sue ricerche. Tolomeo l' adottò, e ponendo la terra nel centro dei moti celesti cercò di rappresentare le loro ineguaglianze in questa ipotesi. S' immagini in moto, sopra una prima circonferenza di cui la terra occupi il centro, il centro di una circonferenza sulla quale si muova il centro di una terza circonferenza, e così di seguito fino all' ultima che l' astro descrive con moto uniforme. Se il raggio di una di queste circonferenze supera la somma degli altri raggi, il moto apparente

dell' astro intorno alla terra sarà composto di un moto medio uniforme e di diverse ineguaglianze dipendenti dai rapporti che hanno tra loro i raggi delle diverse circonferenze e i moti dei loro centri e dell' astro. Si può dunque, moltiplicando e determinando convenientemente queste quantità, rappresentare tutte le ineguaglianze di questo moto apparente. Tale è il modo il più generale di considerare l' ipotesi degli epicicli e degli eccentrici, poichè un eccentrico può esser considerato come un circolo il cui centro si muova intorno alla terra con una velocità più o meno grande, e che diviene nulla se è immobile. I geometri prima di Tolomeo si erano occupati delle apparenze del moto dei pianeti in questa ipotesi, e si riscontra nell' *Almagesto* che il gran geometra Apollonio avea già risoluto il problema delle loro stazioni e delle loro retrogradazioni. Tolomeo suppose che il sole, la luna e i pianeti si movessero intorno alla terra in quest' ordine di distanze: la Luna, Mercurio, Venere, il Sole, Marte, Giove e Saturno. Ognuno dei pianeti superiori al sole si moveva in un epiciclo il cui centro descriveva intorno alla terra un eccentrico in un tempo eguale a quello della rivoluzione del pianeta. Il periodo del moto dell' astro sull' epiciclo era quello di una rivoluzione solare, e si trovava sempre in opposizione col sole quando giugneva al punto dell' epiciclo il più vicino alla terra. Nulla in questo sistema determinava la grandezza assoluta dei circoli e degli epicicli. Tolomeo non aveva avuto cura che di conoscere il rapporto del raggio di ciascun epiciclo a quello del circolo descritto dal suo centro. Ei faceva muovere similmente ogni pianeta inferiore in un epiciclo il cui centro descriveva un eccentrico intorno alla terra: ma il moto di questo centro era eguale al moto solare, e il pianeta percorreva il suo epiciclo in un tempo che, nell' astronomia moderna, è quello della sua rivoluzione intorno al sole; il pianeta era sempre in congiunzione col sole quando giungeva al punto il più basso del suo epiciclo. Neppure in questo caso nulla determinava la grandezza assoluta dei circoli e degli epicicli. Gli astronomi anteriori a Tolomeo erano divisi sul posto di Mercurio e di Venere nel sistema planetario. I più antichi, di cui egli seguì l' opinione, gli mettevano al di sotto del sole; gli altri ponevano questi astri al di sopra; finalmente alcuni egiziani gli facevano muovere intorno al sole.

Tali sono le ipotesi alle quali è stato dato il nome di *Sistema di Tolomeo*. Non è del nostro soggetto l' entrar qui nella discussione di cui sono esse state tante volte l' oggetto, nè di dimostrare quanto sarebbe stato facile, introducendo alcune modificazioni in questo sistema, come per esempio l' ipotesi degli Egiziani di riconoscerne gli errori e di approssimarsi maggiormente al vero sistema del mondo. I successori di Tolomeo si contentarono di rettificare con nuove osservazioni gli elementi determinati da quell' illustre astronomo, senza però alterare in nulla le sue ipotesi. L' *Almagesto* conteneva ancora la descrizione di tutti gli strumenti necessari all' osservazione degli astri; e quest' opera, che in tal guisa racchiudeva la storia della scienza, e la scienza intera di quei tempi, è il monumento scientifico e letterario il più prezioso che ci abbia trasmesso l' antichità.

Tolomeo confermò il moto degli equinozi scoperto da Ipparco, ed oltre l' Almagesto scrisse parecchie altre opere che non tutte sono giunte fino a noi. Rese grandi servigi alla geografia raccogliendo tutte le determinazioni di longitudine e di latitudine dei luoghi conosciuti, e gettando le basi del metodo delle projezioni per la costruzione delle carte geografiche. Scrisse un trattato di ottica nel quale descriveva con estensione il fenomeno delle refrazioni astronomiche. Gli viene ancora attribuita la composizione di diverse opere sulla musica, sulla cronologia, sulla gnomonica e sulla meccanica. Considerando la natura e l' estensione dei lavori di Tolomeo è impossibile di non assegnarli un posto distinto

nella storia della scienza, e di maravigliarsi dell' entusiasmo di cui per tanto tempo è stata oggetto la sua persona e i suoi scritti. Sul principio di questa notizia biografica abbiamo detto che nulla si conosce di positivo intorno alla vita di Tolomeo: resulta soltanto da uno scritto filosofico che gli viene attribuito e che è stato tradotto e pubblicato da Boolliaud (*Traité du jugement et de l'empire de l'ame*, Parigi, 1660), che questo grand' uomo rimase per quarant' anni negli *Pteri* o navate del tempio di Canopo, e che vi fece scolpire sulle colonne resultati di tutti i suoi lavori con questa iscrizione: *A Dio Salvatore, Claudio Tolomeo consacra i suoi elementi e le due ipotesi matematiche.*

Le opere di Tolomeo sono state tradotte in tutte le lingue e spesso ristampate. Noi citeremo qui le edizioni le più stimate, trascurando quelle dell' Almagesto al quale abbiamo consacrato un articolo speciale (*Vedi* Alessandria (*Scuola d'*), *ed* Almagesto). I *Ptolemaei opera omnia, praeter geographiam, latine versa*, Basilea, 1541, in-fol. L'omissione indicata nel titolo non è la sola che si osservi in questa collezione, nella quale non si trova nè il *Planisfero*, nè l' *Analemma*. L' edizione di Schrekenfuchs è del 1551, Basilea, in-fol. II *Ptolemaeus de Analemmate, cum Friderici Commandini commentario*, Roma, 1562, in-4; III *Ptolemaei Planisphaerium, sphaerae atque astrorum coelestium ratio, natura et motus*, Basilea, 1536, in-4; Venezia, 1558, in-4; IV *Liber Quadripartiti Ptolemaei — Ejusdem centiloquium*, Venezia, 1484, in-4; ivi, 1493, in-fol.; — *Centum sententiae*, Venezia, 1519, in-4. — *Centum aphorismi*, Colonia, 1544, in-8; V *Ptolemaeus de praedictionibus astronomicis seu quadripartitum graece et latine*, Basilea, 1533, in-8. — *Quadripartitum et Centiloquium*, Praga, 1610, in-12; VI *Ptolemaeus de hypothesibus planetarum, Procli Sphaera*, Londra, 1620, in-4; VII *Ptolemaei liber de apparentiis inerrantium, ed. Petau*, Parigi, 1630, in-fol.; VIII *Ptolemaei de judicandi facultate et animi principatu . . . . inscriptio Cunobi in Serapidis templo*, Parigi, 1663, in-4; IX *Geographia*, Vicenza, 1475, in-fol. in latino, senza carte: è questa la prima edizione, perchè quella di Bologna, stampata presso Domenico de Lapis, colla falsa data del 1462, sembra essere del 1491. Questa *Geografia*, che in mezzo ad infiniti errori contiene notizie e indicazioni preziose, ha avuto molte edizioni, delle quali le principali sono le seguenti: Amsterdam, 1618, in-fol., colle carte di Mercatore; Lione, 1535, Basilea, 1541. L'edizione puramente greca è del 1533, Basilea, in-4 piccolo. X *Gli Armonici*, pubblicati nel 1682, in-4, greco-latino. Per altre e più estese notizie si ricorra al dotto articolo che sopra questo astronomo ha inserito Delambre nella *Biografia universale.*

TOPOGRAFIA (*Agrim.*). Descrizione o pianta di qualche luogo particolare o di una piccola estensione di terra, come quella di una città, di un borgo, di un podere, di un campo, di un castello, ec. Tali sono le piante che si fanno dagli agrimensori. Questa parola è formata dal greco τόπος luogo, e γράφω io descrivo.

La *topografia* differisce dalla *corografia* come la parte differisce dal tutto; mentre la *corografia* è la pianta di una provincia, di un dipartimento o di qualunque altra estensione considerabile di terreno.

TORELLI (Giuseppe), letterato e distinto matematico italiano nato a Verona nel 1721 e morto nella stessa città nel 1781. I suoi scritti matematici sono: I *De rota sub aquis circumacta*, Verona, 1747, in-8; II *Scala de' meriti a capo d'anno, trattato geometrico*, ivi, 1751, in-8. L'autore tenta di rappresentare con una curva la progressione degl' interessi di un capitale qualunque, soggetto trattato in seguito da Duvillard. III *De nihilo geometrico libri duo*, ivi, 1758, in-8; IV *Geometrica*, ivi, 1769, in-8. Queste due opere hanno per iscopo di stabilire la inferiorità del calcolo infinitesimale dei moderni alla geometria de-

gli antichi, di cui Torelli era ammiratore entusiasta. V *Demonstratio antiqui theorematis de motuum commixtione*, ivi, 1774, in-8; VI *Elementorum perspectivae libri duo*, ivi, 1788, in-4; opera postuma pubblicata da G. B. Bertolini; VII *Archimedis quae supersunt omnia, cum Eutocii Ascalonitae commentariis, cum nova versione latina*, ecc., Oxford, 1792, in-fol. Tale edizione, la più compiuta che si posseggra delle opere del geometra siracusano, ed alla quale il Torelli aveva consacrato lunghi studj, non potè esser pubblicata che dopo la sua morte. Essa contiene il testo greco della prima edizione fatta a Basilea nel 1544, depurato però da moltissimi errori; alle difettose versioni latine di Giovanni da Cremona e di Federico Commandino ne è stata sostituita una assai più corretta; vi sono stati aggiunti i comenti di Eutocio; e tutto questo lavoro è stato arricchito dal Torelli di una moltitudine di osservazioni interessanti e della vita di Archimede. Questa pregevolissima edizione fa seguito all' *Euclide* di Gregory, e all' *Apollonio* di Halley.

TORO (*Astron.*). È il nome del secondo segno dello zodiaco e di una costellazione che gli ha dato il suo nome. Varie sono le favole che i poeti hanno inventato su questa costellazione, che trovasi spesso rammentata coi numi di *Portitor Europae*, *Amosius Posiphoes*, *Io Inochis*, *Isis*, *Osiris Veneris sidus*, *Chironis filia*, *Princeps Armenti*, *Bubulum caput*, ec.. Alcuni dicono che questa costellazione rappresenti il toro sotto la figura del quale Giove rapì Europa; altri vogliono che alluda al toro di cui invaghissi Pasifae; vi ha chi crede che sia il toro adorato sotto il nome di Apis; e troppo lungo sarebbe il riferire tutte le congetture che sono state fatte sulla origine di questa costellazione.

Il principio dell' anno vegetativo era annonziato dal levare eliaco del *Toro* e dal tramonto eliaco di *Sirio*, come apparisce da questi versi di Virgilio:

> *Candidus auratis aperit cum cornibus annum*
> *Taurus, et adverso cedens Canis occidit astro.*
> *Virg. Georg. lib.* I *vers.* 217.

Le Plejadi sono un ammasso di stelle sul dorso del Toro (*Vedi* Plejadi). Le Jadi sono un altro ammasso di stelle sulla fronte del Toro. *Vedi* Jadi.

Secondo il catalogo di Tolomeo, vi sono quarantaquattro stelle in questa costellazione, ma nel catalogo inglese di Flamsteed se ne contano centoquarantuna.

TORRICELLI (Evangelista), geometra sommo e non meno celebre fisico, nacque il 15 Ottobre 1608 a Modigliana nella Romagna toscana secondo il Bonaventuri, e a Piancaldoli nella diocesi d' Imola secondo il Lastri. Fu educato a Faenza, ove studiò le matematiche nel collegio de' gesuiti, e di buonissima ora palesò una maravigliosa attitudine per queste scienze sublimi. Ma suo zio, religioso dell' ordine dei camaldolesi, ed al quale era debitore dell' accurata educazione ricevuta, lo inviò a Roma nella veduta che il giovine geometra vi avrebbe più facilmente trovato i mezzi di sviluppare i suoi precoci talenti. Torricelli divenne in quella città amico del Castelli, il discepolo prediletto dell' illustre Galileo, che gli comunicò i lavori del suo maestro sulle leggi del moto. Torricelli comprese tosto l' importanza e le applicazioni di tale nuova teoria, e non andò guari che pubblicò un trattato notabilissimo sulla caduta accelerata dei corpi e sulla curva descritta dai projetti. Fino da tal momento prese posto distinto tra i geometri più illustri di quel tempo così fecondo di begli ingegni, ed entrò in commercio di lettere col Roberval, col Fermat, col Mersenne e col Pascal; ed occupandosi del differenti problemi che allora esercitavano la sagacia e lo zelo laborioso dei matematici, diede la soluzione di quelli che avevano opposto ostacoli insormontabili ai più perspicaci, come il famoso problema sull' area e sul centro di

gravità della cicloide. Non crediamo però di dover qui entrare nell'esame delle discussioni e della polemica troppo spesso violenta alla quale diedero luogo quelle lotte scientifiche fra tanti nobili rivali di gloria e di scienza.

La scoperta che assicura al nome di Torricelli una gloriosa immortalità è quella del barometro, di cui la scienza ha fatto in seguito sì numerose e sì utili applicazioni. Non si sapeva quale fosse la forza che faceva ascendere l'acqua nel corpo delle trombe e che ve la sosteneva; e, nell'ipotesi del pieno, si pretendeva che la natura, aborrendo dal vuoto che si sarebbe formato tra lo stantuffo e l'acqua, forzava l'acqua a seguirlo nella sua ascensione. Ma un fatto particolare fece conoscere che questo supposto *orrore pel vuoto* aveva un limite: i fontanieri del granduca di Toscana, avendo avuto bisogno di trombe di quaranta o cinquanta piedi, videro con loro estrema sorpresa che messe in azione non facevano giungere l'acqua che fino all'altezza di trentadue piedi circa. Galileo interrogato su tale fenomeno singolare diede una risposta evasiva; eppure tale filosofo, che aveva riconosciuto e dimostrato la gravità dell'aria, più agevolmente di chiunque altro avrebbe potuto pensare che fosse il peso della colonna atmosferica quello che faceva equilibrio ai trentadue piedi di acqua rimasti in sospensione nel corpo delle trombe. Nondimeno tale idea non si presentò che a Torricelli, il quale impadronitosene la fecondò maravigliosamente. Volendo ripetere l'esperienza in un modo più comodo, immaginò di sostituire all'acqua un fluido quattordici volte più pesante, il mercurio, giudicando ottimamente che una colonna quattordici volte più corta avrebbe fatto così equilibrio a quella forza che sosteneva trentadue piedi di acqua. Avendo dunque riempito di mercorio un tubo di vetro di tre piedi, chiuso ermeticamente in una delle sue estremità, turò l'altra estremità col dito, ed avendolo rivoltato ed immerso in un bacinetto pieno di mercurio, levò il dito; ed allora il mercurio del tubo vi discese fino all'altezza di circa ventotto pollici al di sopra del livello di quello del bacinetto, come il fisico aveva preveduto. Tale scoperta ricevè una luminosa conferma nella celebre esperienza fatta da Pascal al Puy-de-Dôme: imperocchè avendo questi fatto portare il barometro a diverse altezze ed avendo riscontrato che il mercurio si abbassava nel tubo di mano in mano che la colonna atmosferica diveniva minore, stabilì incontrastabilmente in tal guisa che la di lei pressione era realmente la causa della sospensione del mercurio.

Tale bella esperienza è quella che si ripete ogni volta che si misurano altezze col mezzo del barometro. È altresì per essa che le osservazioni reiterate e continue del barometro sopra diversi punti di una regione e la conoscenza della sua altezza media che ne è la conseguenza, possono rendere note le loro differenze di livello. L'invenzione del barometro, idea sì semplice ma sì ingegnosa, è una de' più grandi vantaggi recati alla fisica ed alla chimica: con siffatti strumenti, divenuti comparabili pei progressi delle nostre scienze e delle nostre arti, le esperienze possono ripetersi riducendole alle stesse circonstanze; il calcolo può esser loro applicato, e le leggi dei fenomeni naturali possono essere dedotte con qualche certezza. Tale strumento, che dà con tanta precisione in tutti i momenti la misura esatta della pressione atmosferica, è divenuto tanto necessario e tanto indispensabile quanto il termometro alle scienze sperimentali. Un altro vantaggio si è tratto dalla scoperta del barometro: i mezzi di fare il vuoto erano lontanissimi dalla perfezione, e Torricelli aveva prodotto il vuoto il più perfetto nello spazio di pochi pollici abbandonati dal mercurio nell'estremità del suo tubo: tale vuoto conservò il nome di *vuoto del Torricelli*, e la fisica ne seppe trarre grande partito per le più delicate sue esperienze, per esempio per la più esatta misura della tensione dei vapori. Torricelli fermò

l' idea di giovarsene per fare alcuni esperimenti sul suono e sulla vita degli animali; ma i suoi tentativi non riuscirono, ed alcuni insetti ch' ei volle far giugnere al vuoto del suo tubo, furono soffocati, siccome doveva accadere, dall' enorme pressione del fluido pesante che avevano da traversare.

Il Castelli, costretto a lasciar Roma per gli affari del suo ordine e a separarsi dall' amico, propose a Galileo di chiamarlo presso di se. Galileo, desideroso di conoscerlo più particolarmente, fu sollecito d' invitarlo a recarsi a Firenze, offrendogli la sua casa e tutto quello che gli poteva tornar gradevole. Torricelli che aveva formato a Roma relazioni di scienza e di amicizia, e che aspettava qualche favore dal papa, esitò sulle prime, e la sua risposta non fu nè accettazione nè rifiuto: in seguito però risolvette, e staccatosi da tutte le sue affezioni recossi presso l' illustre vecchio; ne fu molto compensato dall' accoglienza affatto paterna che ne ricevette. Cooperò, in quanto a lui, per addolcire mediante le sue cure e l'interessante sua conversazione, gli ultimi giorni di quel grand' uomo cieco ed oppresso di malori. Lo perdette in capo a tre mesi, e parve che non fosse giunto presso di lui che per vederlo spirare. Egli voleva abbandonare tosto Firenze, ma il granduca l' incitò sì onorevolmente a professare le matematiche nella sua accademia, eleggendolo suo matematico e facendolo quindi succedere a Galileo nel titolo e nelle attribuzioni del prefato impiego, che egli si arrese a dimostrazioni cotanto lusinghiere. Torricelli, come il suo maestro Galileo, era non meno abile nell'eseguire gli strumenti che nell' immaginarli; e mostransi tuttora a Firenze degli objettivi di una dimensione piuttosto grande, lavorati da lui, e chiamati col nome suo. Gli si attribuisce pure l' invenzione dei piccoli microscopi semplici di brevissimo fuoco, che si costruiscono di piccoli frammenti di vetro fuso colla lampada, e ridotti per tal modo in piccole sfere trasparentissime, ma di un uso alquanto difficile.

Al pari di Pascal che aveva illustrato la scoperta del barometro colla celebre esperienza del Puy-de-Dôme, Torricelli morì in età di 39 anni. La perdita di Galileo, quantunque quest' uomo sommo fosse giunto ai limiti comuni della vita, gli aveva cagionato un profondo dolore; e quella profonda malinconia che sembra essere compagna inseparabile dell' ingegno, non lo abbandonò più dal giorno in cui insieme con Viviani avea chiuso gli occhi all' illustre suo maestro. Le opere di Torricelli, rispetto allo stile, sono notabili per concisione, chiarezza, eleganza e buon gusto, merito che sembra essere stato proprio della scuola di Galileo. Cavalieri si era assunto di mettere in ordine e pubblicare i di lui manoscritti, ma non gli sopravvisse che un mese. Il granduca ne incaricò poscia Viviani, il quale vi attese con soverchia lentezza: finalmente se ne occupò, ma non pubblicolli. Si conservano a Firenze nella biblioteca palatina, ove il Fabroni, suo biografo, potè vederli e farne un breve sunto. Abbiamo di lui: I Le *Opere geometriche*, in latino, Firenze, 1644, in-4; II Nel tomo IV della *Raccolta* degli scrittori che trattano del moto delle acque, seconda edizione, Firenze, 1768, in-4, si legge il suo lavoro sul corso della Chiana; III Nel tomo III delle *Memorie* dell' Accademia delle Scienze di Parigi, pag. 159, si trova la lettera che egli scrisse a Roberval sul centro di gravità della parabola e su diversi altri problemi di cui diede la soluzione.

TOSCANELLI (Paolo del Pozzo), o *Paolo il fisico*, astronomo, nato a Firenze nel 1397, avendo udito Brunelleschi dissertare dottamente sulla geometria, lo pregò a riceverlo tra i suoi discepoli, e si dedicò interamente allo studio delle matematiche, di cui fece ben presto utili applicazioni all' astronomia, alla nautica e alla geografia. È a lui dovuta, e non ad Ignazio Danti, come erroneamente asserisce Del Migliore nella sua *Firenze illustrata*, pag. 33, la co-

struzione dello gnonome solstiziale posto nel 1468 sulla cupola eretta da Brunelleschi sulla metropolitana fiorentina. Toscanelli ne fece uso per determinare i punti solstiziali, le variazioni dell' ecclittica, e soprattotto per correggere le *Tavole Alfonsine*, adoperate al suo tempo dagli astronomi, ad onta della loro inesattezza nel rappresentare i moti solari e la quantità dell' anno tropico. Tale gnomone, del quale si fece uso per l'oltima volta nel 1510, venne ristabilito da Ximenes. Toscanelli morì a Firenze il 15 Maggio 1482. Per altre notizia si consulti Ximenes, *Del vecchio e nuovo gnomone fiorentino*, Firenze, 1757, in-4, pag. LXXIII.

TOUCAN (*Astron.*). Costellazione meridionale situata tra l' Indiano, la Fenice e l' Idra. *Vedi* Costellazione.

TRAIZIONE (*Mecc.*). Azione di una forza che tira un corpo mobile con l'aiuto di un filo, di una corda o di qualunque altro intermedio. Per esempio il moto di un carretto tirato da un cavallo è un moto di *troizione*, e lo sforzo del cavallo per farlo muovere è un sforzo di *troizione*.

TRAITRICE (*Geom.*). Linea curva la cui proprietà principale è di avere tutte le sue tangenti uguali tra loro.

Le è stato dato il nome di *traitrice* perchè possiamo concepirla come generata dall' estremità di un filo che si tira per l'altra sua estremità lungo di una linea retta. (*Vedi le Memorie dell' Accademio di Porigi*, dell' anno 1736).

TRAJETTORIA (*Mec.*). Nome che si dà alla curva descritta da un mobile sottoposto all' azione di forze acceleratrici. Tale è la strada che percorre un corpo pesante lanciato obliquamente nell' aria.

Avanti le sublimi scoperte del Newton, tutta la teoria dei movimenti curvilinei si riduceva a quanto Galileo aveva insegnato sopra la curvatura del cammino dei projettili, nell' ipotesi di una forza acceleratrice costante che agisse in direzioni parallele, e a quanto l' Huygens aveva insegnato sopra le forze centrali nei movimenti circolari. Armato della nuova potenza che aveva saputo ritrovare nella scienza dei numeri, il Newton considerò il problema del moto curvilineo in un modo molto più generale che non si era fatto fino al suo tempo; non solamente giunse ad assegnare le leggi secondo le quali si eseguisce, ma ebbe ancora la gloria di formare la base del sistema fisico dell' universo. La prima parte della sua celebre opera dei *Principii dello Filosofia noturale* è impiegata nell' esposizione di questi leggi, delle quali tenteremo di far comprendere l' importanza e la fecondità.

1. Si sa che quando un mobile è lanciato in una data direzione e con una data velocità mediante l' azione di una di quelle forze, le quali agiscono istantaneamente e poi lasciano muoversi il mobile liberamente, che esso deve descrivere una linea retta e continuare a muoversi all' infinito nella medesima direzione e con la stessa velocità, se nulla sopraggiunge a turbare il suo moto. Ma se, oltre l' azione di questa forza istantanea, esso è sottoposto all' azione di un' altra forza che costantemente agisse sopra di esso e in una direzione differente dalla prima, sarà evidentemente obbligato ad allontanarsi a ciascun istante da questa prima direzione, e descriverà una curva la quale varierà secondo l' intensità e la direzione della forza che esso proverà in ciascun punto, e secondo la velocità e la direzione primitiva della sua projezione. Tuttociò è stato di già esposto in altra parte. (*Vedi* Moto).

2. Supponiamo dunque che un punto materiale projettato nella direzione della retta BM (*Tav.* XLVIII, *fig.* 12) provi l' effetto di una forza acceleratrice che lo tiri o lo spinga verso un punto fisso A. In virtù dell' azione combinata delle due forze che lo mettono in moto esso descriverà la curva BN, della quale si tratta di determinare la natura. Per quest' effetto, immaginiamo

il punto giunto in Z sopra la sua trajettoria, e prendendo B per origine del moto, conduciamo la retta AX, la sua perpendicolare AY, e il raggio vettore AZ. Se consideriamo AX ed AY come gli assi coordinati dalle trajettoria, l'ascissa del punto Z sarà AP e la sua ordinata sarà PZ.

Ora indichiamo l'intensità della forza acceleratrice all'unità di distanza con μ, e siccome qui basta esaminare il caso in cui quella forza agisce in ragione inversa del quadrato della distanza, la sua intensità alla distanza $AZ = z$ sarà $\frac{\mu}{z^2}$. La forza $\frac{\mu}{z^2}$ la quale agisce nella direzione AZ le sue componenti PZ e QZ parallele agli assi saranno

$$\frac{\mu}{z^2}\cdot\cos AZP, \quad \frac{\mu}{z^2}\cdot\cos QZA$$

ovvero

$$\frac{\mu x}{z^3} \quad \text{e} \quad \frac{\mu y}{z^3}$$

a motivo di

$$\cos AZP = \frac{PZ}{AZ} = \frac{x}{z},$$

$$\cos QZA = \frac{QZ}{AZ} = \frac{y}{z},$$

e siccome queste componenti tendono evidentemente a diminuire le coordinate x ed y, bisognerà dar loro il segno —

Ora, l'equazione fondamentale del moto variabile accelerato è

$$\varphi = \frac{d^2e}{dt^2}$$

(*vedi* Accelerato), ebbiamo dunque in questo caso

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\mu x}{z^3}\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\mu y}{z^3}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad a)$$

dt essendo sempre l'elemento del tempo.

3. Per ottenere un primo integrale di queste due equazioni, moltiplichiamo la prima per y, la seconda per x e sottraggbiamo quindi la seconda dalla prima; verrà

$$y\cdot\frac{d^2x}{dt^2} - x\cdot\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

e, moltiplicando per dt

$$y\cdot\frac{d^2x}{dt} - x\cdot\frac{d^2y}{dt} = 0,$$

integrando per parti e riducendo si troverà

$$\frac{ydx - xdy}{dt} = c\ldots\ldots(b),$$

c essendo una costante che inseguito determineremo.

4. Otterremo un altro primo integrale moltiplicando la prima dell' equazioni (a) per $2dx$, la seconda per $2dy$, e prendendo inseguito la loro somma. Con questo metodo si comincia a trovare

$$\frac{2dx \cdot d^2x + 2dy \cdot d^2y}{dt^2} = -\frac{2\mu(xdx+ydy)}{z^3},$$

ma il secondo membro di quest' ultima uguaglianza contenendo le tre variabili x, y, z, possiamo renderlo più semplice osservando che si ha la relazione

$$x^2+y^2=z^2,$$

donde si ricava differenziando

$$2xdx+2ydy=2zdz.$$

Così quest' ugnaglianza è la stessa cosa che

$$\frac{2dx \cdot d^2x+2dy \cdot d^2y}{dt^2}+\frac{2\mu dz}{z^2}=0,$$

e integrando si trova

$$\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}-\frac{2\mu}{z}+b=0 \ldots\ldots (c),$$

b indicando una costante.

5. Eliminando dt tra l' equazioni (b) e (c) si otterrebbe l' equazione della trajettoria, ma l' espressioni diventano più semplici riportando questa curva a delle coordinate polari. Per esempio, contando l' angolo del raggio vettore a partire dall' asse AB, e indicando quest' angolo, ossia ZAB, con φ, si avrà

$$x=z \cdot \cos\varphi,$$
$$y=z \cdot \operatorname{sen}\varphi,$$

donde

$$dx=dz \cdot \cos\varphi - z \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot d\varphi$$
$$dy=dz \cdot \operatorname{sen}\varphi + z \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi$$

sostituendo questi valori di x, y, dx, dy nell'equazioni (b) e (c) esse diventano

$$z^2 \cdot d\varphi = c \cdot dt \ldots\ldots (1),$$

$$\frac{dz^2+z^2d\varphi^2}{dt^2}-\frac{2\mu}{z}+b=0 \ldots\ldots (2),$$

eliminando dt, si ottiene

$$\frac{c^2 \cdot dz^2}{z^4 \cdot d\varphi^2}+\frac{c^2}{z^2}-\frac{2\mu}{z}+b=0$$

per l' equazione differenziale della trajettoria.

6. Possiamo rendere più semplice quest' equazione, il che facilita la sua integrazione, osservando che se si pone

$$r=\frac{1}{z},$$

si ha

$$dr = \frac{dz}{z^2}.$$

Sostituendo, essa diventa

$$c^2 . \frac{dr^2}{d\varphi^2} + c^2 r^2 - 2\mu r + b = 0.$$

Risolvendo quest' ultimo rapporto a $d\varphi$ si ha

$$d\varphi = \frac{c . dr}{\sqrt{[2\mu r - b - c^2 r^2]}},$$

il che può mettersi sotto la forma

$$d\varphi = \frac{\frac{c^2}{\sqrt{[\mu^2 - bc^2]}} . dr}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\mu - c^2 r}{\sqrt{[\mu^2 - bc^2]}}\right)^2\right]}}.$$

Integrando quest' ultima uguaglianza, si ottiene

$$\varphi = \omega + \text{arc}\left(\cos = \frac{\mu - c^2 r}{\sqrt{[\mu^2 - bc^2]}}\right),$$

ω essendo la costante arbitraria.

Reciprocamente si avrà

$$\cos\left(\varphi - \omega\right) = \frac{\mu - c^2 r}{\sqrt{[\mu^2 - bc^2]}}$$

e, rimettendo $\frac{1}{z}$ in luogo di r

$$\mu z - \sqrt{\left[\mu^2 - bc^2\right]} . \cos\left(\varphi - \omega\right) . z - c^2 = 0.$$

Tale è definitivamente l' equazione polare della trajettoria nell' ipotesi di una forza acceleratrice che agisce in ragione inversa del quadrato della distanza.

7. Se osserviamo che a motivo dell' angolo arbitrario ω possiamo cangiare il segno di $\cos(\varphi - \omega)$, poichè ciò equivale ad aumentare ω di due angoli retti, e che dopo questo cangiamento si ha, ricavando il valore di z.

$$z = \frac{c^2}{\mu + \sqrt{[\mu^2 - bc^2]} . \cos(\varphi - \omega)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (d),$$

la forma di questo valore indica che la trajettoria è una sezione conica, del che possiamo assicurarci facilmente esaminando l' equazioni polari di queste curve. Ma trasformando le coordinate polari in coordinate rettangolari, questa verità diventa ancora più manifesta.

8. Conduciamo per il punto A centro della forza acceleratrice gli assi rettangolari AX' e AY', e supponiamo che l' asse AX' faccia con l' asse AX delle coordinate polari un angolo XAX' $= \omega$; indichiamo con x' e y' le coordinate

del mobile riferite a questi nuovi assi, e siccome il raggio vettore z fa con l' asse AX' un angolo

$$ZAX' = \varphi - \omega,$$

avremo

$$x' = z \cdot \cos\left(\varphi - \omega\right),$$

$$y' = z \cdot \text{sen}\left(\varphi - \omega\right),$$

$$z = \sqrt{\left[x'^2 + y'^2\right]},$$

sostituendo nell' equazione (d), avremo dopo tutte le riduzioni

$$\mu^2 y'^2 + bc^2 x'^2 = c^4 - 2c^2 x' . \sqrt{\mu^2 - bc^2} \ldots . (e),$$

equazione che appartiene all' ellisse, all' iperbola o alla parabola secondo che la costante b è positiva, negativa o nulla. Inoltre, siccome mediante quest' equazione il raggio vettore $\sqrt{\left[x'^2 + y'^2\right]}$ può esprimersi sotto forma razionale in funzione dell' ascissa x', ne resulta mediante la teoria delle sezioni coniche, che l' origine delle coordinate x', y', o che il punto A, centro della forza acceleratrice, è nei tre casi uno dei fuochi della curva.

9. È dunque rigorosamente dimostrato *che un punto materiale attratto verso un punto fisso in ragione inversa del quadrato delle distanze, descrive una sezione conica della quale questo punto è uno dei fuochi.* La natura e le dimensioni della curva dipendendo dalle costanti arbitrarie b e c non possiamo che mediante le condizioni iniziali del moto determinare queste costanti, e per conseguenza la curva essa stessa. Ma in questo punto ci basta di avere stabilito questa proposizione generale.

10. Riprendiamo ora l' equazione (b) per ottenerne la significazione della costante c. Integrando si ha

$$\int \left[ydx - xdy\right] = ct + c' \ldots . (f);$$

c' essendo una nuova costante arbitraria.

Osserviamo che ydx essendo l' elemento di una superficie curva (*Vedi* QUADRATURA), possiamo supporre che questa superficie sia compresa tra le ascisse $x = 0$ e $x = AP$, allora l' espressione $\int ydx$ sarà rappresentata dall' area NAPZ. Se da quest' area si sottrae il triangolo APZ, ci rimarrà,

$$\textit{settore } NAZ = \textit{area } NAPZ - \textit{triangolo } APZ,$$

ovvero

$$\textit{settore } NAZ = \int ydx - \frac{xy}{2},$$

differenziando, viene dopo le riduzioni,

$$d\left(\textit{settore}\,\mathrm{NAZ}\right) = \frac{ydx - xdy}{2}.$$

Integrando di nuovo, avremo

$$2\ \textit{settori}\ \mathrm{NAZ} = \int\left[ydx - xdy\right].$$

Così l'equazione (f) equivale a

$$2\ \textit{settori}\ \mathrm{NAZ} = ct \ldots\ldots (g).$$

Si sopprime la costante c' perchè possiamo supporre che il tempo cominci quando il settore è nullo.

Facciamo $c=2\mathrm{A}$, verrà semplicemente

$$\textit{settore}\ \mathrm{NAZ} = \mathrm{A}\,.t,$$

il che c'insegna che la superficie del settore descritto dal raggio vettore è proporzionale al tempo che il mobile impiega a percorrere l'arco della curva. Questa proprietà è conosciuta sotto il nome di *principj dell'aree*. Scoperta dal Keplero nei moti dei pianeti intorno del sole, era riservato al Newton di dimostrarla come una conseguenza dell'attrazione che quest'astro esercita sopra tutti i corpi che girano intorno di esso. (*Vedi* AREE PROPORZIONALI.)

11. Facendo $t=1$ nell'equazione (g) essa diventa:

$$2\ \textit{settori}\ \mathrm{NAZ} = c,$$

il che fa riconoscere che la costante c esprime *il doppio del settore descritto nell'unità di tempo.*

12. Il caso in cui il mobile descrive un'ellisse essendo il più importante, riprendiamo l'equazione (e), e siccome essa esprime questa curva quando b è positivo facciamo solamente, per rendere la cosa più semplice,

$$\sqrt{\left(\mu^2 - bc^2\right)} = m,$$

essa diventerà

$$\mu^2 y'^2 + bc^2 x'^2 = c^4 - 2c^2 mx' \ldots\ldots (h),$$

e siccome essa dà

$$y' = \pm\frac{c}{\mu}.\sqrt{\left[c^2 - bx'^2 - 2mx'\right]},$$

si vede che tutte le ordinate rettangolari positive sono uguali alle ordinate rettangolari negative corrispondenti, il che indica che l'asse AX' non può essere che il grande o il piccolo asse della curva. È dunque necessariamente il grand'asse poichè esso contiene il fuoco.

Questa circostanza ci permette ancora di rendere più semplice l'equazione (h) riportandola al centro dell'ellisse. Per eseguir ciò, facciamo

$$x' = x + z$$

e disponiamo dell'indeterminata z in modo che essa faccia sparire il termine

affetto da x', il quale non deve trovarsi nell' equazione al centro. Facendo dunque questa sostituzione, viene, dopo aver diviso per c^2

$$\frac{\mu^2}{c^2}\cdot y'^2 + bx^2 + \left.\begin{matrix} 2b\alpha \\ + 2m \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} + bx^2 \\ + 2mx \\ - c^2 \end{matrix}\right\} = 0 \ldots . (k),$$

uguagliando a zero il coefficiente di x, si ha

$$\alpha = -\frac{m}{b}.$$

Questo valore introdotto nell' equazione (k) cangia quest' equazione nell' altra

$$\frac{\mu^2}{c^2}\cdot y'^2 + b\,.\,x^2 - \frac{m^2}{b} - c^2 = 0 \ldots (i),$$

ma

$$m = \sqrt{\left(\mu^2 - bc^2\right)},$$

così

$$\frac{m^2}{b} = \frac{\mu^2}{b} - c^2,$$

e, l' equazione (i) si riduce a

$$\frac{\mu^2}{c^2}\cdot y'^2 + b\,.\,x^2 - \frac{\mu^2}{b} = 0,$$

e facendo sparire i denominatori si otterrà

$$b\mu^2\,.\,y'^2 + bc^2\,.\,x^2 - c^2\mu^2 = 0.$$

In quest' equazione, l' origine delle coordinate è al centro, e per conseguenza possiamo ottenere i valori del grande e del piccolo asse, supponendo alternativamente

$$y' = 0 \quad \text{e} \quad x = 0.$$

Si trova facendo $x = 0$.

$$y' = \sqrt{\frac{c^2}{b}},$$

e facendo $y' = 0$,

$$x = \frac{\mu}{b},$$

e siccome allora x esprime il semi-grand' asse e y' il semi-piccolo asse, si ha dunque

$$\textit{semi grand' asse} = \frac{\mu}{b},$$

$$\textit{semi-piccolo asse} = \sqrt{\frac{c^2}{b}},$$

me π indicando la semi-circonferenza del circolo il cui raggio è l'unità, l'area di un' ellisse di cui A e B sono i semi-assi principali è πAB (*Vedi* QUADRATURA); così l'area dell' ellisse descritta dal mobile è uguale a

$$\frac{\pi . c \mu}{b \sqrt{b}},$$

il che possiamo mettere sotto la forma

$$\frac{\pi . c}{\sqrt{\mu}} . \left(\frac{\mu}{b}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ora, abbiamo veduto (10) che indicando con t il tempo che il mobile mette a descrivere il settore NAZ, l'equazione (g) dava

$$t = \frac{2 \; settori \; NAZ}{c}.$$

Quando il tempo t diventa quello di una rivoluzione intera del mobile, il settore NAZ diventa la superficie intera dell' ellisse, e si ha per conseguenza in questo caso, indicando con T il tempo della rivoluzione completa,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} . \left(\frac{\mu}{b}\right)^{\frac{3}{2}},$$

ovvero

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} . D^{\frac{3}{2}},$$

chiamando D il semi-grand' asse $\frac{\mu}{b}$ dell' ellisse.

Per un altro mobile sottoposto alla stessa forza acceleratrice attraente verso lo stesso punto, ma che descriverebbe nel tempo T' un' altra ellisse il cui semi-grand' asse sarebbe D', si avrebbe ancora, evidentemente

$$T' = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} . D'^{\frac{3}{2}},$$

così $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ essendo una quantità costante si ha

$$T : T' :: D^{\frac{3}{2}} : D'^{\frac{3}{2}},$$

ovvero

$$T^2 : T'^2 :: D^3 : D'^3,$$

vale a dire che i quadrati dei tempi delle rivoluzioni di due mobili che descrivono dell' ellissi intorno di uno stesso fuoco, e mediante l'azione di una stessa forza, stanno tra loro come i cubi dei semi-grandi assi di queste ellissi.

13. Possiamo recapitolare la teoria precedente in tre punti principali:

1°. Qualunque mobile che, avendo un moto iniziale di projezione, è sottoposto all'azione di una forza acceleratrice, variabile in ragione inversa del quadrato delle distanze, descrive intorno del centro di questa forza, come fuoco, una curva conica; 2.° qualunque mobile che, sotto l'impero delle stesse condizioni si muove sopra una curva conica, la percorre in modo che l'aree descritte dal suo raggio vettore sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle; 3.° quando più mobili descrivono dell'ellissi intorno di un fuoco comune, mediante l'azione di una stessa forza, i quadrati dei tempi delle loro rivoluzioni stanno tra loro come i cubi delle loro medie distanze.

Queste leggi del moto curvilineo essendo quelle che Keplero ha dedotte dall'esperienza per i movimenti dei pianeti intorno del sole, il Newton ne ha concluso che questi pianeti sono sottoposti all'azione di una forza che risiede nel sole e che agisce in ragione inversa del quadrato delle distanze; laonde dopo aver cominciato da scoprire che l'azione delle gravità si estende fino alla luna (*Vedi* GRAVITA'), e forza quest'astro a girare intorno della terra, egli ha potuto elevarsi fino a riconoscere l'universalità di questa forza, e a farle regolare tutti i movimenti planetarj. Ma per legittimare questa conclusione, non basta provare l'identità di questi movimenti con quelli che resultano da un'ipotesi sopra la natura della forza che gli produce, bisogna ancora, partendo dalle loro leggi empiriche, vale a dire dalle loro leggi constatate in un modo sperimentale, poter determinare la natura di questa forza, questo è ciò che faremo in questo punto, per riunire tutti i documenti del sistema della gravitazione universale.

14. Le tre leggi del Keplero, constatate a posteriori sono:

1.° *I pianeti si muovono in curve piane e i loro raggi vettori descrivono, intorno al centro del sole, dell'aree proporzionali al tempo.*

2.° *Le trajettorie o l'orbite dei pianeti sono ellissi di cui il centro del sole occupa un fuoco.*

3.° *I quadrati dei tempi delle rivoluzioni dei pianeti intorno del sole stanno tra loro come i cubi dei grandi assi delle loro orbite, o come i cubi delle medie distanze*, il semi-grand' asse essendo la stessa cosa che la media distanza.

Queste tre leggi riguardano il moto del centro di gravità di ciascun pianeta; così considereremo questi corpi come semplici punti materiali mobili, e tutto ciò che diremo sopra la posizione o la velocità di un pianeta dovrà riferirsi al suo centro di gravità.

15. Sia F (*Tav.* XLVI, *fig.* 9) il fuoco dell'orbita ellittica di un pianeta, occupato dal centro del sole, e sia M, il punto dell'ellisse in cui si trova il pianeta ad un istante dato. Indichiamo il semi-grand'asse AO con a, il semi-piccolo asse CO con b, la distanza dal centro O al fuoco F con e, e il raggio vettore FM con z. Se per maggior semplicità, contiamo l'angolo del raggio vettore a partire dal grand'asse e che indichiamo quest'angolo MFB con φ, la grandezza del raggio vettore in funzione di quest'angolo sarà

$$z = \frac{b^2}{a + e \cdot \cos\varphi},$$

poichè tale è l'*equazione polare* dell'ellisse. Ma per diminuire il numero delle quantità costanti, mettiamo quest'equazione sotto la forma

$$z = \frac{a^2 - e^2}{a + e \cdot \cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ (l),$$

rammentandoci oha

$$b^2 = a^2 - e^2.$$

(*Vedi* Ellissa).

Premesso ciò, osserviamo che, se dopo aver descritto l'arco Mm infinitamente piccolo, e che per conseguenza possiamo considerare come una linea retta, non esistesse alcuna forza che venisse ad influenzare il pianeta, esso continuerebbe a muoversi nella direzione della retta Mm e giungerebbe in m' dopo un intervallo di tempo determinato. Così poichè il pianeta devia la sua strada e che in luogo di percorrere la retta mm' esso percorre l'arco di curva mn, bisogna necessariamente che esso sia sottoposto all'azione di una forza acceleratrice, ed è facile riconoscere, mediante il principio dell'aree uguali descritte dal raggio vettore in tempi uguali, che questa forza agisce costantemente nella direzione del raggio vettore, o della retta condotta a ciascuno istante dal fuoco F al punto della curva occupato dal pianeta.

La forza acceleratrice della quale abbiamo riconosciuto l'esistenza è dunque situata al fuoco F, vale a dire, al centro del sole, e non possiamo considerare la sua azione che come quella del sole stesso sul pianeta. Prendiamo ora per assi rettangolari delle coordinate FX ed FY, o il grand'asse dell'ellisse e la sua perpendicolare al fuoco, indichiamo Fq con x ed Mq con y, ed osserviamo che poichè la forza acceleratrice, che indicheremo con R, agisce nella direzione MF, le sue componenti parallele agli assi delle coordinate saranno nelle direzioni Mp ed Mq, e che rappresentando questa forza col raggio vettore FM, Mp ed Mq rappresenteranno esse stesse le componenti. Ora, abbiamo

$$Mp = FM \times \cos(FMp),$$
$$Mq = FM \times \cos(FMq).$$

Così le componenti della forza R sono:

$$R \cdot \cos(FMp) \quad e \quad R \cdot \cos(FMq),$$

ovvero

$$R \cdot \frac{x}{z}, \quad R \cdot \frac{y}{z},$$

poichè

$$\cos\left(FMp\right) = \frac{Mp}{FM} = \frac{Fq}{FM} = \frac{x}{z},$$

$$\cos\left(FMq\right) = \frac{Mq}{FM} = \frac{y}{z},$$

ma la curva essendo concava verso il sole, l'azione della forza, come pure quella delle sue componenti, tendono a diminuire le coordinate x ed y e bisogna prendere l'espressioni $R \cdot \frac{x}{z}$ e $R \cdot \frac{y}{z}$ col segno —.

16. L'equazione generale di una forza acceleratrice variata essendo

$$\varphi = \frac{d^2e}{dt^2},$$

nella quale φ indica l'intensità della forza, ed e lo spazio che essa fa percor-

rere nel tempo t (*vedi* ACCELERATO), avremo dunque per l'equazioni del moto del pianeta,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R \cdot \frac{x}{z},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -R \cdot \frac{y}{z}.$$

Se moltiplichiamo la prima di quest'equazioni per $2dx$, la seconda per $2dy$, e che si aggiungano insieme, verrà

$$\frac{2dx \cdot d^2x + 2dy \cdot d^2y}{dt^2} = -2R \cdot \left[\frac{xdx + ydy}{z}\right],$$

il che si riduce a

$$\frac{2dx \cdot d^2x + 2dy \cdot d^2y}{dt^2} = -2R \cdot dz,$$

osservando che

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

donde

$$xdx + ydy = zdz.$$

Integrando quest' ultima espressione, viene

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = b - 2\int R \cdot dz \; \ldots\ldots (m),$$

b indicando una costante arbitraria

Ma abbiamo ancora

$$x = z \cdot \cos\varphi,$$

$$y = z \cdot \operatorname{sen}\varphi,$$

donde si ricava

$$dx^2 + dy^2 = dz^2 + z^2 \cdot d\varphi.$$

Così possiamo dare all' espressione (m) la forma

$$\frac{dz^2 + z^2 \cdot d\varphi}{dt^2} = b - 2\int R \cdot dz \; \ldots\ldots (n).$$

17. Per eliminare da quest' ultima equazione il tempo dt, osserviamo che l' area infinitamente piccola mFM descritta nel tempo dt dal raggio vettore FM può confondersi con l' area di un settore circolare, avente FM o z per raggio ed Mm o $d\varphi$ per arco. Quest'area ha dunque per espressione $\frac{1}{2}z^2 \cdot d\varphi$ (*vedi* SETTORE); e se indichiamo con c il doppio dell' area descritta dal raggio vettore nell' unità di tempo, avremo in virtù della prima legge di Keplero

$$z^2 \cdot d\varphi = c \cdot dt \; \ldots\ldots (o).$$

18. Ricavando dall' equazione (o) il valore di dt e sostituendolo nell' equazione (n), verrà

$$\frac{c^2}{z^4} \cdot \frac{dz^2}{d\varphi^2} + \frac{c^2}{z^2} = b - 2\int R \cdot dz \; \ldots\ldots (p).$$

Quest' equazione sarebbe quella della trajettoria se la forza R fosse data in funzione di z. Dunque paragonandola con l'equazione (l) si deve poter ottenere la determinazione di questa forza. Riprendiamo dunque l'espressione

$$z = \frac{a^2 - e^2}{a + e \cdot \cos \varphi}$$

e mettiamola sotto la forma

$$\frac{1}{z} = \frac{a + e \cdot \cos \varphi}{a^2 - e^2} = \frac{a}{a^2 - e^2} + \frac{e \cdot \cos \varphi}{a^2 - e^2}.$$

Differenziando otterremo

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{e \cdot \text{sen}\, \varphi \cdot d\varphi}{a^2 - e^2},$$

ovvero

$$\frac{1}{z^2} \cdot \frac{dz}{d\varphi} = \frac{e \cdot \text{sen}\, \varphi}{a^2 - e^2},$$

il che dà, elevando al quadrato

$$\frac{1}{z^4} \cdot \frac{dz^2}{d\varphi^2} = \frac{e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi}{(a^2 - e^2)^2} = \frac{e^2(1 - \cos^2 \varphi)}{(a^2 - e^2)^2}$$

$$= \frac{e^2}{(a^2 - e^2)^2} - \frac{e^2 \cdot \cos^2 \varphi}{(a^2 - e^2)^2} \ldots\ldots (q).$$

Ora, l'equazione (l) dà

$$\frac{a^2 - e^2}{z} - a = e \cdot \cos \varphi$$

donde, elevando al quadrato,

$$e^2 \cdot \cos^2 \varphi = \frac{(a^2 - e^2)^2}{z^2} - \frac{2a(a^2 - e^2)}{z} + a^2$$

e, dividendo per $(a^2 - e^2)^2$

$$\frac{e^2 \cdot \cos^2 \varphi}{(a^2 - e^2)^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{2a}{(a^2 - e^2)} \cdot \frac{1}{z} + \frac{a^2}{(a^2 - e^2)^2}$$

sostituendo in (q), si ottiene

$$\frac{1}{z^4} \cdot \frac{dz^2}{d\varphi^2} = \frac{e^2}{(a^2 - e^2)^2} - \frac{1}{z^2} + \frac{2a}{(a^2 - e^2)} \cdot \frac{1}{z} - \frac{a^2}{(a^2 - e^2)^2},$$

mettendo questo valore di $\frac{1}{z^4} \cdot \frac{dz^2}{d\varphi^2}$ nell' equazione (p) essa diventa

$$\frac{2ac^2}{(a^2 - e^2)} \cdot \frac{1}{z} - \frac{(a^2 - e^2)c^2}{(a^2 - e^2)^2} = b - \int R \cdot dz$$

donde differenziando si deduce

$$R = \frac{ac^2}{(a^2 - e^2)} \cdot \frac{1}{z^2},$$

ovvero, semplicemente

$$R = \frac{\mu}{z^2} \dots\dots (r),$$

facendo

$$\mu = \frac{ac^2}{a^2 - e^2}$$

μ essendo una quantità costante, resulta dall' espressione (r) che l' intensità della forza R, in virtù della quale un pianeta descrive un' orbita ellittica intorno del sole, sta in ragione inversa del quadrato del suo raggio vettore.

19. Per sapere ora se la quantità μ, che esprime l' intensità della forza all' unità di distanza, e la quale è data in funzione delle quantità a, e e c, i cui valori cangiano per ciascun pianeta, varia essa stessa passando da un pianeta ad un altro, rappresentiamo con T il tempo della rivoluzione di un pianeta intorno del sole, allora cT sarà il doppio dell' area descritta in questo tempo dal suo raggio vettore o il doppio dell' area intera dell' ellisse, e, siccome quest' area è uguale a $\pi a . \sqrt{a^2 - e^2}$, avremo

$$cT = 2\pi a . \sqrt{a^2 - e^2},$$

donde

$$c = \frac{2\pi a}{T} . \sqrt{a^2 - e^2}.$$

Sostituendo questo valore di c in quello di μ, si trova

$$\mu = \frac{4\pi^2 . a^3}{T^2}.$$

Qualunque altro pianeta, di cui a' fosse il semi-grand' asse, T' il tempo della rivoluzione e μ' l' intensità della forza acceleratrice all' unità di distanza, ci darebbe evidentemente nella stessa maniera

$$\mu' = \frac{4\pi^2 . a'^3}{T'^2}.$$

Ma in virtù della terza legge del Keplero

$$T^2 : T'^2 :: a^3 : a'^3$$

dunque

$$\frac{4\pi^2 . a^3}{T^2} = \frac{4\pi^2 . a'^3}{T'^2},$$

e conseguentemente $\mu = \mu'$. Così l' intensità della forza acceleratrice, che ritiene i pianeti nelle loro orbite, è la stessa per tutti questi corpi, all' unità di distanza, ed essa non varia dall' uno all' altro che in ragione delle loro distanze, di modo che se essi fossero situati in riposo intorno del sole, a distanze uguali, essi caderebbero verso di esso con la stessa velocità; donde resulta che la forza che gli sollecita penetra ciascuna delle loro molecole e che essa è *proporzionale alla loro massa.*

20. Le leggi del Keplero conducono ancora direttamente alla conoscenza della forza che ritiene i pianeti nelle loro orbite, e si vede che questa forza è la

stessa di quella che fa cadere i corpi alla superficie della terra: la GRAVITA'. (*Vedi* questa parola). Di più, i moti dei satelliti intorno del loro pianeta principale essendo soggetti alle stesse leggi, ciascun pianeta principale è rapporto al suo sistema di satelliti ciò che è il sole rapporto a tutti i corpi, pianeti e comete che girano intorno di esso. La gravità è dunque una forza che risiede in tutte le particelle materiali dei corpi; ed è mediante la sua azione che queste particelle tendono continuamente a riunirsi o *s'attraggono scambievolmente*, e il Newton si è elevato alla conoscenza di una delle leggi fondamentali del mondo materiale indicando l'ATTRAZIONE UNIVERSALE, in ragione diretta delle masse e in ragione inversa del quadrato delle distanze, come un principio della natura. In altra parte abbiamo riconosciuto l'esistenza di questa attrazione deducendola a priori dall'idea medesima della natura. (*Vedi* NATURA.)

21. Un'analisi più profonda degli effetti della forza di gravità prova che la terza legge del Keplero non è che un'approssimazione, poichè l'intensità di questa forza all'unità di distanza non è rigorosamente la stessa per ciascun pianeta. In questo punto crediamo dovere indicare le modificazioni che questa circostanza porta nel paragone del rapporto dei cubi delle distanze medie con quello dei quadrati dei tempi delle rivoluzioni; modificazioni delle quali la maggior parte degli autori di trattati di meccanica e di astronomia non tengono conto.

La forza della gravità siccome agisce in ragione diretta delle masse, prendiamo per unità l'intensità di questa forza esercitata all'unità di distanza per l'unità di massa; la forza del sole che agirà sopra un corpo situato a quest'unità di distanza sarà dunque espressa dalla massa intera M di quest'astro; ma la massa del pianeta che il sole attrae essendo m; in virtù della legge d'*antagonismo* (*Vedi* NATURA), questo pianeta reagirà sul sole e produrrà un effetto espresso da m; e siccome le due forze M ed m tendono a ravvicinare i due astri l'uno all'altro, il loro effetto sarà lo stesso che se la forza $M+m$ fosse concentrata nel sole e agisse sul pianeta all'unità di distanza. Così indicando con μ l'intensità della forza della gravità all'unità di distanza, avremo l'identità

$$\mu = M + m.$$

Per qualunque altro pianeta la cui massa è m', avremo ugualmente

$$\mu' = M + m',$$

μ' indicando l'intensità della forza all'unità di distanza; e si vede che μ non è punto uguale a μ'.

Sostituendo dunque invece di μ, $M+m$, nell'espressione del n.° 19, avremo per il pianeta m,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{M+m}} \cdot D^{\frac{3}{2}} \ldots\ldots (s),$$

e per il pianeta m'

$$T' = \frac{2\pi}{\sqrt{M+m'}} \cdot D'^{\frac{3}{2}},$$

il che dà

$$\left(M+m\right) \cdot T^2 : \left(M+m'\right) \cdot T'^2 :: D^3 : D'^3.$$

Non si ritrova dunque la terza legge del Keplero che considerando i fattori $M+m$ e $M+m'$ come uguali tra loro; ma l'errore che ne resulta è quasi sempre insensibile, poichè la quantità

$$\frac{M+m}{M+m'}$$

differisce pochissimo dall'unità, perchè le masse dei pianeti sono piccolissime comparativamente a quella del sole.

Mettendo l'espressione (s) sotto la forma

$$T=\frac{2\pi . D^{\frac{3}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}} . \left(1+\frac{m}{M}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

si ottiene, sviluppando il binomio e trascurando i termini affetti dalle potenze della piccolissima quantità $\frac{m}{M}$,

$$T'=\frac{2\pi . D^{\frac{3}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}} . \left(1-\frac{1}{2} . \frac{m}{M}\right),$$

espressione della quale abbiamo fatto uso per determinare le masse dei satelliti. (*Vedi* Massa).

23. Resulta ancora dalla teorie del Newton che l'ellisse non è la sola trajettoria che possano descrivere dei corpi planetari sottoposti all'attrazione del sole, e quantunque non si sia punto ancora osservato fino a questo giorno dei movimenti iperbolici, è probabile che certe comete si muovano in trajettorie iperboliche, dimodochè dopo un'apparizione nella sfera di attività del sole esse debbono abbandonarla per sempre. Se, come tutto concorre a provarlo ciascuna stella fissa è il centro di un sistema planetario particolare, tali comete sono il legame di tutti i sistemi e l'unità la più maestosa si rivela nel complesso dell' universo.

24. Le trajettorie dei pianeti hanno luogo nel vuoto, o almeno il mezzo nel quale i pianeti si muovono non fa provare alcuna resistenza sensibile al loro moto. Non è così delle trajettorie dei proiettili alla superficie della terra, e il problema di determinare la curva che descrive un corpo pesante in un mezzo che resiste presenta difficoltà che le scienze moderne non ha potuto ancora interamente superare. Questa questione è stata digià esaminata in molti articoli di questo Dizionario e particolarmente alla parola Balistica alla quale rimanderemo i lettori.

TRAPEZIO (*Geom.*). Questa parola significa un quadrilatero che ha due lati paralleli. (*Vedi* Quadrilatero *ed* Area.)

TRASCENDENTE. Si dà questo nome a tutti i prodotti della ragione umana, i quali non possono realizzarsi sotto le condizioni del tempo e dello spazio. (*Vedi* Filosofia, n.° 46.)

Nelle matematiche, si chiamano *quantità trascendenti* quelle la cui generazione teorica implica l'infinito, e delle quali è conseguentemente impossibile di

ottenere il valore numerico diversamente che per approssimazione. Tali sono, per esempio, il numero π nella teoria dei seni, e il numero e in quella dei logaritmi, vale a dire, la circonferenza del circolo il cui raggio è 1, e la base dei logaritmi naturali. Tali sono ancora le *differenziali*, le quantità dette *immaginarie* e ancora *i seni* e *i logaritmi* in tutti i casi dove questi numeri non ammettono punto un' espressione numerica finita. In generale qualunque quantità che contiene nella sua espressione teorica primitiva degli elementi *indefiniti* o *immaginari* è una *quantità trascendente*.

L' *equazioni trascendenti* sono quelle nelle quali entrano delle quantità trascendenti. (*Vedi* Equazione.)

TRASCENDENTI ELLITTICHE. (*Calcolo integrale*). Nella maggior parte delle applicazioni del calcolo infinitesimale, si giunge ad espressioni differenziali che non è possibile integrare sotto forma finita, tanto generalmente, quanto tra limiti dati. Allora, e quando si tratta d' integrali definiti, ci riduciamo a calcolare i loro valori approssimati, per mezzo del metodo delle quadrature o del loro sviluppo in serie convergente; ma s' ignora completamente la natura dalla quantità trascendenti che entrano nella loro generazione; e tutto quello che si è potuto fare di meglio fino a questo momento è stato di cercare di diminuire il numero di queste quantità facendole dipendere le une dall' altre. Di tutti i resultamenti ottenuti dai geometri in questo ramo difficile dell' analisi, quelli del Legendre debbono situarsi al primo posto sotto il rapporto della generalità e della fecondità; poichè esso ha saputo riportare una classe assai numerosa d' integrali ad archi d' ellisse, e reso il loro calcolo tanto facile quanto quello delle funzioni circolari o logaritmiche.

Fin da quando s' integrarono alcune formule con archi di circolo, si dovette naturalmente tentare di ridurre altri integrali ad archi d'ellisse o d'iperbola; il Maclaurin e il D' Alembert, che, per i primi si dedicarono a questa ricerca, trovarono infatti molte formule che erano capaci di una tale riduzione; ma i loro resultamenti erano isolati, e fu un geometra italiano, il conte di Fagnano, che aprì la carriera a investigazioni più profonde, scoprendo che, sopra qualunque ellisse o sopra qualunque iperbola data, si possono assegnare in un'infinità di maniere due archi la cui differenza sia uguale ad una quantità algebrica. Inseguito il Landen dimostrò che qualunque arco d' iperbola può misurarsi mediante due archi d' ellisse, senza però travedere le conseguenze che potevano derivare da questa scoperta tanto degna di essere osservata. Soltanto, nel 1786, nelle memorie dell' Accademia delle Scienze di Parigi, il Legendre pubblicò le sue prime ricerche sopra l' integrazione mediante archi d' ellisse; esso fece vedere che, in una serie infinita di ellissi formate mediante una data legge, si può ridurre la rettificazione di una di queste ellissi, a quelle di due altre prese a piacere nella stessa serie. Riprese bentosto la materia in un modo più generale e più metodico in una memoria sopra le *trascendenti ellittiche* pubblicata nel 1793; e finalmente, ulteriori ricerche avendogli permesso di formare un complesso teorico, diede nel 1825 il suo trattato delle *funzioni ellittiche*, il quale, in mancanza di altri titoli, basterebbe per assegnarli un posto distinto tra i primi analisti del nostro secolo. Dopo, il signor Jacobi, professore all' Università di Kœnigsberg, ha saputo situarsi accanto del Legendre con arricchire la teoria delle funzioni ellittiche di molte importanti scoperte.

I limiti della nostra opera non ci permettono gli sviluppi necessari per l' intelligenza della teoria delle funzioni ellittiche; tutto quello che possiamo fare in questo punto, è di dare un' idea del suo oggetto.

Sia P una funzione razionale qualunque della variabile x, ed R un radicale

quadrato della forma

$$\sqrt{\left[\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4\right]},$$

l' integrale

$$\int\frac{Pdx}{R},$$

è in generale, una quantità trascendente la cui natura cangia col valore di P, senza però che dall' infinità dei valori differenti che possiamo dare a P resulti un' infinità di trascendanti differenti.

Mediante una prima preparazione, si può sempre fare in modo che non ci siano potenze impari della variabile sotto il radicale; così metteremo generalmente

$$R=\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}.$$

Possiamo supporre inoltre che P sia una funzione pari di x; poichè possiamo sempre fare

$$P=M+Nx,$$

M ed N essendo funzioni pari di x. Ora, la parte

$$\frac{Nxdx}{R}$$

si riporta alle regole ordinarie facendo

$$x^2=y;$$

così tutta la difficoltà si riduce ad integrare $\frac{Mdx}{R}$, nella quale M è una funzione pari di x.

Premesso ciò, il Legendre prova, mediante l' analisi dei differenti casi, che la differenziale $\frac{dx}{R}$ può sempre riportarsi alla forma

$$\frac{md\varphi}{\sqrt{1-c^2\operatorname{sen}^2\varphi}},$$

nella quale c è minore dell' unità, e per conseguenza, $\int\frac{Pdx}{R}$ è trasformata in

$$\int\frac{Qd\varphi}{\sqrt{1-c^2\operatorname{sen}^2\varphi}},$$

Q essendo una funzione razionale pari di sen φ, la quale contiene sen φ allo stesso grado che P contiene x

La decomposiziona di quest' integrale prova che essa contiene in generale, 1.° una parte algebrica; 2.° un integrale della forma

$$\int\left(A+B\operatorname{sen}^2\varphi\right)\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\operatorname{sen}^2\varphi}};$$

3.° Uno o più integrali della forma

$$\int \frac{N}{1+n\,\text{sen}^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\,\text{sen}^2\varphi}}$$

in ciascuno dei quali i coefficienti N ed n possono avere valori qualunque reali o immaginarj.

Le trascendanti contenute nella formula $\int \frac{Pdx}{R}$ riducendosi sempre ad una delle due forme precedenti, è evidente che esse sono comprese nella formula generale

$$H = \int \frac{A+B\,\text{sen}^2\varphi}{1+n\,\text{sen}^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\,\text{sen}^2\varphi}},$$

e gl' integrali di quest' ultima sono quelli che costituiscono le *funzioni* o *trascendenti ellittiche*.

La trascendente H si suppone che si annulli o che cominci quando $\varphi = 0$; la sua estensione è determinata dalla variabile φ, che si chiama la *grandezza*; la costante c sempre minore dell' unità, si chiama il modulo, e la quantità $\sqrt{1-c^2}$ dicesi il *complemento del modulo*.

Le funzioni comprese nella formula H si dividono in tre specie; la prima e la più semplice è rappresentata dalla formula

$$F = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\,\text{sen}^2\varphi}}.$$

La seconda è l' arco dell' ellisse contato a cominciare dal piccolo asse, la cui espressione è

$$E = \int \sqrt{1-c^2\,\text{sen}^2\varphi}\,.\,d\varphi.$$

Finalmente, la terza è rappresentata da

$$\Pi = \int \frac{d\varphi}{(1+n\,\text{sen}^2\varphi)\sqrt{1-c^2\,\text{sen}^2\varphi}}.$$

Essa contiene, oltre il modulo c comune alle due altre specie, un parametro n che può essere a piacere positivo, negativo, reale o immaginario. Le funzioni di questa specie possono sempre esprimersi mediante funzioni della prima e della seconda specie.

Mediante l' aiuto di queste tre funzioni chiamate funzioni ellittiche della *prima*, della *seconda* e della *terza specie*, e per le quali il Legendre ha calcolate delle tavole estesissime, si ottiene il valore di tutti gl' integrali compresi sotto la forma $\int \frac{Pdx}{R}$. *Vede* Legendre, *Traité des fonctions elliptiques* — Jacobi, *Fundamenta nova funtionum ellipticarum*.

TRASFORMAZIONE (*Alg.*). Cangiamento di forma che si fa subire ad un' espressione algebrica senza alterare il suo valore. Per esempio, avendo l' espressione

$$\frac{a^2m+b^2m}{a^4-b^4},$$

sa si osserva che il denominatore può considerarsi come il prodotto dai due fattori a^2+b^2 e a^2-b^2, perchè

$$\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)=a^4-b^4,$$

e che il numeratore è ancora il prodotto dai due fattori m e (a^2+b^2), sottraendo il fattore comune ai due termini della frazione (a^2+b^2), si *trasformerà* l'espressione proposta in quest'altra più semplice:

$$\frac{m}{a^2-b^2}.$$

Le *trasformazioni* che possiamo operare sopra l'*equazioni* formano una parte importantissima della loro teoria. Siccome abbiamo digià veduto (EQUAZIONE), che qualunque equazione algebrica del grado m può essere riportata alla forma generale

$$x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\text{ec.} \; . \; . \; . \; . +A_{m-1}\,.\,x+A_m=0 \; . \; . \; . \; . \; (a),$$

comprenderemo le ulteriori trasformazioni sotto le quattro proposizioni seguenti:

1. *Trasformare l'equazione generale* (*a*) *in un'altra che abbia un termine di meno.*

Facciamo $x=y+u$, y rappresentando l'incognita dall'equazione domandata ed u una quantità arbitraria che si tratta di determinare in modo da adempire la condizione imposta. Sostituendo $y+u$ in luogo di x; l'equazione (*a*) diventa dopo avere sviluppato le diverse potenze del binomio $y+u$, e ordinato i termini rapporto alle potenze di y,

$$\left.\begin{array}{l|l|l} y^m+mu & y^{m-1}+\dfrac{m(m-1)u^2}{1\,.\,2} & y^{m-2}+\text{ec.}+u^m \\ +A_1 & +(m-1)A_1u & +A_1u^{m-1} \\ & +A_2 & +A_2u^{m-2} \\ & & +\text{ec.} \; . \; . \; . \\ & & \; . \; . \; . \; . \; . \\ & & +A_{m-1}u \\ & & +A_m \end{array}\right\}=0 \; . \; . \; . \; . \; (b),$$

Ora, poichè la quantità u è arbitraria, possiamo uguagliare a zero uno qualunque dei coefficienti di quest'equazione, il che comincerà da fare sparire il termine affetto da questo coefficiente e darà insegnito il mezzo di determinare il valore di u; dimodochè sostituendo questo valore nell'equazione trasformata essa non avrà più che coefficienti determinati.

Si tratta per esempio di fare sparire il secondo termine, si porrà

$$mu+A_1=0,$$

donde si ricaverà

$$u=-\frac{A_1}{m},$$

quindi sostituendo in (*b*) questo valore di u, l'equazionne (*b*) prenderà eviden-

temente la forma

$$y^m+B_2y^{m-2}+B_3y^{m-3}+\text{ec.}\ldots\ldots+B_{m-1}y+B_m=0,$$

e le radici di quest' ultime farenno conoscere quelle delle proposta, mediante la relazione

$$x=y+u,$$

ovvero

$$x=y-\frac{A_1}{m}.$$

Questa trasformazione particolare essendo una delle più usuali, faremo osservare che essa si effettua ponendo invece della variabile x dell' equazione proposta un' altra variabile *diminuita del coefficiente del secondo termine diviso per il numero che esprime il grado dell' equazione.*

Si abbia, per esempio

$$x^3-5x^2+3x-7=0,$$

l' equazione dalla quale si tratta di fare sparire il secondo termine $-5x^2$; faremo, perchè il coefficiente 5 è negetivo,

$$x=y+\frac{5}{3},$$

a troveremo

$$\begin{aligned}
x^3 &= \left(y+\frac{5}{3}\right)^3 = y^3+5y^2+\frac{25}{3}y+\frac{125}{27}\\
-5x^2 &= -5\left(y+\frac{5}{3}\right)^2 = \quad -5y^2-\frac{50}{3}y-\frac{125}{9}\\
+3x &= +3\left(y+\frac{5}{3}\right) = \qquad\qquad +3y+5\\
-7 &= \ldots\ldots\ldots = \qquad\qquad\qquad -7
\end{aligned}$$

il che ci darà, prendendo le somme dei coefficienti,

$$y^3-\frac{16}{3}y-\frac{1054}{27}=0.$$

Se si trattasse di fare sparire il terzo termine dell' eqnezione generale (a), bisognerebbe porre

$$\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}u^2+(m-1)A_1u+A_2=0,$$

e si evrebbe ancora un' equezione del secondo grado da risolvere per ottenere il velore di u. Volendo far sparire il quarto termine ci condurrebbe ugualmente ad un' equazione del terzo gredo; e, in generele, quella del termine affetto dalle potenze x^{m-n} ad un' equazione del grado n. Dimodochè se si volesse fare sparire l' ultimo termine, si evrebbe da risolvere un' equezione dello stesso grado della proposta.

2. *Trasformare un'equazione in un'altra le radici della quale siano più grandi o più piccole di quelle della proposta, di una quantità data.*

Questa trasformazione si effettua nella stessa maniera della precedente, poichè è evidente che se in luogo di x nell'equazione generale (a) si sostituisce $y \pm d$, d essendo una quantità determinata, si otterrà un'equazione in y ciascuna radice della quale differirà da una delle radici dell'equazione (a) della quantità $\pm d$. Proponiamoci per esempio, di trasformare l'equazione

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0,$$

in un'altra, le cui radici siano più piccole dell'unità. Poniamo

$$x = y + 1.$$

La proposta diventerà

$$\left(y+1\right)^3 - 5\left(y+1\right)^2 + 8\left(y+1\right) - 4 = 0,$$

e si otterrà, dopo avere sviluppato i binomi e ordinato rapporto alla potenza di y,

$$\begin{aligned} \left(y+1\right)^3 &= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\ -5\left(y+1\right)^2 &= \quad -5y^2 - 10y - 5 \\ +8\left(y+1\right) &= \quad\quad + 8y + 8 \\ -4 &= \quad\quad\quad - 4. \end{aligned}$$

Sommando e riducendo si ottiene

$$y^3 - 2y^2 + y = 0,$$

equazione, una radice della quale è evidentemente $y = 0$. Dividendo per y, rimane l'equazione del secondo grado

$$y^2 - 2y + 1 = 0,$$

le cui radici sono $y = 1$ e $y = 1$. Così le tre radici della trasformata sono 0, 1 e 1, e per conseguenza quelle della proposta 1, 2 e 2.

3. *Trasformare l'equazione generale* (a) *in un'altra le cui radici siano un multiplo o un summultiplo determinato delle sue radici.*

Nel caso del multiplo, sia q il fattore dato. Poniamo

$$qx = y,$$

donde

$$x = \frac{y}{q},$$

e sostituendo $\frac{y}{q}$ in luogo di x, l'equazione (a) diventerà

$$\frac{y^m}{q^m} + A_1 \cdot \frac{y^{m-1}}{q^{m-1}} + A_2 \cdot \frac{y^{m-2}}{q^{m-2}} + \text{ec.} \ldots + A_{m-1} \cdot \frac{y}{q} + A_m = 0,$$

moltiplicando tutto per q^m, l'equazione domandata sarà

$$y^m + A_1 \cdot qy^{m-1} + A_2 \cdot q^2 y^{m-2} + \text{ec}, \ldots\ldots + A_{m-1} q^{m-1} y + A_m q^m = 0,$$

Le radici di quest' ultima, divise per q daranno quelle dell'equazione (a).
Nel caso del summoltiplo, q essendo sempre il fattore dato, poniamo

$$\frac{x}{q}=y,$$

donde

$$x=qy,$$

ed otterremo, sostituendo

$$q^m y^m+A_1 q^{m-1} y^{m-1}+A_2 q^{m-2} y^{m-2}+\text{ec.}\ldots+A_{m-1} qy+A_m=0,$$

la quale, essendo divisa per q^m, dà la trasformata

$$y^m+\frac{A_1}{q}y^{m-1}+\frac{A_2}{q^2}y^{m-2}+\ldots+\frac{A_{m-1}}{q^{m-1}}y+\frac{A_m}{q^m}=0.$$

Le radici di questa moltiplicate per q faranno conoscere quelle della proposta.

4. *Trasformare l'equazione* (a) *in un' altra le cui radici siano di segni contrari.*

Per eseguire questa trasformazione, basta evidentemente fare $x=-y$, poichè l'equazione in y avrà per radici negative le radici positive della proposta e *vice-versa*. Ma sostituendo $-y$ in luogo di x, i termini affetti dalle potenze impari di $-y$ cangeranno soli di segno. Così è facile vedere che per rendere negative le radici positive di un' equazione proposta, e positive le sue radici negative, bisogna semplicemente cangiare i segni dei termini affetti dalle potenze impari di x. Se si avesse per esempio l'equazione

$$x^5-4x^3+3x^2-8x+9=0,$$

dando il segno $-$ ai termini che contengono delle potenze impari di x, si avrebbe una trasformata

$$-x^5+4x^3+3x^2+8x+9=0,$$

le radici della quale sarebbero uguali, ma di segni contrari a quelle della proposta. Siccome cangiando tutti i segni l'equazione non varia, quest' ultima è la stessa cosa che

$$x^5-4x^3-3x^2-8x-9=0.$$

Donde si vede che quando l'equazione è di grado impari si cangia il segno delle sue radici cangiando il segno dei suoi termini affetti dalle potenze pari di x. Si deve allora considerare il termine assoluto come affetto da x^0.

Abbiamo impiegato molte altre trasformazioni alle parole ELIMINAZIONE, EQUAZIONE e RADICE.

TRASFORMAZIONE DELLE COORDINATE (*Geom*). S'indica con ciò quell' operazione mediante la quale si cangiano gli assi delle coordinate di una linea o di una superficie, e per conseguenza queste coordinate esse stesse.

La trasformazione delle coordinate è delle operazioni le più importanti della geometria detta *analitica*; essa facilita la ricerca delle proprietà delle curve, dando i mezzi di esprimerle mediante equazioni più semplici, e spesso fa conoscere immediatamente alcune di queste proprietà che non si potrebbero scoprire che assai difficilmente con altri mezzi. Lo scopo di questa trasformazione viene enunciato nella seguente proposizione generale: *L'equazione di una curva,*

riferita a due assi qualunque, *essendo data*, *trovare l' equazione della stessa curva riferita a due altri assi.* Tratteremo questa questione in tutte le sue particolarità.

Sia MON (*Tav.* CCXLIV, *fig.* 1) una curva qualunque la cui equazione $y = Fx$ è riferita agli assi AX ed AY, e siano A'X' ed A'Y' due nuovi assi dati di posizione rapporto ai primi. Le coordinate AP e PO di un punto O della curva, seguendo i primi assi, essendo indicate con x ed y, e le coordinate A'P' e P'O dello stesso punto, seguendo gli ultimi assi, essendo indicate con x' ed y', si tratta di trovare l'espressione di x e di y in funzioni di x' e di y', poichè i valori di x ed y in x' ed y' essendo conosciuti, basta sostituirli nell'equazione

$$y = Fx$$

per avere l' equazione della curva espressa in x' ed y', e conseguentemente riferita agli assi A'X' ed A'Y'.

Ora, la posizione de secondo sistema di assi essendo conosciuta, conduciamo per il punto A', BY'' parallela ad AY e A'X'' parallela ad AX.

Facciamo

$$AB = a, \quad A'B = b;$$

l' angolo

$$X'A'X'' = \alpha,$$

l' angolo

$$Y'A'X'' = \alpha',$$

e l' angolo

$$Y''A'X'' = YAX = \beta.$$

Conduciamo P'E parallela ad AX e P'C parallela ad AY, avremo,

$$\left.\begin{array}{l} AP = x = A\,B + BP = a + A'C + CD \\ PO = y = A'B + OD = b + C\,P' + EO \end{array}\right\} \ldots . (a),$$

ma i triangoli A'CP', OP'E danno (*Vedi* Trigonometria)

$$1.^\circ \ldots . A'C : A'P' :: \text{sen}\,A'P'C : \text{sen}\,A'CP'$$
$$2.^\circ \ldots . C\,P' : A'P' :: \text{sen}\,P'A'C : \text{sen}\,A'CP'$$
$$3.^\circ \ldots . P'E : O\,P' :: \text{sen}\,P'O\,E : \text{sen}\,P'EO$$
$$4.^\circ \ldots . E\,O : O\,P' :: \text{sen}\,O\,P'E : \text{sen}\,P'EO$$

ovvero, ciò che equivale allo stesso.

$$1.^\circ \ldots . A'C : x' :: \text{sen}\,(\beta - \alpha) : \text{sen}\,\beta$$

donde

$$A'C = \frac{x' . \text{sen}\,(\beta - \alpha)}{\text{sen}\,\beta}.$$

$$2.^\circ \ldots . CP' : x' :: \text{sen}\,\alpha : \text{sen}\,\beta$$

donde

$$CP' = \frac{x' . \text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta}.$$

$$3.^\circ \ldots . P'E : y' :: \text{sen}\,(\beta - \alpha') : \text{sen}\,\beta.$$

donde

$$P'E = \frac{y' \cdot \text{sen}(\beta - \alpha')}{\text{sen}\,\beta}.$$

$$4.° \ldots EO : y' :: \text{sen}\,\alpha' : \text{sen}\,\beta,$$

donde

$$EO = \frac{y' \cdot \text{sen}\,\alpha'}{\text{sen}\,\beta}.$$

Sostituendo i valori di A'C, CP', P'E, EO nell' espressioni (a) di x e di y, otterremo

$$x = a + \frac{x' \,\text{sen}(\beta - \alpha) + y' \,\text{sen}(\beta - \alpha')}{\text{sen}\,\beta} \ldots (1),$$

$$y = b + \frac{x' \,\text{sen}\,\alpha + y' \,\text{sen}\,\alpha'}{\text{sen}\,\beta} \ldots (2).$$

Questi valori di x e di y, sostituiti nell' equazione della curva, trasformeranno quest' equazione in un' altra equivalente, la quale non conterrà più che le variabili x' ed y', e la quale conseguentemente sarà riferita ai nuovi assi A'X', A'Y'.

Dando alle rette a e b e agli angoli α e α' dei valori convenienti, è facile di dedurre dalle formule generali (1) e (2) tutte le formule particolari corrispondenti a tutte le posizioni dei nuovi assi. Queste formule particolari comprendono quattro casi principali che indicheremo.

I. *L' origine non essendo la medesima, i nuovi assi sono paralleli agli antichi.* In questo caso, i nuovi assi sono A'X'', A'Y'', e si ha

$$\alpha = 0, \quad \alpha' = \beta;$$

donde

$$\text{sen}(\beta - \alpha) = \text{sen}\,\beta,$$
$$\text{sen}(\beta - \alpha') = 0,$$
$$\text{sen}\,\alpha = 0,$$
$$\text{sen}\,\alpha' = \text{sen}\,\beta.$$

Le formule (1) e (2) diventano allora semplicemente

$$x = x' + a \ldots (3),$$
$$y = y' + b \ldots (4).$$

II. *I primi assi essendo rettangolari, i secondi sono obliqui.* Allora $\beta = 90°$, e si ha

$$\text{sen}\,\beta = 1,$$
$$\text{sen}(\beta - \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\text{sen}(\beta - \alpha') = \cos\alpha',$$

e le formule diventano

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\alpha' + a \ldots (5),$$
$$y = x' \,\text{sen}\,\alpha + y' \,\text{sen}\,\alpha' + b \ldots (6).$$

III. *I due sistemi di assi sono rettangolari*. Si ha in questo caso

$$\beta = 90^0,$$
$$\alpha' = 90^0 + \alpha,$$
$$\text{sen}\,\beta = 1,$$
$$\text{sen}(\beta - \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\text{sen}(\beta - \alpha') = \cos\alpha' = \cos(90 + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha,$$
$$\text{sen}\,\alpha' = \cos\alpha,$$

il che dà

$$x = x'\cos\alpha - y'\,\text{sen}\,\alpha + a \;\ldots\ldots\; (7),$$
$$y = x'\,\text{sen}\,\alpha + y'\cos\alpha + b \;\ldots\ldots\; (8).$$

IV. *I primi assi sono obliqui e i secondi sono rettangolari*. Allora

$$\alpha' = 90 + \alpha;$$

donde

$$\text{sen}\,\alpha' = \cos\alpha,$$
$$\text{sen}(\beta - \alpha') = \text{sen}(\beta - 90^\circ - \alpha)$$
$$= -\text{sen}[90^\circ - (\beta - \alpha)] = -\cos(\beta - \alpha),$$

e le formule diventano

$$x = a + \frac{x'\,\text{sen}(\beta - \alpha) - y'\cos(\beta - \alpha)}{\text{sen}\,\beta} \;\ldots\ldots\; (9),$$

$$y = b + \frac{x'\,\text{sen}\,\alpha + y'\cos\alpha}{\text{sen}\,\beta} \;\ldots\ldots\; (10).$$

In tutte queste formule, a e b sono le coordinate dell' origine dei nuovi assi rapporto agli antichi; così facendo $a = 0$ e $b = 0$, si esprimerà, nei quattro casi di sopra la circostanza che si vuole solamente cangiare la direzione degli assi senza spostare l' origine. Se si fa solamente $a = 0$, la nuova origine sarà situata sull' asse delle y, come, se si fa solamente $b = 0$, essa sarà situata sull' asse delle x.

Faremo conoscere mediante un esempio come si possano impiegare queste trasformazioni per rendare più semplice l' equazione di una curva. L' equazione generale del circolo riportato ad assi rettangolari è (*Vedi* APPLICAZIONE DELL' ALGEBRA ALLA GEOMETRIA)

$$x^2 - 2qx + y^2 - 2py + q^2 + p^2 - r^2 = 0,$$

nella quale r indica il raggio, p la distanza dal centro all' asse delle y e q la distanza dal centro all' asse delle x. Per riportare quest' equazione ad altri assi rettangolari, sostituiamo in luogo di x e di y i valori dati dall' espressioni (7) e (8), l' equazione trasformata sarà

$$\left.\begin{array}{l} x'^2 + 2[(a-q)\cos\alpha + (b-p)\,\text{sen}\,\alpha]x' \\ + y'^2 - 2[(a-q)\,\text{sen}\,\alpha - (b-p)\cos\alpha]y' \\ + a^2 + b^2 + p^2 + q^2 - 2aq - 2bp - r^2 \end{array}\right\} = 0.$$

Quest' equazione è per verità più complicata dalla proposta, ma vi entrano tre quantità arbitrarie a, b ed α delle quali possiamo disporre a piacere per renderla più semplice. Ora, è facile vedere che facendo

$$a = q, \quad e \quad b = p$$

non solamente i termini affetti da x' e da y' spariscono, ma che essa si riduce a

$$x'^2+y'^2-r^2=0,$$

a motivo di

$$q^2+a^2=2q^2,$$

$$b^2+p^2=2p^2,$$

$$2aq=2q^2$$

e

$$2bp=2p^2.$$

Ora, facendo

$$a=q \quad e \quad b=p,$$

si è trasportata l'origine al centro del circolo; così l'equazione del circolo riportata al centro è la più semplice di tutte. Di più, quest'equazione è sempre la stessa, qualunque sia la posizione degli assi, purchè essi siano rettangolari poichè l'angolo α rimane indeterminato.

La trasformazione delle coordinate rettilinee in coordinate polari è stata trattate alla parola Polare.

Fin qui per quello che riguarda la geometria piana, consideriamola ora nello spazio e tre dimensioni.

Cominciamo dal supporre che si tratti di passare da un sistema di assi rettangolari OX, OY, OZ (*Tav.* CCII, *fig.* 3) ad un sistema di assi obliqui OX′, OY′, OZ′ che ha la medesima origine O. Sia M un punto qualunque dello spazio, se da questo punto si conducano delle rette parallele a tutti gli assi, e che per i punti dove esse incontrano i piani coordinati si conducano altre parallele agli assi, si formeranno due parallelepipedi, l'uno rettangolo yPMz, l'altro obliquo y'P′Mx', i quali avranno due vertici comuni, l'uno in O, e l'altro in M. Le rette MR, MQ ed MP ovvero Ox, Oy, Oz saranno le coordinate del punto M rapporto agli assi rettangolari, e le rette MR′, MQ′, MP′ ovvero Ox', Oy', Oz' saranno le coordinate dello stesso punto rapporto agli assi obliqui. Si tratta di trovare il valore dei primi in funzione dei secondi o *vice-versa.*

Cominceremo dall'esporre una proprietà delle linee delle quali avremo bisogno, e la quale non è che un caso particolare di una proprietà dei piani (*vedi* Projezione), cioè: *che la projezione di una retta sopra un'altra retta è uguale alla retta primitiva moltiplicata per il coseno dell'angolo acuto che queste rette fanno tra loro.*

Per ben comprendere questo teorema, bisogna sapere che quando si tratta di due rette situate nello spazio, in modo da non potere incontrarsi, si è convenuto di chiamare angolo di queste rette l'angolo formato da una di esse con qualunque retta parallela all'altra. Sia dunque AB (*Tav.* CLXXXV, *fig.* 3) una retta di una grandezza determinata o finita, ed OX una retta indefinita: dai punti A e B abbassiamo sopra OX le perpendicolari AA′ e BB′, A′B′ sarà la projezione di AB, e se, per il punto B, conduciamo una retta BC parallela ed OX, l'angolo ABC sarà l'angolo delle rette AB ed OX, ed avremo

$$A'B'=AB\times\cos ABC.$$

Infatti, concepiamo per il punto A un piano AM perpendicolare ad OX, e

per il punto C, dove questo piano è incontrato da BC, conduciamo le rette AC ed A′C, il triangolo ACB sarà rettangolo in C e darà (*vedi* TRIGONOMETRIA)

$$CB = AB \times \cos ABC.$$

Ma BB′ è parallela al piano AM, e per conseguenza alla retta A′C; dunque CB = A′B′; dunque, ec.

Riprendiamo ora il punto M riportato e due sistemi di assi (*Tav.* CCII, *fig.* 3) e non lasciando sussistere nella figura che le linee necessarie, osserviamo che se convenuiamo d' indicare con x, y, z le coordinate rettangolari, e con x', y', z' le coordinate oblique, avremo (*Tav.* CCXLIX, *fig.* 3)

$$Ox = x\,,\quad Px = y\,,\quad MP = z,$$
$$Ox' = x',\quad P'x' = y',\quad MP' = z'.$$

Premesso ciò, per i punti x', P′ ed M, conduciamo all'asse OX le perpendicolari x'C, P′D, Mx, e con facilità vedremo che OC sarà la projezione di Ox', CD quella di P′x', e Dx quella di MP′; dimodochè la coordinata retgolare Ox ovvero x è esattamente uguale alla somma delle projezioni delle tre coordinate oblique x', y' e z' sul suo asse; ma indicando con la notazione (x', x), (y', x), (z', x) gli angoli che fanno respettivamente gli assi delle x', y' e z' con l' asse delle x, abbiamo, in virtù del teorema di sopra

$$OC = Ox' \,.\, \cos\left(x', x\right) = x' \cos\left(x', x\right),$$

$$CD = x'P' \,.\, \cos\left(y', x\right) = y' \cos\left(y', x\right),$$

$$Dx = MP' \,.\, \cos\left(z', x\right) = z' \cos\left(z', x\right),$$

e, conseguentemente, siccome

$$OC + CD + Dx = OX = x,$$

così avremo

$$x = x' \cos\left(x', x\right) + y' \cos\left(y', x\right) + z' \cos\left(z', x\right).$$

La medesima costruzione, fatta per ciascuno dei due altri assi OY, OZ dovendo necessariamente darci resultamenti simili, ne concluderemo che *ciascuna coordinata rettangolare è uguale alla somma delle projezioni delle tre nuove coordinate sopra ciascuno degli antichi assi*, osservando ciò non ostante che per la parola *somma* bisogna intendere la *somma algebrica*; poichè, se i tre semi-assi obliqui positivi non formassero tre angoli acuti con ciascuno dei tre semi-assi rettangolari positivi, come l' abbiamo supposto nelle nostra figura, ci sarebbero nelle tre projezioni sopra un asse delle quantità che bisognerebbe prendere negativamente, affinchè la somma fosse uguale alla coordinata rettangolare. Del rimanente, questa circostanza è indicata dal segno del coseno, che diventa negativo quando l' angolo degli assi è ottuso; dimodochè tenendo conto di questi segni, come pure dei segni delle coordinate, possiamo stabilire le tre

seguenti formole generali di trasformazione

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\left(x', x\right) + y' \cos\left(y', x\right) + z' \cos\left(z', x\right) \\ y &= x' \cos\left(x', y\right) + y' \cos\left(y', y\right) + z' \cos\left(z', y\right) \\ z &= x' \cos\left(x', z\right) + y' \cos\left(y', z\right) + z' \cos\left(z', z\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1),$$

ovvero più semplicemente

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,x' + b\,y' + c\,z' \\ y &= a'x' + b'y' + c'z' \\ z &= a''x' + b''y' + c''z' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2),$$

indicando con a, a', a'' i coseni degli angoli che forma l'asse delle x' son gli antichi assi rettangolari, con b, b', b'' i coseni degli angoli dall'asse delle y', e son c, c', c'' i coseni degli angoli dall'asse delle z' con i medesimi assi.

Le nove costanti che entrano in quest'espressioni non sono tutte arbitrarie, poichè si sa che i tre angoli formati da una stessa retta con i tre assi rettangolari sono soggetti alla condizione di avere la somma dei quadrati dei loro coseni uguali all'unità. (*Vedi* Applicazione dell' Algebra alla Geometria); non possiamo dunque disporne che unendo all'equazioni (2) le relazioni

$$\left.\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3).$$

Se l'origine delle coordinate non fosse la stessa, bisognerebbe aggiungere al valore di ciascuna coordinata nelle formole (2) la coordinata della nuova origine rapporto all'asse antico. Infatti, immaginiamo che si spostino gli assi parallelamente a loro stessi trasportando l'origine O ad un altro punto O′ le cui coordinate rapporto ad O siano α, β e γ, è evidente che avremo tra le antiche coordinate x, y, z, e le nuove x', y', z' le relazioni

$$x = x' + \alpha,$$
$$y = y' + \beta,$$
$$z = z' + \gamma.$$

Così, indicando sempre con α, β, γ le coordinate rettangolari, rapporto all'origine O, dell'origine O′ dagli assi obliqui, le relazioni generali per passare da un sistema di coordinate rettangolari ad un sistema di coordinate oblique sono

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha + a\,x' + b\,y' + c\,z' \\ y &= \beta + a'\,x' + b'\,y' + c'\,z' \\ z &= \gamma + a''x' + b''y' + c''z' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4).$$

Per passare da un sistema di assi rettangolari ad un altro sistema ugualmente rettangolare, basta ora di unire alle relazioni (3) e (4) delle nuove relazioni che impongano agli angoli che fanno tra loro gli assi OX′, OY′, OZ′ la

condizione di essere retti. Ora (Applicazione dell' Algebra alla Geometria), qualunque sia l'angolo dei due assi OX′ ed OY′, che indicheremo con (x', y'), il suo valore in funzione degli angoli che queste rette fanno con gli antichi assi dipendono dalla relazione

$$\cos\left(x'y'\right) = \cos\left(x', x\right)\cos\left(y', x\right)$$
$$+\cos\left(x', y\right)\cos\left(y' y\right) + \cos\left(x', z\right)\cos\left(y', z\right);$$

dimodochè, perchè quest' angolo sia retto, bisogna che si abbia

$$\cos\left(x', x\right)\cos\left(y', x\right) + \cos\left(x', y\right)\cos\left(y', y\right)$$
$$+\cos\left(x', z\right)\cos\left(y', z\right) = 0$$

ovvero

$$ab + a'b' + a''b'' = 0.$$

Così, la stessa relazione avendo luogo rapporto agli altri angoli per esprimere che gli angoli dei nuovi assi sono retti, è necessario e basta di stabilire le condizioni

$$\left.\begin{array}{l} ab + a'b' + a''b'' = 0 \\ ac + a'c' + a''c'' = 0 \\ bc + b'c' + b''c'' = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (5),$$

le quali, unite alle condizioni (3) e (4), danno la soluzione del problema, bisogna osservare che le formole (3) e (5) stabiliscono sei relazioni tra le nove costanti, e conseguentemente che non possiamo disporre arbitrariamente che di tre di esse.

Non ci arresteremo alla trasformazione delle coordinate oblique in un altro sistema di coordinate oblique; la prolissità delle formule da cui dipende questa trasformazione non permette d'impiegarla vantaggiosamente.

TRASFORMAZIONE DELLE COORDINATE (*Ast.*). Le latitudini e le longitudini degli astri sono legate alle loro ascensioni e loro declinazioni mediante relazioni che si deducono assai semplicemente dai primi principii della Geometria analitica. Ecco come.

Se si chiama Æ l'ascensione retta di un astro, D la sua declinazione, L la sua longitudine, λ la sua latitudine, e che ω indichi l'obliquità dell'eclittica, la posizione di quest' astro, riportata ad un sistema di coordinate rettangolari avente il centro della terra per origine, e di cui x, y rappresentano il piano dell' equatore, sarà data come all' articolo Parallasse, da

$$x = r \cos Æ \cos D,$$
$$y = r \operatorname{sen} Æ \cos D,$$
$$z = r \operatorname{sen} D.$$

Il medesimo astro riportato al piano dell' eclittica rappresentato da x', y', sarà similmente dato di posizione da

$$x' = r \cos L \cos \lambda,$$
$$y' = r \operatorname{sen} L \cos \lambda,$$
$$z' = \operatorname{sen} \lambda$$

r essendo la distanza dell' astro alla terra.

Ma quando si passa da un sistema di coordinate x, y, z ad un altro x', y', z', nella circostanza attuale, e perchè l'angolo dalla y, y' è uguale all'obliquità ω, si ha (*vedi* TRASFORMAZIONE DELLA COORDINATE)

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \cos\omega - z' \operatorname{sen}\omega \\ z &= z' \cos\omega + y' \operatorname{sen}\omega \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (a);$$

reciprocamente

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \cos\omega + z \operatorname{sen}\omega \\ z' &= z \cos\omega - y \operatorname{sen}\omega \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (b).$$

Per conseguenza, se s'introduce nelle relazioni (a) i valori precedenti di x, y, z, x', y', z'; comincieremo da avere

$$\left.\begin{aligned} \cos Æ \cos D &= \cos L \cos\lambda \\ \operatorname{sen} Æ \cos D &= \operatorname{sen} L \cos\lambda \cos\omega - \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\omega \\ \operatorname{sen} D &= \operatorname{sen}\lambda \cos\omega + \operatorname{sen} L \cos\lambda \operatorname{sen}\omega \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (c),$$

e se si procede ugualmente riguardo alle relazioni inverse (b), avremo

$$\left.\begin{aligned} \cos L \cos\lambda &= \cos Æ \cos D \\ \operatorname{sen} L \cos\lambda &= \operatorname{sen} Æ \cos D \cos\omega + \operatorname{sen} D \operatorname{sen}\omega \\ \operatorname{sen}\lambda &= \operatorname{sen} D \cos\omega - \operatorname{sen} Æ \cos D \operatorname{sen}\omega \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (d).$$

Dividendo ora la seconda e la terza equazione (c) successivamente per la prima, si otterrà come per la trigonometria sferica, ma più rapidamente,

$$\operatorname{tang} Æ = \frac{\operatorname{sen} L \cos\omega - \operatorname{tang}\lambda \operatorname{sen}\omega}{\cos L},$$

$$\operatorname{tang} D = \frac{(\operatorname{tang}\lambda \cos\omega + \operatorname{sen} L \operatorname{sen}\omega) \cos Æ}{\cos L}.$$

Finalmente, operando sopra le formule (d) nella stessa maniera, verrà

$$\operatorname{tang} L = \frac{\operatorname{sen} Æ \cos\omega + \operatorname{tang} D \operatorname{sen}\omega}{\cos Æ},$$

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{(\operatorname{tang} D \cos\omega - \operatorname{sen} Æ \operatorname{sen}\omega) \cos L}{\cos Æ}.$$

I due primi resultamenti fanno dunque conoscere l'ascensione retta e la declinazione mediante la longitudine e la latitudine, nel mentre che le due altre danno la longitudine e la latitudine per mezzo dell'ascensione retta e della declinazione, coordinate astronomiche, che è essenziale determinare per effettuare il calcolo dell'ecclissi.

TRASPOSIZIONE. (*Alg.*) Espressione della quale ci serviamo per indicare il cambiamento di posto che si fa provare ad un termine di un'equazione trasportandolo da un membro all'altro. Se per esempio si ha l'equazione

$$x^2 + 4x + 8 = 16,$$

e che si faccia passare il termine 8 dal primo membro nel secondo, il che dà.

$$x^2+4x=16-8$$

avremo operato una *trasposizione*. L'equazione non cangia mediante tali trasposizioni, purchè si osservi di cangiare il segno dei termini spostati. (*Vedi*) EQUAZIONE.)

TRASVERSALE. (*Geom.*) In generale si chiama così qualunque linea che ne taglia dell'altre.

GEOMETRIA DELLE TRASVERSALI. Adottando la divisione di ciascuno dei due rami fondamentali delle matematiche in TEORIA e TECNIA (*Vedi* MATEMATICHE e FILOSOFIA), le proprietà delle trasversali e il loro uso per la soluzione delle questioni geometriche si trovano naturalmente classate nella parte tecnica della geometria generale e costituiscono un ramo elementare di questa TECNIA GEOMETRICA, l'oggetto generale della quale è come l'abbiamo detto in altra parte, la generazione e il paragone universale dell'estensione.

Mediante l'aiuto di questa classificazione, fondata a *priori* sulla natura stessa dell'intelligenza umana, ciascun ramo della geometria generale riceve uno scopo fisso e determinato; il quale non permette più di confonderlo con gli altri, e finalmente possiamo riconoscere l'unità sistematica che regna tra tutti questi rami, unità senza la quale una riunione qualunque delle conoscenze non può formare una vera scienza. Ora, partendo dai principii che servono di base alla deduzione che abbiamo dato, alla parola MATEMATICHE, dai diversi rami della *scienza dei numeri*, è facile riconoscere che la *scienza dell'estensione* si divide ugualmente in più rami necessari e che il *metodo delle trasversali* è uno di questi rami. In questo punto tenteremo di completare il punto di vista generale che si trova alla parola GEOMETRIA, indicando il parallelismo intellettuale che resulta, tra le parti dell'*algebra* e quelle della *geometria*, dalla loro comune origine.

1. La generazione dell'estensione, come quella dei numeri, si presenta sotto due aspetti differenti, l'uno *individuale* il quale ci fa conoscere la natura particolare della specie d'estensione generata, l'altro *universale* il quale si riferisce alla valutazione di quest'estensione. Per esempio, se tracciamo sopra un piano tre rette che si tagliano due a due, formeremo un'estensione chiamata *triangolo*, il quale sarà equilatero, isoscele o scaleno, secondo le relazioni d'uguaglianza o d'ineguaglianza che avremo stabilite tra i suoi lati. In ciascun caso, dovremo dunque considerare un'estensione di una natura particolare e distinta data dalle circostanze della sua generazione. Se, in luogo di limitarci a questa costruzione individuale, considereremo le tre linee rette in un modo generale, vale a dire riportandole ad assi coordinati, e esprimendole mediante le loro equazioni, la sola condizione che queste rette si tagliano due a due ci condurrà alla generazione del triangolo generale o *schematico* (*Vedi* FILOSOFIA n.° 25), dal quale potremo ottenere la valutazione dei processi universali; così le relazioni che esistono tra l'area del triangolo, i suoi angoli e i suoi lati, si troveranno fissate nel modo più generale. Questi due aspetti differenti sotto i quali possiamo considerare la generazione dell'estensione stabiliscono necessariamente, nella geometria, due rami essenziali e distinti, uno dei quali deve avere per oggetto la riunione di tutti i modi individuali e indipendenti dalla generazione e dal paragone dell'estensione, e l'altro, tutti i modi universali di questa generazione e di questo paragone. La prima formerà la TEORIA GEOMETRICA e la seconda la TECNIA GEOMETRICA.

2. Cominciamo da esaminare la teoria geometrica e osserviamo che bisogna distinguere, prima di tutto, tra i modi individuali e indipendenti dalla genera-

zione dell'estensione, quelli che costituiscono gli *elementi* di tutte le costruzioni geometriche possibili da quelli che costituiscono la *riunione sistematica* di questi elementi. Ora, il primo modo elementare che si presente per la generazione dell'estensione, è la Linea retta: questa è un'estensione la quale non ha che una sola dimensione, e tutte le parti della quale hanno una medesima direzione. La *linea retta* è evidentemente il principio primitivo di qualunque estensione, l'elemento necessario senza del quale non si potrebbe concepirla; tutte le sue parti son simili o piuttosto esse stesse sono linee rette; il suo carattere generale è quello dell'*oggregazione*, ed essa finalmente è per la geometria, ciò che l'algoritmo della sommazione è per l'algebra. Un secondo modo elementare opposto viene a presentarci alla sua volta una generazione del tutto differente; questa è la Linea Curva; l'estensione che essa genera non ha ancora che una sola dimensione ma la sua direzione varia a ciascun punto; dimodochè, considerate in tutta la loro generalità, la natura della linea curva e quella della linea retta sono interamente eterogenee, ed è impossibile di dedurre una di queste linee dall'altra, diremo che la prima, la linea retta, ove si manifesta la *discontinuità* è un prodotto dell'intelletto, e che la seconda, la linea curva, ove si manifeste la *continuità*, è un prodotto della ragione.

Come mezzo di transizione dalla linea retta alla linea curva, un terzo modo primitivo di generazione viene finalmente a presentarci l'Angolo; questo è un'estensione che sempre non ha che una sola dimensione, ma la cui direzione varia da una delle sue parti all'altra. L'angolo è un prodotto della facoltà del giudizio, e forma in virtù delle sua origine intellettuale, la neutralizzazione dei due modi primitivi e opposti della generazione dell'estensione.

La *Linea retta*, *l'angolo* e la *linea curva*, tali sono dunque gli elementi primitivi della generazione dell'estensione, e non può esistere per l'intelligenza alcuna specie d'estensione se non che quella che si trova immediatamente fondata sopra questi tre elementi, o che è derivata dalla loro combinazione.

3. La combinazione dei tre modi primitivi, che abbiamo indicati, dà origine all'estensione derivata chiamata superficie, la quale ha due dimensioni, e mediante la riunione sistematica della superficie e delle linee si genera l'estensione chiamata *solido*, la quale ha tre dimensioni. Queste deduzioni sono abbastanza evidenti perchè si giudichi aver bisogno d'arrestarci.

Le linee, le superficie e i solidi sono gli oggetti necessari delle *teoria geometrico*, e per conseguenza quelli di tutta la geometria generale.

4. Lo scopo delle tecnia è, come diverse volte l'abbiamo detto, la costruzione universale delle quantità tanto numeriche, quanto geometriche, mediante l'aiuto di altre quantità arbitrarie della medesima specie prese per *misura*, essa esige dunque l'impiego di *mezzi* proprii a giungere a questa costruzione universale. Ora, per quello che riguarda la geometria, questi *mezzi* possono essere di due nature differenti; gli uni, come *mezzi primitivi*, sono esauriti nelle leggi dell'estensione essa stessa; gli altri, come *mezzi derivati*, sono ricavati dall'applicazione delle leggi generali delle quantità all'estensione. I mezzi primitivi o geometrici sono le *intersezioni delle linee* e le loro *projezioni*, i mezzi derivati o algebrici sono la *costruzione dei rapporti* e la riduzione di qualunque specie d'estensione all'estensione primitiva e discontinua: la linea retta mediante l'aiuto delle *coordinate*; ciascuno di questi mezzi è l'oggetto di un ramo particolare della geometria. Così la generazione tecnica dell'estensione per mezzo dell'intersezione delle linee è l'oggetto della Geometria delle Trasversali; questa generazione, per mezzo delle *projezioni*, è l'oggetto della Geometria Descrittiva, e, finalmente, questa medesima generazione, per il mezzo elementare della *costruzione dei rapporti*, e per il mezzo sistemetico delle *coor-*

dinate, è il doppio oggetto della GEOMETRIA detta ANALITICA. (*Vedi* APPLICAZIONE DELL' ALGEBRA ALLA GEOMETRIA).

5. La geometria delle trasversali è stata riunita per la prima volta in corpo di dottrina dal Carnot, nella sua opera intitolata *Geometria di posizione*; ma l'uso di queste linee non sembra che sia stato interamente incognito ai Greci, poichè resulta dalle note del Pappus sul libro, disgraziatamente perduto, dei *Porismi* dell' Euclide, che questo gran geometra si era servito in quest' opera dell' intersezione delle linee e di certe costruzioni generali per ottenere la soluzione di diversi problemi complicatissimi. Inseguito Tolomeo, nel suo *Almagesto*, ha fatto uso diretto delle *trasversali sferiche* per risolvere alcuni problemi d'astronomia. Qualunque siano le nozioni più o meno estese che gli antichi hanno potuto avere sopra questa parte tecnica della geometria, essa non ha data tra noi che dall' opera del Carnot, e i suoi sviluppi sono interamente dovuti ai geometri della nostra epoca. Faremo conoscere le proposizioni fondamentali delle *trasversali rettilinee*, e indicheremo alcune delle numerose applicazioni che se ne può fare alla geometria pratica.

6. PROPOSIZIONE I. *I tre lati di un triangolo essendo prolungati indefinitamente, se si conduca una trasversale che gli tagli tutti tre, avremo sopra ciascun lato due segmenti tali che il prodotto di tre tra di loro, non contigui, sia uguale al prodotto dei tre altri.*

Infatti, sia ABC (*Tav.* XLVI, *fig.* 10) un triangolo qualunque, ed M, N, O; i punti nei quali la trasversale taglia i suoi lati o i loro prolungamenti. Ciascuno di questi punti sarà l'origine di due segmenti formati sopra ciascun lato della trasversale. Per esempio, per il lato AB, i segmenti saranno MA, MB; per il lato AC, i segmenti saranno NA, NC; e per il lato BC, i segmenti saranno OB, OC. Premesso ciò, dal vertice di uno dei due angoli del triangolo, A per esempio, conduciamo una parallela al lato opposto BC, e la quale incontri in D la trasversale; i triangoli simili MAD, MBO daranno

$$MA : MB :: AD : BO,$$

avremo ancora, dai triangoli simili NAD, NCO,

$$NC : NA :: OC : AD.$$

Moltiplicando queste due proporzioni termine a termine, quindi formando il prodotto degli estremi e quello dei medj della proporzione resultante si otterrà sottraendo il fattore comune AD,

$$MA \,.\, NC \,.\, OB = MB \,.\, NA \,.\, OC \;.\,.\,.\,.\,.\; (a).$$

Questa è la proposizione enunciata, poichè i tre fattori di ciascun prodotto sono dei segmenti non contigui.

7. *Corollario* 1. Quando la trasversale diventa parallela ad uno dei lati del triangolo, dobbiamo considerare il punto dov' essa lo incontrasse come situato all' infinito; allora i segmenti che essa determinava sopra questo lato sono tutti due infinitamente grandi e per conseguenza uguali.

Supponiamo dunque che la trasversale sia parallela ad AB, ed avremo

$$MA = MB = \infty\,,$$

sottraendo questi fattori uguali dall' uguaglianza (*a*), viene

$$NC \,.\, OB = NA \,.\, OC\,,$$

ovvero

$$NA : NC :: OB : OC.$$

Così, in questo caso, i due punti di divisione N ed O determinano sopra i lati AC e CB dei segmenti proporzionali e ne resulta che *qualunque trasversale parallela alla base di un triangolo taglia i due altri lati, prolungati se è necessario, in segmenti proporzionali.*

8. *Corollario* 2. Se la trasversale passasse per il mezzo di uno dei lati, di BC, per esempio si avrebbe

$$OB = OC,$$

e l'uguaglianza (*a*) darebbe

$$MA : MB :: NA : NC.$$

Donde resulta ancora *che qualunque trasversale che passa per il mezzo della base di un triangolo taglia i lati in segmenti proporzionali.*

9. Proposizione II. *Se da un punto qualunque* D *preso sul piano di un triangolo* ABC (*Tav.* CCXLIV, *fig.* 2) *si conduca, sopra ciascuno dei lati, una trasversale che passi per il vertice dell'angolo opposto, otterremo sopra ciascun lato, prolungato se è necessario, due segmenti tali che il prodotto dei tre segmenti non contigui sia uguale al prodotto dei tre altri.*

In questo caso i segmenti sono, tanto che il punto D sia preso nell'interno del triangolo ovvero che sia preso al di fuori, MA ed MB per il lato AB; NA ed NC per il lato AC; OB ed OC per il lato BC. Ora, considerando, solamente il triangolo ABO come avente i suoi tre lati tagliati dalla trasversale CM, abbiamo in virtù della precedente proposizione

$$AM . OD . BC . = MB . AD . OC,$$

ugualmente, considerando solamente il triangolo ACO come avente i suoi tre lati tagliati dalla trasversale BN, abbiamo per la stessa ragione,

$$AD . NC . OB = AN . OD . BC .$$

Moltiplicando queste due uguaglianze termine a termine, e sottraendo i fattori comuni, si ottiene

$$MA . NC . OB = MB . NA . OC \ldots (b),$$

che è la proposizione enunciata.

10. *Corollario* 1. Se uno dei tre lati traversali, OD, per esempio, passa per il mezzo del lato opposto al vertice dell'angolo da cui essa parte, avremo

$$OB = OC$$

e l'uguaglianza (*b*), si ridurrà a

$$MA . NC = MB . NA,$$

ovvero, ciò che è la stessa cosa, alla proporzione

$$MA : MB :: NA : NC,$$

vale a dire, che in questo caso, le due altre trasversali determinano dei segmenti proporzionali sopra i lati che esse tagliano. Dunque se si conducesse una retta per i punti M ed N; questa retta sarebbe parallela a BC, poichè essa formerebbe un triangolo AMN il quale sarebbe simile al triangolo ABC (*Vedi* Triangolo), poichè questi due triangoli avrebbero un'angolo uguale compreso tra lati proporzionali.

Resulta da queste considerazioni la seguente proposizione: *la base di un triangolo essendo divisa in due parti uguali mediante una retta condotta dal vertice, se da un punto qualunque di questa retta si abbassa, sopra ciascuno degli altri lati, una trasversale che passi per il vertice dell' angolo opposto, i punti dove queste trasversali incontreranno i lati, o i loro prolungamenti, apparterranno od una retta parallela alla base.*

11. *Corollario* 2. Supponiamo che una delle trasversali, DC per esempio (*Tav.* XVII, *fig.* 4), sia parallela al lato AB opposto al vertice dell'angolo pel quale essa passa; i due segmenti MA ed MB diventeranno infinitamente grandi, ed avremo

$$MA = MB$$

il che cangerà l'uguaglianza (*b*), in

$$NC . OB = NA . OC,$$

donde

$$NA : NC :: OC : OB,$$

vale a dire, ancora, che i punti d'intersezione O ed N delle trasversali determinano sopra i lati AC e BC dei segmenti proporzionali. Dunque se da questi punti O ed N si fa passare una trasversale ON, essa dividerà il lato AB in due parti uguali (n.° 8); e, conseguentemente.

Se da un punto qualunque di un' altra retta parallela alla base d' un triangolo si abbasso sopro ciascun lato uno trasversale che passi per il vertice dell' angolo opposto i punti dove queste trasversali incontrano i lati o il loro prolungamento determinano una retta che divide la base in due parti uguali.

12. Le proposizioni I e II sono i fondamenti di tutta la geometria delle trasversali rettilinee, non solamente esse danno i mezzi di risolvere la maggior parte dei problemi geometrici con l' aiuto della sola riga senza impiegare gli archi di circolo, ma la loro applicazione all'agrimensura rende inutile, in un grandissimo numero di casi l'uso degli instrumenti per misurare gli angoli e non esige che quello delle biffe. Le seguenti questioni ci daranno degli esempii di queste diverse applicazioni.

Problema. 1. *Da un punto dato* M (Tav. CCXLIV, fig. 3) *condurre una parallela alla retta dato* BC.

Avendo preso a piacere sopra BC due parti uguali BO ed OC, si condurranno le rette CM e BM, e si prolungherà BM fino a tanto che essa incontri in un punto qualunque A la retta OA, condotta in un modo arbitrario per il punto O, mezzo di BC. Si uniranno i punti A e C con la retta AC, quindi dall' estremità B si farà passare una retta BN per il punto d'intersezione delle rette MC ed OA; il punto N dove questa retta incontra AC apparterrà alla parallela domandata, e il problema sarà risoluto conducendo MN.

Questa costruzione riposa sul primo corollario della seconda proposizione (n.° 10).

Problema 2. *Dividere una retta data* DC *in due parti uguali* (Tav. XVII, fig. 4). Avendo condotto una retta AB parallela a DC, si condurranno verso un punto qualunque O le rette DO e CO che taglino questa parallela in A e B. Quindi da questi punti e per i punti D e C si faranno passare le trasversali AC e BD; la linea ON, condotta dal punto d' intersezione delle trasversali al punto O, dividerà DC in due parti uguali. (*Corollario* 2. Prop II, n.° 11).

Problema 3. *Misurare sul terreno una linea inaccessibile* AM. (Tav. XLVI, fig. 10) Si prenderà sopra l' allineamento di AM un punto qualunque B, poi da un altro punto O preso arbitrariamente sul terreno, si farà passare dal punto B

una retta BO che si prolungherà arbitrariamente fino in C. Avendo inseguito segnato il punto N dove gli allineamenti MO ed AC si tagliano, si misurerà NA, NC, AB, OB ed OC, e la lunghezza di AM sarà data dall'espressione (*Prop.* 1, n. 8.)

$$MA . NC . OB = MB . NA . OC .$$

Infatti, a motivo di

$$MB = MA + AB,$$

quest' espressione dà

$$MA . NC . OB = MA . NA . OC + AB . NA . OC .$$

donde

$$MA = AB . \frac{NA . OC}{NC . OB - NA . OC}$$

PROBLEMA 4. *Prolungare sul terreno una linea retta* AB (Tav. XLVI, fig. 10) *al di là di un ostacolo, situato in* A, *il quale non permette di prendere un allineamento.*

Si sceglierà fuori di AB un punto C donde si possano scoprire i due punti A e B, quindi si segnerà sopra gli allineamenti CA e CB i punti N ed O, tali che la retta NO possa incontrare AB senza essere arrestata dall' ostacolo. Indicando con M il punto d'incontro che si tratta di determinare, e considerando AB come una trasversale che tagli i lati del triangolo NOC, avremo mediante la proposizione I

$$MN . AC . BO = MO . AN . BC$$

ovvero

$$MN . AC . BO = (MN + NO) . AN . BC$$

il che dà

$$MN = NO . \frac{AN . BC}{AC . BO - AN . BC} .$$

Avendo dunque misurato le cinque linee NO, AN, BC, AC, BO, e calcolato la lunghezza di MN, si prenderà, sopra l'allineamento di ON, questa lunghezza da N in M, e il punto M così determinato sarà sull' allineamento di AB. Un secondo punto dello stesso allineamento, determinato nella stessa maniera, permetterà dunque di prolungare AB al di là dell' ostacolo.

13. Dobbiamo limitarci a questi esempii d'applicazione i quali danno una sufficiente idea di tutto il partito che possiamo tirare dalle trasversali; ma siamo spiacenti di non poter indicare l'estrema facilità con la quale la considerazione *tecnica* di queste linee fa scoprire certe proprietà delle figure geometriche, le quali esigono considerazioni *teoriche* complicatissime. Ugualmente non possiamo occuparci in questo punto delle *trasversali curvilinee* per le quali si deve ricorrere all' opera del Carnot: *Geométrie de position* et *Essai sur la théorie des transversales.* Si debbono ai Signori Servois e Brianchon dell' applicazioni ingegnosissime delle trasversali rettilinee. I signori Chaslese Lamé si sono serviti delle trasversali per dimostrare le proprietà delle superficie del second' ordine; e si trova finalmente nel *Giornale della Scuola Politecnica* e negli *Annali delle Matematiche* un gran numero di questioni la soluzione delle quali attesta la fecondità e la semplicità dei processi tecnici che resultano dall' uso di queste linee.

(*Vedi* quest' opere e l' *Application de la théorie des transversales*, del signor Brianchon, come pure le *Solutions peu connues de différens problémes de géométrie pratique*, del signor Servois.)

TRASVERSO. Si chiama Asse trasverso, in *geometria*, l'asse principale di una sezione conica, quello che passa pel fuoco della curva. Nell' ellisse questo è il più grande dei diametri, nell' iperbola esso è il più piccolo. Nella parabola è come tutti gli altri diametri, indefinito in lunghezza.

TRAVERSA (*Fortif.*). Grosso muro che attraversa tutta la larghezza del fosso di una fortezza per trattenerne le acque. Le traverse si costruiscono ordinariamente di faccia agli angoli salienti dei bastioni e delle mezze lune: talvolta fanno l'ufficio di cateratte per mezzo di una valvola che si pratica nel loro mezzo all' oggetto di lasciare sgorgare o di trattenere le acque a seconda del bisogno.

Si fa uso delle traverse quando non essendo i fossi di una piazza allivellati, vi è dell' acqua in una parte di essi mentre l' altra parte è all' asciutto, e quando può disporsi di qualche ruscello o piccolo fiume per farlo entrare nel fosso: allora queste opere si costruiscono per impedire lo sbocco delle acque nelle parti più basse.

TRE. Regola del Tre. Operazione dell' Aritmetica che consiste a calcolare uno dei termini di una proporzione per mezzo dei tre altri.

La *regola del tre* si compone di una moltiplicazione e di una divisione; e non presenta altra difficoltà che quella di stabilire convenientemente la proporzione tra le quantità che si vogliono paragonare; mentre, una volta questa proporzione stabilita, se il termine cercato è un *medio*, si ottiene dividendo il prodotto degli estremi per il medio conosciuto, e, se questo è un estremo, dividendo il prodotto dei medj per l' estremo conosciuto. (*vedi* Proporzione).

Per stabilire una proporzione tra quattro quantità, dobbiamo osservare 1.° di comporre ciascun rapporto di quantità dalla stessa specie; 2.° di non uguagliare tra loro che due rapporti direttamente uguali, vale a dire, del quale uno non sia l' inverso dell' altro. Mediante quest' attenzione non è necessario occuparsi del posto che occupa il termine cercato nella proporzione, e tutte le considerazioni della *regola del tre diretta* e della *regola del tre inversa*, della quale gli autori dei trattati d' aritmetica complicano la questione, diventano completamente inutili.

Le due seguenti questioni c' indicheranno il metodo che si deve seguire in tutti i casi:

1. 30 *aune di stoffa sono costate franchi* 55 e 50 *centesimi, si domanda quanto costeranno* 55 *aune della stessa stoffa?*

Più stoffa vi è, più il prezzo dev' essere considerabile; così il numero dell' aune debbono essere in rapporto diretto del prezzo che esse costano. Indicando dunque con x il prezzo cercato, si dice: il rapporto di 30 aune a 55 aune è lo stesso di quello di 55 franchi e 50 centesimi, prezzo delle 30 aune ad x, prezzo di 55 aune; così ponendo la proporzione

$$30 : 55 :: 55{,}50 : x,$$

si tratta di calcolare un *estremo*. Si ha dunque

$$x = \frac{55 \times 55{,}50}{30},$$

cominciando dall' eseguire la moltiplicazione, quindi dividendo il prodotto per 30, si trova

$$x = 101^{fr.}, 75^{c}$$

55 aune costeranno perciò franchi 101 e 75 centesimi.

2. *Un dato lavoro è stato terminato in 5 giorni da 8 operanti, si domanda quanto tempo metteranno 11 operanti, lavorando nella stessa maniera, per terminare lo stesso lavoro?*

In questo caso, più operanti ci sono, meno tempo sarà necessario; così il rapporto del numero degli operanti, vale a dire quello dei numeri $8 : 11$ è l'inverso di quello dei giorni di lavoro o di quello dei numeri $5 : x$; bisogna dunque rovesciare quest'ultimo rapporto e scrivere la proporzione

$$8 : 11 :: x : 5;$$

si tratta allora di calcolare un medio, e si ha

$$x = \frac{5 \times 8}{11},$$

moltiplicando 5 per 8 e dividendo il prodotto 40 per 11, si trova

$$x = 3\frac{7}{11},$$

vale a dire che saranno necessari 3 giorni e circa 7 ore agli 11 operanti per eseguire l'opera che 8 operanti hanno terminato in 5 giorni.

Si riconosca che le cose paragonate sono in *rapporto diretto* quando l'accrescimento dell'une, determina l'accrescimento dell'altre; nel caso contrario, vale a dire quando l'accrescimento dell'une, porta la diminuzione dell'altre, il *rapporto* è *inverso*, e bisogna rovesciarlo, come l'abbiamo fatto per stabilire la proporzione.

Quando la soluzione di una questione esige il concorso di più proporzioni, le regola prende il nome di *regola del tre composto*; ciò non ostante, componendo i rapporti, possiamo sempre riportarla ad una regola del tre semplice. Questo è ciò che l'esempio seguente farà comprendere.

20 *Operanti lavorando 8 ore per giorno hanno scavato in 12 giorni un fosso di 200 metri cubi, si domanda quanti giorni metteranno per fare un fosso di 350 metri cubi, lavorando 10 ore per giorno.*

Analizzando questa questione, prima di tutto, si riconosce, che poichè il numero degli operanti non varia, esso non deve entrare nei rapporti e che possiamo considerare il lavoro come operato da un solo uomo. Così non cominciando dal considerare la differenza dell'ore di lavoro, e indicando con x il numero dei giorni che sarebbero necessari per scavare 350 metri cubi, si vede che questo numero dev'essere maggiore di 20, poichè più lavoro vi è da fare, più tempo è necessario, d'altra parte tutte le cose uguali: il rapporto tra i lavori è dunque direttamente uguale a quello dei tempi, nei quali possiamo eseguirli, e si ha la proporzione

$$200 : 350 :: 12 : x,$$

donde si ricava

$$x = \frac{12 \times 350}{200} = 21.$$

Dunque, se questi operanti lavorassero lo stesso numero di ore ciascun giorno, sarebbero loro necessari 21 giorni per scavare il fosso di 350 metri cubi; ma non sono più 8 ore ch'essi lavorano per giorno, come nel primo lavoro, ma 10 ore; è dunque evidente che, poichè essi lavorano più tempo ciascun giorno,

saranno loro necessari meno giorni. Così, indicando con y il numero dei giorni in quest' ultima condizione, questo numero deve stare a 21 nel rapporto inverso dei numeri di ore 8 : 10; vale a dire che si ha la seconda proporzione

$$8 : 10 :: y : 21,$$

donde si ricava

$$y = \frac{8 \times 21}{10} = 16\frac{8}{10},$$

così il numero dei giorni cercato è 16 e $\frac{8}{10}$.

Esaminiamo ora come, componendo i rapporti, ci sarebbamo potuti dispensare dal risolvere due proporzioni. Lavorare 8 ore per giorno in 12 giorni, equivale allo stesso che lavorare 12 volte 8 ore, ossia 96 ore; ugualmente lavorare 10 ore per giorno per x giorni; equivale a lavorare per x volte 10 ore ovvero $10x$ ore: i tempi dei lavori sono dunque 96 e $10x$; e, siccome questi tempi sono in rapporto diretto dei lavori, si ha la proporzione

$$200 : 350 :: 96 : 10x,$$

dalla quale possiamo ricavare il valore dell' *estremo* $10x$, e il quale dà

$$10x = \frac{350 \times 96}{200} = 168;$$

ma poichè si conosce il valore di $10x$, dividendolo per 10 si avrà quello di x; così

$$x = \frac{168}{10} = 16\frac{8}{10}$$

come quì sopra.

Non vi è alcuna regola del tre composta che non si possa riportare nella stessa maniera ad una regola del tre semplice.

TRESPOLO DELLO SCULTORE (*Astron.*). *Vedi* APPARATO DELLO SCULTORE.

TREW (ABDIA), matematico, nato in Ansbach al 29 Luglio 1597, fu professore di fisica nell' università di Altdorf, ove eresse nel 1657 un osservatorio, il primo che si fosse veduto in quei paesi. Purgò l' astronomia da tutti gli errori astrologici. I protestanti non avendo voluto ammettere il calendario gregoriano, corresse quello che si ostinavano a conservare. Nella teoria della musica fece importanti scoperte. Morì in Altdorf il 12 Marzo 1669. Ha pubblicato: I *Compendium fortificatorum*, Norimberga, 1641, in-12; II *Sull' agrimensura* (in tedesco), ivi, 1641; ivi, 2.ª ediz., 1668, in-8; III *Directorium mathematicum, quo tota mathesis et omnes ejus partes, nominatim arithmetica, geometria, astronomia, geographia, optica, harmonia, mechanica, methodice disci possunt*, ivi, 1657, in-4; IV *Summa geometriae practicae, additis annotationibus et additionibus arithmeticis, trigonometricis, graphicis*, ivi, 1663, in-8; V *Teoria del calendario* (in tedesco), Luneburgo, 1666, in-4.

TRIANGOLARE. Si dice adiettivamente di tutto ciò che ha rapporto ai triangoli. Si chiamano *numeri triangolari* una specie di numeri *poligoni* l' unità dei quali possono disporsi in forma di triangolo (*Vedi* POLIGONI).

TRIANGOLO (*Geom.*). Figura limitata da tre rette o lati, i quali si tagliano due a due.

Se i tre lati del triangolo sono linee rette, si chiama *triangolo rettilineo*, se

esse sono linee curve, *triangolo curvilineo*; e finalmente *triangolo mistilineo*, se gli uni sono linee rette e gli altri linee curve.

I triangoli formati sopra la superficie della sfera mediante l'intersezione di tre dei suoi circoli, prendono il nome di *triangoli sferici*.

La teoria dei triangoli rettilinei essendo una delle parti le più importanti della geometria, in questo punto la presenteremo nel suo complesso.

1. I triangoli, come tutte le altre figure geometriche, debbono considerarsi sotto il rapporto della loro costruzione o della loro *generazione*, e sotto quello della loro relazione reciproca o del loro *paragone*. Il triangolo rettilineo, in generale, è un'estensione piana terminata o circoscritta da tre rette che si tagliano due a due. Queste tre rette si chiamano i *lati del triangolo* e siccome due rette che si tagliano formano un angolo ne resulta che un triangolo ha tre angoli; è da questa circostanza che si deduce il suo nome.

In qualunque triangolo vi sono dunque sei cose distinte: tre lati e tre angoli; e la differenza che esiste tra un triangolo e un altro triangolo non può resultare che dalla differenza dei loro lati o dei loro angoli. I diversi rapporti che possano avere respettivamente ancora tra loro i lati e gli angoli di uno stesso triangolo determinano la sua natura. Secondo questi diversi rapporti i triangoli ricevono particolari denominazioni. Così quando i tre lati di un triangolo sono uguali, si chiama *triangolo equilatero*; quando due solamente dei suoi lati sono uguali, si chiama *triangolo isoscele*; e se i suoi tre lati sono disuguali, esso riceve il nome di *triangolo scaleno*. Tale è la classazione dei triangoli considerata rapporto ai loro lati.

Per rapporto ai loro angoli, si chiama *triangolo rettangolo* quello in cui uno degli angoli è retto; *triangolo ottusiangolo*; quello in cui uno degli angoli è ottuso, e *triangolo acuziangolo* quello in cui i tre angoli sono acuti.

2. Si chiama indifferentemente *vertice* di un triangolo il vertice di uno qualunque dei suoi angoli; e allora il lato opposto a quest'angolo prende il nome di *base*. La distanza dal vertice alla base si chiama l'*altezza* del triangolo. Siccome generalmente la distanza da un punto ad una retta si misura mediante la perpendicolare abbassata da questo punto sopra questa retta, si dicè ancora che l'*altezza* di un triangolo è la perpendicolare abbassata dal vertice sopra la base. Si prende ordinariamente per *base* di un triangolo isoscele il lato disuguale ai due altri.

3. La somma di due lati di un triangolo è sempre maggiore del terzo lato. Questa proprietà è evidente e resulta dalla nozione primitiva, la linea retta è il più corto cammino tra due punti.

I tre lati di un triangolo non hanno altra relazione generale che quella di essere soggetti a questa condizione. La loro somma può essere una quantità qualunque variabile all'infinito, e sopra una stessa retta si possano costruire un'infinità di triangoli differenti i due altri lati dei quali non hanno tra essi verun rapporto necessario di grandezza. Non segue lo stesso dei tre angoli; la loro somma è una quantità costante sempre uguale alla somma di due angoli retti.

4. L'uguaglianza della somma dei tre angoli di qualunque triangolo a due angoli retti è una proposizione fondamentale della quale in questo punto non dobbiamo esporre che le conseguenze, avendola dimostrata in altra parte (*vedi* Angolo). Ne resulta, 1.° che un triangolo non può avere che un solo angolo retto e a più forte ragione che un solo angolo ottuso; 2.° Che i tre angoli di un triangolo sono conosciuti quando se ne conoscano due solamente, poichè basta, per ottenere il terzo, di sottrarre la somma dei due angoli conosciuti da quella di due angoli retti; 3.° che in un triangolo rettangolo la somma dei due angoli acuti è uguale ad un retto. Basta dunque ancora conoscere uno di questi angoli

perchè l' altro sia immediatamente conosciuto; 4.° Finalmente, che quando due angoli di un triangolo sono respettivamente uguali a due angoli di un altro triangolo, i terzi angoli sono uguali.

5. Le proprietà le più importanti che resultano dalla costruzione stessa dei differenti triangoli e costituiscono la loro *natura* fanno l' oggetto dei seguenti teoremi.

Teorema I.

6. *In un triangolo isoscele gli angoli opposti ai lati uguali ovvero, come si dice, gli angoli alla base sono uguali.*

Sia BAC (*Tav.* CCXXII, *fig.* 2) un triangolo isoscele i cui lati sono AB ed AC. Se con AB come raggio si descrive un circolo, questo circolo passerà necessariamente per l' estremità C del lato AC, dimodochè il lato BC diventerà una corda. Premesso ciò, conduciamo il raggio AD che divida l' arco BDC in due parti uguali, e concepiamo il circolo ripiegato in due sopra se stesso seguendo la retta AD; l' arco DC si confonderà allora con l' arco AD, e siccome questi archi sono uguali, il punto C cadrà sul punto B. Così, non solamente MC coinciderà con MB, ma ancora AC con AB, poichè l' estremità di queste diverse rette si confondano, dunque l' angolo ACM è uguale all' angolo ABM. Dunque gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali. La reciproca di questa proposizione si dimostra senza difficoltà.

7. Resultano da questa dimostrazione diverse conseguenze importanti che dobbiamo indicare, 1.° Poichè i due triangoli AMC ed AMB si confondano, gli angoli al punto M, vale a dire, gli angoli AMB ed AMC sono uguali; così questi angoli sono retti (*Vedi* Angolo.) 2.° Gli angoli BAM ed MAC sono uguali. 3.° Finalmente BM è uguale ad MC. Dunque *la retta che divide in due parti uguali l' angolo al vertice di un triangolo isoscele è perpendicolare alla sua base, e divide inoltre questa base in due parti uguali.*

8. Una conseguenza diretta del precedente teorema, è che *i tre angoli di un triangolo equilatero sono uguali.* Infatti due qualunque degli angoli di un tal triangolo sono uguali tra loro, poichè essi sono opposti a lati uguali; così i tre angoli sono uguali.

Teorema II

9. *Quando in un triangolo due angoli sono disuguali, il maggiore dei due è opposto al più gran lato, e reciprocamente.*

Si abbia nel triangolo ABC (Tav. CCXLIV, fig. 4) l'angolo BCA maggiore dell'angolo BAC, il lato AB sarà maggiore del lato BC. Infatti, l' angolo BCA essendo maggiore dell' angolo BAC, possiamo supporre una retta CD condotta in modo da fare col lato AC un angolo DCA uguale all'angolo BAC. Allora il triangolo ADC avendo due angoli uguali sarà isoscele (n.° 6) e i lati AD e CD saranno uguali; ma si ha

$$CD + DB > BC$$

e, per conseguenza, poichè

$$CD = AD,$$

si ha

$$AD + DB > BC;$$

dunque AD più DB ovvero AB è maggiore di BC.

La reciproca diviene evidente.

10. Ciò che precede è sufficiente per permetterci d' intraprendere il *parogone teorico* dei triangoli. Ora questo paragone può effettuarsi sotto tre differenti condizioni. 1.° I triangoli paragonati son tali che l' estensione della superficie essendo la stessa, il rapporto dei loro limiti sia ancora lo stesso; 2.° ovvero, l' estensione della superficie essendo ancora la stessa, il rapporto dei limiti sia differente; e 3.° finalmente, l' estensione della superficie essendo differente il rapporto dei limiti sia lo stesso. Nel primo caso, i triangoli diconsi *coincidenti*; nel secondo *equivalenti*, e nel terzo *simili*. La *coincidenza*, l' *equivalenza* e la *similitudine* formano in generale le tre parti del *paragone geometrico*.

11. Coincidenza. Due triangoli possano coincidere o sono uguali quando tre delle sei parti che gli costituiscono, e al numero delle quali deve trovarsi almeno un lato, sono uguali tra loro. Questa proposizione generale della coincidenza dei triangoli somministra i seguenti teoremi:

Teorema III.

12. *Due triangoli che hanno un angolo uguale compreso tra due lati respettivamente uguali, sono uguali in tutte le loro parti.*

Siano ABC ed *abc* (Tav. XXII, fig. 12) due triangoli nei quali l' angolo A è uguale all' angolo *a*, il lato AB uguale al lato *ab* e il lato AC uguale al lato *ac*. Questi due triangoli possano coincidere.

Poichè se immaginiamo il triangolo *abc* trasportato sul triangolo ABC in modo che l' angolo *a* si confonda con l' angolo A, allora il lato *ab* prenderà la direziona del lato AB, e siccome questi lati sono uguali il punto *b* cadrà sul punto B. Ugualmente, il lato *ac* prenderà la direzione del lato AC e, a motivo dell' uguaglianza di questi lati, il punto *c* cadrà sul ponto C. Ma poichè le estremità del lato *bc* si trovano mediante ciò confuse con quelle del lato BC, questi lati essi stessi non possano che coincidere, e ne resulta che i due triangoli coincidono in tutte le loro parti. Dunque questi due triangoli sono uguali e gli angoli B e *b*, C e c come pure i lati BC e *bc* sono respettivamente uguali tra loro.

Teorema IV.

13. *Due triangoli che hanno un lato uguale adiacente a due angoli respettivamente uguali sono uguali.*

Siano BC e *bc* (Tav. XXII, fig. 12) i lati uguali e B e *b*, C e *c* gli angoli uguali. Se si trasporta il triangolo *abc* sul triangolo ABC in modo che il lato *bc* si confonda col suo uguale BC, è evidente che, poichè l' angolo *b* è uguale all' angolo B, il lato *ba* prenderà la direzione del lato BA e che il punto *a* dovrà cadere in qualche parte sopra questa direzione. Ugualmente l' angolo *c* essendo uguale all' angolo C il lato *ca* prenderà la direzione del lato CA, e il punto *a* dovrà ugualmente cadere in qualche parte sopra le direzione di CA. Ma questo punto *a* dovendo cadere nello stesso tempo sopra i due lati BA e CA non può cadere che nel punto A che è loro comune; così i due triangoli coincidono esattatamente e sono uguali in tutte le loro parti.

Teorema V.

14. *Due triangoli che hanno i loro tre lati uguali respettivamente sono uguali.*

Siano i triangoli ABC, *abc* (Tav. XXII, fig. 12) i tre lati dei quali sono respettivamente uguali, cioè: AB $=$ *ab*, AC $=$ *ac*, Bc $=$ *bc*.

Trasportiamo il triangolo ABC, (*Tav.* XXII, *fig.* 8) in modo che i due lati uguali bc e BC coincidano e che gli altri lati uguali AB ed ab, AC ed ac siano adiacenti. Il punto a cadrà in qualche parte b' e il triangolo abc prenderà la posizione b'BC. Se uniamo i punti A e b' con la retta Ab', i triangoli ABb' ed ACb' saranno l'uno e l'altro isosceli, poichè per ipotesi AB $=$ Bb' e AC $=$ Cb'. Dunque gli angoli alla base di questi triangoli sono respettivamente uguali, vale a dire,

$$\text{angolo } BAb' = \text{angolo } Bb'A$$
$$\text{angolo } CAb' = \text{angolo } Cb'A,$$

ma i due angoli BAb' e CAb' che compongono l'angolo A essendo uguali ai due angoli Bb'A e Cb'A che compongono l'angolo b', questi angoli A ed b' essi stessi sono uguali, ovvero, ciò che è la stessa cosa, gli angoli A e a dei triangoli ABC ed abc sono uguali. Dunque, in virtù del teorema del n.° 12, i due triangoli ABC ed abc sono uguali.

Teorema VI.

15. *Due triangoli rettangoli che hanno l'ipotenusa e uno degli angoli adiacenti respettivamente uguali sono uguali.*

La somma dei tre angoli di qualunque triangolo essendo equivalente a quella di due angoli retti (*vedi* Angolo), due triangoli rettangoli non possono avere due dei loro angoli acuti uguali senza che i due altri lo siano ancora. Possiamo dunque considerare i triangoli proposti come aventi un lato uguale adiacente a due angoli respettivamente uguali; così la proposizione enunciata si trova dimostrata dal teorema del n.° 13.

Teorema VII.

16. *Due triangoli rettangoli che hanno due lati respettivamente uguali sono uguali.*

Dobbiamo solamente esaminare il caso in cui i lati uguali respettivamente sono l'ipotenusa e uno dei lati dell'angolo retto, poichè quando questi lati uguali sono quelli dell'angolo retto l'uguaglianza dei triangoli resulta dal teorema del n.° 12. Siano dunque ABC ed abc (*Tav.* XXII, *fig.* 11) due triangoli nei quali l'ipotenuse BC e bc sono uguali, come pure i lati AC ed ac.

Dal punto O mezzo dell'ipotenusa BC, descriviamo con CO per raggio una semi-circonferenza di circolo CMAB; questa semi-circonferenza passerà per il punto A poichè l'angolo CAB è retto (*vedi* Angolo). Ugualmente dal punto o mezzo di cb con oc per raggio descriviamo una semi-circonferenza che passerà per il punto a. Ora, queste due semi-circonferenze sono uguali poichè esse hanno diametri uguali; così gli archi CMA, cma sottesi da corde uguali AC, ac, sono uguali (*vedi* Circolo), ma gli angoli CBA e cba hanno per misure le metà di questi archi (*vedi* Angolo); dunque questi angoli sono uguali.

I terzi angoli C e c dei triangoli proposti sono dunque ancora uguali, e possiamo semplicemente considerare questi triangoli come aventi un angolo uguale compreso tra due lati respettivamente uguali, donde resulta la loro intera uguaglianza mediante il teorema del n.° 12.

Teorema VIII.

17. *Due triangoli che hanno due lati e l'angolo opposto ad uno di essi re-*

spettivamente uguoli sono uguali, *se l' angolo opposto all' altro lato è della stessa natura nei due triangoli.*

Siano ABC ed *abc* due triangoli (*Tav.* XXII, *fig.* 16) nei quali i lati AC ed *ac*, CB e *cb* sono uguali come pure gli angoli A ed *a* opposti ai lati CB e *cb*. Questi triangoli saranno uguali se gli angoli B e *b* opposti ai lati AC ed *ac*, sono della stessa natura, vale a dire se essi sono tutti due acuti o tutti due ottusi.

Poichè, abbassando dai punti C e *c* sopra i lati AB ed *ab*, prolungati se è necessario, le perpendicolari CD e *cd*, si formeranno due triangoli rettangoli CDA e *cda* i quali sono uguali (n.° 15), per avere le loro ipotenuse AC, *ac* uguali come pure tutti i loro angoli; l' angolo acuto A essendo uguale all' angolo *a*, l' altro angolo acuto ACD è uguale all' angolo *acd* (n.° 4).

È facile vedere che i due triangoli rettangoli CBD, *cbd* sono ancora uguali (n.° 16), poichè essi hanno le loro ipotenuse CB *e cb* uguali per ipotesi, e di più i loro lati CD e *cd* sono uguali, come appartenenti ai triangoli uguali CDA, *cda*.

Ma, il triangolo *abc* è formato dalla somma dei due triangoli rettangoli *acd*, *cdb*, se l' angolo *b* è acuto, e dalla loro differenza, se l' angolo *b* è ottuso, e il triangolo ABC è ugualmente formato dalla somma dei due triangoli rettangoli ACD, CDB, se l' angolo B è acuto, e dalla loro differenza se quest' angolo è ottuso. Dunque quando questi angoli B e *b* sono tutti due acuti o tutti due ottusi, i triangoli ABC, *abc* essendo la somma o le differenza di triangoli uguali, sono uguali.

18. Equivalenza. Due triangoli, e, in generale due poligoni qualunque sono *equivalenti*, quando l' estensione della loro superficie o la loro *area* è la stessa, quantunque la relazione dei loro limiti sia differente. In questo caso, le due figure trasportate l' una sopra l' altra non possano più coincidere, e bisogna aver ricorso ad altri processi di ragionamento per poter dimostrare l' uguaglianza delle superficie. Ora, abbiamo stabilito (*vedi* Area) che:

1.° *La superficie di un triangolo è equivalente alla metà di quella di un rettangolo dello stessa base e della stesso altezza.*

2.° *L' area di un rettangolo è roppresentata dal prodotto dello sua bose per la sua altezza.*

Le conseguenze di queste due proposizioni danno luogo ai seguenti teoremi, che oi contenteremo di enunciare.

Teorema IX.

19. *Due triangoli dello medesima base e della medesima altezza sono equivolenti.*

Teorema X.

20. *L' areo di un triangolo è uguole olla metà del prodotto della sua base per la suo altezza.*

Teorema XI.

21. *Due triangoli dello medesima base stanno tra essi come le loro altezze.*

Teorema XII.

22. *Due triangoli dello medesima oltezzo stanno tra essi come le loro basi.*

Teorema XIII.

23. *Due triangoli qualunque stanno tra essi come i prodotti delle loro basi e delle loro altezze.*

24. Questi teoremi formano la base di tutta l'*equivalenza* dei triangoli dai quali possano dedursi con facilità le diverse proposizioni. Così, per esempio, si dimostra che *il quadrato costruito sopra l'ipotenusa di un triangolo rettangolo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sopra i due altri lati*, con l'aiuto dell'equivalenza che esiste tra il triangolo e la metà del rettangolo della medesima base e della medesima altezza. Siccome dimostreremo in seguito, in un altro modo, questa celebre proprietà del triangolo rettangolo e siccome d'altronde ci è impossibile di riportare in particolare tutte quelle dei triangoli, termineremo questa parte del *paragone geometrico* mediante l'esposizione del seguente teorema, essenziale per quello che segue.

Teorema XIV

25. *Due triangoli che hanno un angolo uguale da una parte e dall'altra stanno tra essi come i prodotti dei lati che formano questi angoli.*

Siano ABC ed *abc* (Tav. CCXXII, fig. 3) due triangoli i cui angoli B ed *b* sono uguali. Prendiamo sul lato AB una parte Ba' uguale a *ba* e sul lato BC una parte Bb' uguale a *bc*, e conduciamo la retta $a'b'$. Il triangolo $Ba'b'$ sarà uguale al triangolo *abc*, poichè questi due triangoli hanno un angolo uguale compreso tra due lati respettivamente uguali (n.° 12). Premesso ciò conduciamo la retta Ab' e osserviamo che i due triangoli $Ba'b'$ e BAb' avendo la medesima altezza stanno tra essi come le loro basi (n.° 22), il che dà,

$$ABb' : Ba'b' :: AB : a'B ;$$

ma i due triangoli BAC e ABb' hanno ancora la medesima altezza, e danno per la stessa ragione

$$BAC : ABb' :: BC : Bb'.$$

Dunque moltiplicando queste due proporzioni termine a termine, si ottiene

$$BAC \times ABb' : ABb' \times Ba'b' :: AB \times BC : a'B \times Bb'.$$

Così, togliendo dal primo rapporto il fattore comune ABb', e invece di $Ba'b'$ sostituendo il suo uguale *bac*, e invece di $a'B \times Bb'$ ponendo $ab \times bc$, viene

$$BAC : bac :: AB \times Bc : ab \times bc ,$$

che è la proposizione enunciata.

26. Similitudine. Si chiamano *triangoli simili* quelli che hanno i loro tre angoli respettivamente uguali, *e* i cui lati omologhi sono proporzionali. Per lati omologhi s'intende i lati opposti ad angoli uguali. Le proposizioni principali della similitudine dei triangoli sono le seguenti:

Teorema XV

27. *Due triangoli che hanno i loro tre angoli respettivamente uguali sono simili.*

Siano ABC, *abc* (Tav. CCXXII, fig. 1) due triangoli nei quali l'angolo A

è uguale all'angolo a, l'angolo B uguale all'angolo b e l'angolo C uguale all'angolo c. Questi triangoli hanno i loro lati omologhi proporzionali, e sono per conseguenza simili.

Infatti, poichè gli angoli A ed a sono uguali, i triangolo ABC, abc stanno tra loro come i prodotti dei lati che formano questi angoli (n.° 25), e si ha

$$ABC : abc :: AB \times AC : ab \times ac;$$

ma si ha ancora, a motivo dell'uguaglianza degli angoli B e b,

$$ABC : abc :: AB \times BC : ab \times bc,$$

e, a motivo di quella degli angoli C e c,

$$ABC : abc :: AC \times BC : ac \times bc.$$

I primi rapporti essendo i medesimi in queste tre proporzioni, se ne concluderà successivamente

$$AB \times AC : ab \times ac :: AB \times BC : ab \times bc$$
$$AB \times BC :: ab \times bc :: AC \times BC : ac \times bc.$$

Dividendo gli antecedenti della prima proporzione per AB, e i conseguenti per ab; poi gli antecedenti della seconda proporzione per BC e i conseguenti per bc, avremo

$$AC : ac :: BC : bc$$
$$AB : ab :: AC : ac$$

vale a dire, il seguito dei rapporti uguali

$$AB : ab :: AC : ac :: BC : bc.$$

Dunque i lati omologhi dei triangoli ABC ed abc sono proporzionali, e questi triangoli sono per conseguenza simili.

28. Corollario I. *Due triangoli che hanno i loro lati respettivamente paralleli sono simili.*

Poichè, siano i due triangoli (*Tav.* CCXXII, *fig.* 4) ABC, abc i cui lati AB e ab, AC ed ac, BC e bc sono paralleli, gli angoli A ed a, B e b, C e c essendo formati da lati paralleli, è facile vedere, prolungando i lati come sono nella figura, che questi angoli sono respettivamente uguali. Infatti i due angoli A ed a sono ciascuno uguale all'angolo bno come corrispondenti (*Vedi* Angolo), e i due angoli C e c sono ciascuno uguale all'angolo a per la stessa ragione. Dunque $A = a$, $C = c$ e per conseguenza (n.° 4) $B = b$.

29. Corollario II. *Due triangoli che hanno i lora lati respettivamente perpendicolari sono simili.*

Siano ABC (*Tav.* CCXXIII, *fig.* 4) ed abc due triangoli i cui lati AB ed ab, BC e bc, AC ed ac sono respettivamente perpendicolari, gli angoli di questi triangoli sono respettivamente uguali. Poichè, conducendo dal punto B la perpendicolare Bm al lato BC e la perpendicolare Bn al lato AB, queste perpendicolari saranno parallele ai lati ab e bc del triangolo abc, poichè questi lati sono essi stessi perpendicolari a BC ed AB. L'angolo nBm sarà dunque uguale all'angolo b. Ma i due angoli ABn, CBm sono uguali come retti, e se da ciascuno di essi si sottrae l'angolo comune CBn, rimangono i due angoli uguali ABC ed nBm; dunque l'angolo ABC è uguale all'angolo b.

Conducendo ugualmente al punto A le rette Ap ed AO, la prima perpendicolare sopra AC e la seconda sopra AB, queste rette saranno parallele ai lati ac ed ab del triangolo abc. e l'angolo OAp che esse formano sarà uguale all'angolo o, Ma se dai due angoli retti OAB, pAc si sottrae l'angolo comune pAB; rimangono i due angoli uguali OAp, BAC; dunque l'angolo a è uguale all'angolo BAC. Dunque i tre angoli del triangolo abc sono respettivamente uguali ai tre angoli del triangolo ABC.

30. Si deve osservare che nei triangoli i cui lati sono respettivamente paralleli o perpendicolari, gli angoli uguali sono formati da due lati respettivamente paralleli o perpendicolari.

31. Corollario III. *Due triangoli isosceli che hanno gli angoli al vertice respettivamente uguali sono simili.*

Infatti, la somma degli angoli alla base essendo la stessa in questi due triangoli, questi angoli sono respettivamente uguali, poichè ciascuno di essi è la metà di questa somma (n.° 6). Dunque due triangoli tali hanno i tre angoli respettivamente uguali.

32. Lemma. *Se in un triangolo qualunque si conduce una parallela ad uno dei lati, essa dividerà i due altri lati in parti proporzionali, e di più il suo rapporto col lato parallelo sarà lo stesso di quello di una qualunque delle parti opposte col lato corrispondente.*

Sia il triangolo ABC (*Tav.* CCXXII, *fig.* 1); se si conduce la retta de parallela al lato AC, si formerà il triangolo Bde simile al proposto, poichè questi due triangoli hanno i loro tre angoli respettivamente uguali, cioè: l'angolo B comune e gli angoli A e Bde, C e deB uguali come corrispondenti. Abbiamo dunque (n.° 27)

$$AC : de :: BC : Be :: AB : Bd,$$

il che è la seconda parte della proposizione.

Non considerando che i due ultimi rapporti

$$AB : Bd :: BC : Be$$

si ha, *dividendo* (*Vedi* Proporzione, n.° 10)

$$AB - Bd : Bd :: BC - Be : Be,$$

ovvero

$$Ad : Bd :: Ce : Be$$

questa è la prima parte della proposizione.

Si dimostra la reciproca di questo lemma mediante una riduzione all'assurdo, cioè: « quando una retta taglia due lati di un triangolo in parti proporzionali essa è parallela al terzo lato. »

Teorema XVI.

33. *Due triangoli che hanno un angolo uguale da una parte e dall'altra compreso tra lati respettivamente proporzionali, sono simili*

Siano ABC ed abc (Tav, CCXXII, fig. 1), due triangoli nei quali gli angoli B e b sono uguali e i lati AB e BC, che formano l'angolo B, proporzionali ai lati ab e bc che formano l'angolo b. Prendendo sopra AB una parte Bd uguale ad ab e sopra BC una parte Be uguale a bc e conducendo la retta de, il triangolo Bde sarà uguale al triangolo abc (n.° 12), poichè per costruzione questi due triangoli hanno un angolo uguale compreso tra due lati respettivamente uguali

Ma si ha per ipotesi

$$AB : ab :: BC : bc;$$

dunque si ha ancora

$$AB : Bd :: BC : be$$

e, per conseguenza (n.° 32), la retta de è parallela ad AC. Così il triangolo Bde, o il suo uguale abc, è simile ad ABC.

TEOREMA XVII.

34. *Due triangoli che hanno i loro tre lati proporzionali sono simili.*
Siano ABC, abc (Tav. CCXXII, fig. 1) due triangoli nei quali si abbia

$$AB : ab :: AC : ac :: BC : bc,$$

prendendo sopra AB, Bd=ab e sopra BC, Be=bc, e conducendo de, i due triangoli ABC e Bde saranno simili, poichè essi hanno l'angolo C comune e perchè i lati Bd e Be i quali formano quest'angolo, nel triangolo Bde, sono, per costruzione, proporzionali ai lati AB e BC che lo formano nel triangolo ABC. Si ha dunque

$$AC : de :: AB : Bd$$

ovvero, siccome Bd=ab,

$$AC : de :: AB : ab.$$

Ora, per ipotesi,

$$AC : ac :: AB : ab.$$

Così, paragonando questa proporzione alla precedente,

$$de = ac.$$

I due triangoli abc e Bde hanno dunque i loro tre lati respettivamente uguali e sono per conseguenza uguali (n. 14); ma il triangolo Bde è simile al triangolo ABC, dunque ancora il triangolo abc è simile ad ABC.

35. Tra tutte le proposizioni che derivano da questi teoremi fondamentali, dimostreremo ancora le seguenti delle quali abbiamo fatto molte volte uso nel corso di questo dizionario.

TEOREMA XVIII.

In un triangolo rettangolo, se dal vertice dell'angolo retto si abbassa una perpendicolare sull'ipotenusa, questa perpendicolare dividerà il triangolo in due altri i quali saranno simili ad esso.

Sia il triangolo ABC rettangolo in B (*Tav.* CCXXIII, *fig.* 3), abbassiamo dal vertice dell'angolo retto la perpendicolare BD sopra l'ipotenusa AC, formeremo due triangoli ugualmente rettangoli, ABD, BDC, i quali saranno simili tra essi e al proposto ABC.

Infatti, i due triangoli ABC ed ABD essendo tutti due rettangoli, l'uno in B e l'altro in D, e avendo l'angolo A comune, hanno i loro tre angoli respettivamente uguali (n.° 4), e sono per conseguenza simili (n.° 27).

I due triangoli ABC e BDC, ugualmente tutti due rettangoli, l'uno in B e

l' altro in D, e aventi l' angolo C comune, hanno i loro tre angoli respettivamente uguali. Questi triangoli sono dunque simili.

Finalmente i triangoli ABD e BDC essendo ciascuno simili al triangolo ABC sono simili tra essi.

36. Il paragone dei lati omologhi di questi tre triangoli conduce a conseguenze importantissime. Si ha evidentemente

1.° Per i triangoli ABC, ABD,

$$AC : AB :: AB : AD.$$

2.° Per i triangoli ABC, BDC,

$$AC : BC :: BC : DC.$$

3.° Per i triangoli ABD, BDC,

$$AD : BD :: BD : DC.$$

Le due prime proporzioni cominciano da insegnarci che nel triangolo ABC « ciascun lato dell' angolo retto è medio proporzionale tra l' ipotenusa e il segmento adiacente. » Resulta dall' ultima che « la perpendicolare abbassata sull' ipotenusa è media proporzionale tra i due segmenti che essa determina ».

37. Le proporzioni (1) e (2) danno

$$\overline{AB}^2 = AC \times AD,$$

$$\overline{BC}^2 = AC \times DC.$$

Se si aggiungono quest' uguaglianze, viene

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = AC \times AD + AC \times \text{in } DC$$

$$= AC(AD + DC)$$

ovvero

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2,$$

vale a dire che « il quadrato dell' ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati dei due altri lati ». Questo è il celebre teorema di Pitagora, che si dimostra mediante costruzioni geometriche, nell' *equivalenza* delle figure.

38. Non solamente nel triangolo rettangolo esiste una relazione determinata tra i quadrati dei lati, ma ancora in tutti i triangoli, solamente questa relazione differisce secondo la natura dei triangoli. Consideriamo, per esempio, il triangolo ACB (*Tav.* XXII, *fig.* 16), ottuso in B, e sulla base AB del quale, sufficientemente prolungata, si è abbassata la perpendicolare CD; questa perpendicolare determina due triangoli rettangoli ACD, BCD, le cui ipotenuse sono AC e CB, e, mediante ciò che precede, si ha

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2,$$

$$\overline{CD}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{BD}^2,$$

sostituendo nella prima uguaglianza il valore di $\overline{CD}^2$ dato dalla seconda, viene

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CB}^2 - \overline{BD}^2,$$

ma

$$AD = AB + BD,$$

e per conseguenza

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + 2AB \times BD,$$

sostituendo di nuovo questo valore di $\overline{AD}^2$ in quello di $\overline{AC}^2$, si ottiene

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 + 2AB \times BD,$$

vale a dire che « il quadrato di un lato opposto ad un angolo ottuso è equivalente alla somma dei quadrati dei due altri lati e del doppio del rettangolo formato tra uno di questi lati e il segmento determinato sul suo prolungamento dalla perpendicolare abbassata dall' estremità dell' altro ».

Se invece di considerare il triangolo ACB ottuso in B, si fosse considerato il triangolo ACB acuto in B, e nel quale la perpendicolare CD taglia il lato AB in due segmenti interni AD, DB, si sarebbe avuto

$$AD = AB - BD,$$

e per conseguenza

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 - 2AB \times BD,$$

vale a dire che « il quadrato di un lato opposto ad un angolo acuto è equivalente alla somma dei quadrati dei due altri lati diminuita del doppio del rettangolo formato tra uno di quest' ultimi lati e il suo segmento adiacente all' angolo acuto ». Il qual segmento è sempre determinato dalla perpendicolare abbassata dall' estremità dell' altro di questi lati.

Così in qualunque triangolo il quadrato di un lato è più grande, uguale o più piccolo della somma dei quadrati dei due altri lati secondo che l' angolo opposto è ottuso, retto o acuto.

I triangoli rettilinei sono i soli dei quali ci si occupa nella geometria elementare. In altra parte esamineremo i triangoli sferici. (*Vedi* Trigonometria).

TRIANGOLO ARITMETICO. Si dà questo nome alla disposizione in forma di triangolo dei numeri figurati dei diversi ordini. (*Vedi* Figurato). Il Pascal ha fatto un trattato sulle proprietà, presentemente insignificanti, del *Triangolo Aritmetico*.

TRIANGOLO BOREALE (*Astron.*). Costellazione situata al di sopra dell' Ariete e rammentata dagli scrittori coi diversi nomi di *Triangulus*, *Trigonus*, *Triquetrum*, *Tricuspis*, *Nili donum*, *Aegyptus*, *Trinacria*, *Orbis terrarum tripartitus*. Pare che non altro che la situazione delle tre stelle principali che compongono questa costellazione le abbia fatto dare il nome di *Triangolo*: pure alcuni tra i poeti fingono che rappresenti la figura della Sicilia, che è triangolare; ed altri pretendono che denoti le tre parti della terra. Questa costellazione insieme con quella del *Piccolo Triangolo*, che le rimane sotto, contiene 16 stelle nel Catalogo Britannico.

Piccolo Triangolo. Costellazione introdotta da Evelio e posta presso il Triangolo Boreale.

TRIANGOLO AUSTRALE (*Astron.*). Costellazione situata nell' emisfero australe a 20 gradi di distanza dal polo, al di sopra dell' Altare, e al mezzodì dello Scorpione e del Lupo. La stella principale di questa costellazione è di seconda grandezza.

TRIDENTE (*Geom.*). Curva del terz' ordine chiamata ancora *parabola di Cartesio*. Il nome di *tridente* deriva dalla sua forma. (*Vedi* L' ANALISI DELLE LINEE CURVE del Cramer).

TRIGONOMETRIA (da τρίγονος, *triangolo*, e da μέτρον, *misura*). Ramo della geometria generale che ha per oggetto la misura dei triangoli o la determinazione di alcune delle loro parti per mezzo dell' altre.

La *trigonometria* è una scienza importantissima per l' astronomia, la navigazione, l' agrimensura, la gnomonica, ec., e non possiamo mettere in dubbio che i matematici di tutte le epoche non se ne siano occupati; ciò non ostante la sua origine è delle più incerte. Quantunque si abbia degli indizi che gli Egiziani non hanno ignorato i suoi principj elementari, le sue prime tracce non si trovano che presso i Greci. Si deve ad Ipparco, secondo il rapporto di Teone, un trattato in dodici libri sopra le *corde degli archi del circolo*, che sembra un vero trattato di trigonometria; ma la più antica opera esistente sopra questo soggetto è il *Trattato della sfera* di Teodosio.

I grandi perfezionamenti eseguiti nella *trigonometria* mediante i lavori di Nepero e soprattutto mediante la teoria dei seni che si deve all' Eulero ne fanno quasi una scienza del tutto moderna, della quale cercheremo di riassumere le proposizioni fondamentali.

La trigonometria si divide in *rettilinea* e in *sferica*. La trigonometria rettilinea considera i triangoli rettilinei o quelli che sono formati sopra un piano mediante l' intersezione di tre rette, e la trigonometria sferica considera i triangoli sferici o quelli che sono formati sulla superficie della sfera mediante l' intersezione di tre circoli massimi.

I. TRIGONOMETRIA RETTILINEA. Tre delle sei cose che compongono un triangolo, nel numero delle quali deve trovarsi almeno un lato, essendo date, determinare le tre altre, tale è il problema generale della trigonometria. La soluzione di questo problema generale riposa sopra un piccolissimo numero di principj i quali permettono di abbracciare senza difficoltà tutti i casi particolari. Cominciamo dall' esaminare i più semplici, i triangoli rettangoli, e sia ABC (*Tav.* CCXXIII, *fig.* 2) un tale triangolo. Se prendiamo sul lato AB una parte AD per rappresentare il raggio del circolo la cui circonferenza deve servire a misurare gli angoli e che con questo raggio si descriva l' arco DF, quest' arco sarà la misura dell' angolo A, e se si conducano le perpendicolari FE e DH, la prima sarà il *seno* e la seconda la *tangente* di quest' arco DF o dell' angolo A (*vedi* SENO e TANGENTE). Ora i tre triangoli rettangoli AEF, ADH, ABC sono simili tra loro (*vedi* TRIANGOLO, n.° 27) e danno, cioè:

I triangoli ABC, AEF

$$AC : BC :: AF : EF.$$

I triangoli ABC, ADH

$$AB : BC :: AD : DH,$$

ma

$$AF = AD = \text{raggio del circolo} = R,$$
$$EF = \text{sen}\, A,$$
$$DH = \text{tang}\, A,$$

così queste due proporzioni possano ancora scriversi

$$AC : BC :: R : \text{sen}\, A \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$
$$AB : BC :: R : \text{tang}\, A \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

1. La prima di queste proporzioni dà il seguente principio fondamentale: « In

qualunque triangolo rettangolo, l'ipotenusa sta ad uno dei due altri lati, come il raggio sta al seno dell'angolo opposto a questo lato ».

2 Dalla seconda proporzione resulta quest'altro principio fondamentale: « In qualunque triangolo rettangolo uno dei lati dell'angolo retto sta all'altro lato, come il raggio sta alla tangente dell'angolo adiacente a questo primo lato ».

3. Il raggio che abbiamo espresso in questo punto con R è quello delle tavole dei seni: possiamo per maggior semplicità farlo uguale all'unità, e allora le due proporzioni danno

$$BC = AC \cdot \text{sen } A,$$
$$BC = AB \cdot \text{tang } A,$$

il che può enunciarsi così:

1.° Uno qualunque dei lati dell'angolo retto è uguale all'ipotenusa moltiplicata per il seno dell'angolo opposto a questo lato.

2.° Uno qualunque dei lati dell'angolo retto è uguale all'altro lato moltiplicato per la tangente dell'angolo acuto che è adiacente a quest'ultimo lato.

Siccome in qualunque triangolo rettangolo uno degli angoli acuti è il complemento dell'altro, possiamo sostituire in queste relazioni il seno dell'angolo opposto per il coseno dell'angolo adiacente e la tangente dell'angolo adiacente con la cotangente dell'angolo opposto.

4. Faremo osservare in questo punto che in tutte le formule trigonometriche dove abbiamo fatto il raggio uguale all'unità diventa essenziale di ristabilire questo raggio quando vogliamo eseguire i calcoli numerici servendosi delle tavole dei seni calcolate per un raggio determinato. Ora, questo ristabilimento del raggio delle tavole è l'oggetto di una regola semplicissima la quale consiste a rendere omogenei tutti i termini della formule. Per esempio l'espressione

$$BC = AC \cdot \text{sen } A,$$

in virtù della quale una linea è uguale al prodotto di due linee, il qual prodotto rappresenta una superficie, sarebbe un vero controsenso geometrico, se non fosse sottinteso che esso è identicamente lo stesso dell'espressione

$$BC \cdot R = AC \cdot \text{sen } A,$$

nella quale R rappresenta l'*unità*. Ora, quando questo raggio non è più l'*unità*, siccome questo è il caso delle tavole trigonometriche in cui esso è 10000000000, si ristabilisce nelle formule rendendo tutti i termini della stessa dimensione ovvero omogenei. Ed è mediante ciò che l'espressione

$$\text{sen}^2 A = 1 - \cos^2 A,$$

diventa

$$\text{sen}^2 A = R^2 - \cos^2 A,$$

mediante il ristabilimento del raggio; e che l'espressione

$$a = b \text{ sen } A - \frac{C \cdot \cos B}{b^2},$$

diventa

$$a = \frac{b \cdot \text{sen } A}{R} - \frac{R \cdot C \cdot \cos B}{b^2},$$

per la stessa ragione (*Vedi* Dimensione).

5. Tutti i problemi che possiamo proporci sul calcolo delle parti incognite di un triangolo rettangolo mediante il mezzo delle parti date, si riducono ai quattro seguenti casi:

1.° *Caso*. Si conosce l' ipotenusa e un altro lato. Indichiamo con a, b, c, i tre lati di un triangolo, e con A, B, C, gli angoli respettivamente opposti a questi lati; prendiamo A per l' angolo retto, e conseguentemente a per l' ipotenusa.

b essendo il lato dato con l' ipotenusa a, avremo per determinare l' angolo B la proporzione

$$a : b :: \mathrm{R} : \mathrm{sen\,B},$$

il che dà, impiegando le tavole dei logaritmi e rammentandosi che $\mathrm{Log\,R} = 10$,

$$\mathrm{Log\,.\,sen\,B} = 10 + \mathrm{Log}\,b - \mathrm{Log}\,a.$$

Conoscendo l' angolo B, si ha immediatamente

$$\mathrm{C} = 90^{\circ} - \mathrm{B}.$$

Quanto al terzo lato c, possiamo calcolarlo direttamente mediante la proprietà conosciuta (*vedi* TRIANGOLO n.° 37)

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

donde

$$c = \sqrt{\left[a^2 - b^2\right]},$$

e si ha, servendosi dei logaritmi,

$$\mathrm{Log}\,c = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{Log}\left(a+b\right) + \mathrm{Log}\left(a-b\right)\right\}.$$

Possiamo ancora trovare questo lato, dopo che B è determinato, mediante la proporzione

$$b : c :: \mathrm{R} : \mathrm{cot\,B};$$

donde

$$c = \frac{b\,.\,\mathrm{cot\,B}}{\mathrm{R}},$$

e

$$\mathrm{Log}\,c = \mathrm{Log}\,b + \mathrm{Log\,cot\,B} - 10.$$

2.° *Caso*. Si conoscono i due lati dell' angolo retto.

Avremo l' angolo B mediante la proporzione

$$c : b :: \mathrm{R} : \mathrm{tang\,B};$$

donde

$$\mathrm{tang\,B} = \frac{b\,.\,\mathrm{R}}{c},$$

e

$$\mathrm{Log\,.\,tang\,B} = 10 + \mathrm{Log}\,b - \mathrm{Log}\,c.$$

L' angolo C sarà dato dalla relazione

$$\mathrm{C} = 90^{\circ} - \mathrm{B}.$$

Quanto all' ipotenusa, siccome la proprietà diretta

$$a = \sqrt{\left[b^2 + c^2\right]}$$

non si presta facilmente al calcolo logaritmico, sarà più semplice ottenerlo mediante la proporzione

$$a : b :: R : \text{sen}\, B,$$

la quale dà, quando l' angolo B è conosciuto

$$a = \frac{b \cdot R}{\text{sen}\, B},$$

e

$$\text{Log}\, a = 10 + \text{Log}\, b - \text{Log} \cdot \text{sen}\, B.$$

3.° *Caso*. Si conosce l' ipotenusa e un angolo acuto.

In questo caso i tre angoli sono dati e i lati b e c si calcoleranno mediante le formule

$$\text{Log}\, b = \text{Log}\, a + \text{Log} \cdot \text{sen}\, B - 10,$$
$$\text{Log}\, c = \text{Log}\, a + \text{Log} \cdot \text{sen}\, C - 10.$$

4.° *Caso*. Si conosce uno dei lati dell' angolo retto, b per esempio, e un angolo acuto.

I tre angoli sono ancora dati, e avremo l' ipotenusa e l' altro lato dalle proporzioni

$$\text{sen}\, B : R :: b : a,$$
$$R : \text{tang}\, C :: b : c,$$

ovvero mediante l' uguaglianze corrispondenti

$$\text{Log}\, a = 10 + \text{Log}\, b - \text{Log} \cdot \text{sen}\, B,$$
$$\text{Log}\, c = \text{Log}\, b + \text{Log} \cdot \text{tang}\, C - 10.$$

Crediamo inutile dare degli esempj numerici dell' uso di queste formule.

6. La risoluzione dei triangoli obliquangoli riposa ugualmente sopra due principj fondamentali dei quali ecco l' enunciato:

1.° In qualunque triangolo rettilineo i seni degli angoli stanno tra loro come i lati opposti a questi angoli.

2.° In qualunque triangolo rettilineo il quadrato di uno qualunque dei lati è uguale alla somma dei quadrati dei due altri lati, meno due volte il prodotto di questi due lati e del coseno dell' angolo ch' essi formano. (Si suppone il raggio uguale all' unità).

Per dimostrare il primo principio, consideriamo un triangolo ABD, (*Tav.* CCXXIII, *fig.* 1), dal vertice del quale abbasseremo sulla base la perpendicolare AC. Questa perpendicolare forma due triangoli rettangoli, ACD, ACB, nei quali si ha, mediante quello che precede

$$\left.\begin{array}{l} AB : AC :: R : \text{sen}\, B \\ AD : AC :: R : \text{sen}\, D \end{array}\right\} \ldots\ldots (1).$$

Ora, i medj di queste due proporzioni essendo respettivamente uguali, gli estremi danno

$$AB : AD :: \text{sen}\, D : \text{sen}\, B.$$

Abbassando la perpendicolare dal vertice dell' angolo B sul lato AD, si troverebbe nella stessa maniera

$$AB : BD :: \text{sen}\, D : \text{sen}\, A.$$

Si ha dunque generalmente

$$AB : AD : BD :: \text{sen}\, D : \text{sen}\, B : \text{sen}\, A.$$

Se, invece di cadere nell' interno del triangolo, la perpendicolare cadesse al di fuori, si avrebbero evidentemente i medesimi resultamenti.

Quanto al secondo principio, si ha, mediante un teorema dimostrato in altra parte (*vedi* Triangolo, n.° 38),

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD \times BC,$$

ma il triangolo rettangolo ABC dà (n.° 3)

$$BC = AB \times \cos B;$$

dunque, sostituendo,

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD \times AB \times \cos B.$$

È facile vedere che se l' angolo B fosse ottuso, caso in cui la perpendicolare cade fuori del triangolo, si otterrebbe ancora lo stesso resultamento.

7. Indicando con a, b, c, i tre lati di un triangolo rettilineo qualunque, e con A, B, C, gli angoli che sono loro respettivamente opposti, avremo i due principj fondamentali

$$a : b : c :: \text{sen}\, A : \text{sen}\, B : \text{sen}\, C \ldots\ldots (m),$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \cos C \ldots\ldots (n),$$

dai quali dedurremo la soluzione di tutti i casi particolari.

Di volo faremo osservare che, per tener conto del raggio delle tavole nella seconda espressione, bisogna rendere i suoi termini omogenei, e che essa diventa allora

$$c^2 = a^2 + b^2 - \frac{2ab \,.\, \cos C}{R}.$$

8. Possiamo ancora riportare a quattro tutti i casi particolari della soluzione dei triangoli in generale.

1.° *Caso.* Due lati a e b son dati con l' angolo A opposto ad uno di essi.

Per trovare prima di tutto l' angolo B opposto all' altro lato b, avremo la proporzione

$$a : b :: \text{sen}\, A : \text{sen}\, B,$$

donde

$$\text{sen}\, B = \frac{b \,.\, \text{sen}\, A}{a},$$

e, mediante i logaritmi,

$$\text{Log}\,.\,\text{sen}\, B = \text{Log}\, b + \text{Log}\,.\,\text{sen}\, A - \text{Log}\, a.$$

Dobbiamo osservare in questo punto che le tavole trigonometriche non danno mai per l' arco corrispondente ad un seno dato che un arco minore di un quarto

della circonferenza, e che questo seno può indifferentemente corrispondere a quest' arco o al suo supplemento, perchè generalmente si ha

$$\text{sen } M = \text{sen } (180^\circ - M).$$

Diventa dunque essenziale di sapere quale dev' essere la natura dell' angolo B cercato, poichè se è acuto il suo valore è direttamente dato dalle tavole, nel mentre che se è ottuso bisogna prendere il supplemento dell' arco delle tavole. Ora, se non si conoscesse direttamente la natura di quest' angolo, si potrebbe in certi casi determinarlo mediante l' aiuto delle seguenti considerazioni: se l' angolo dato A è ottuso, B dev' essere acuto; se l' angolo dato A essendo acuto, il lato a è maggiore di b, l' angolo B non può essere che acuto. Non è dunque che quando A è acuto, ed a minore di b, che B può essere ottuso e che vi è indecisione.

L' angolo B essendo conosciuto, avremo l' angolo C mediante la relazione

$$C = 180^\circ - A - B,$$

quindi si calcolerà il terzo lato c mediante la proporzione

$$\text{sen } A : \text{sen } C :: a : c.$$

2.° *Caso*. Un lato a è dato con due angoli.

Il terzo angolo si trova dato immediatamente e si calcolano i due altri lati mediante le proporzioni

$$\text{sen } A : \text{sen } B :: a : b,$$
$$\text{sen } A : \text{sen } C :: a : c;$$

ovvero mediante l' uguaglianze corrispondenti

$$\text{Log } b = \text{Log } a + \text{Log . sen } B - \text{Log . sen } A,$$
$$\text{Log } c = \text{Log } a + \text{Log . sen } C - \text{Log . sen } A.$$

3.° *Caso*. Due lati a e b son dati con l' angolo compreso C.

Per cominciare da trovare i due altri angoli, bisogna osservare che la loro somma è conosciuta poichè essa è uguale a $180^\circ - C$, e che così il problema si riduce a cercare la loro differenza, poichè due quantità delle quali si conosce la somma e la differenza si determinano mediante una regola semplicissima. (*Vedi* EQUAZIONE, n.° 10).

Ora, in virtù del principio (m), abbiamo

$$a : b :: \text{sen } A : \text{sen } B,$$

donde, per composizione di rapporto,

$$a+b : a-b :: \text{sen } A + \text{sen } B : \text{sen } A - \text{sen } B,$$

ma si sa, che (*vedi* SENO, n.° 33)

$$\frac{\text{sen } A + \text{sen } B}{\text{sen } A - \text{sen } B} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}\left(A+B\right)}{\text{tang } \frac{1}{2}\left(A-B\right)};$$

dunque, sostituendo, si ha la proporzione

$$a+b : a-b :: \tang \frac{1}{2}\left(A+B\right) : \tang \frac{1}{2}\left(A-B\right),$$

per mezzo della quale si potrà calcolare la semi-differenza $\frac{1}{2}\left(A-B\right)$. Conoscendo questa semi-differenza, avremo il più grande degli angoli, aggiungendolo alla semi-somma e il più piccolo sottraendolo.

I calcoli si rendono più semplici, osservando che

$$\tang \frac{1}{2}\left(A+B\right) = \tang \frac{1}{2}\left(180^\circ - C\right) = \tang\left(90^\circ - \frac{1}{2} C\right)$$

$$= \cot \frac{1}{2} C.$$

Così, indicando la semi-differenza $\frac{1}{2}\left(A-B\right)$ con Δ, viene

$$\tang \Delta = \frac{a-b}{a+b} \cdot \cot \frac{1}{2} C.$$

Dopo aver calcolato l' angolo Δ mediante questa formula, in seguito si trovano A a B mediante le relazioni

$$A = 90^\circ - \frac{1}{2} C + \Delta,$$

$$B = 90^\circ - \frac{1}{2} C - \Delta.$$

Supponiamo $a > b$, donde $A > B$.

Gli angoli A e B essendo così determinati, avremo il terzo lato c mediante la proporzione

$$\mathrm{sen}\, A : \mathrm{sen}\, C :: a : c.$$

4.° *Caso.* I tre lati sono dati.

In virtù del principio (n), l' angolo C opposto al lato c sarà dato dall' espressione

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

che si tratta di trasformare in un' altra più comoda per il calcolo: Ora, si ha generalmente (*vedi* Seno, n.° 25)

$$2 \,\mathrm{sen}^2 \frac{1}{2} z = 1 - \cos z$$

e, per conseguenza, in questo caso

$$2 \,\mathrm{sen}^2 \frac{1}{2} C = 1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab}$$

$$= \frac{(c+a-b)(c+b-a)}{2ab};$$

donde

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}\,C = \sqrt{\left[\frac{(c+a-b)(c+b-a)}{4ab}\right]}.$$

Se indichiamo con s la semi-somma dei tre lati $a+b+c$, avremo

$$c+a-b = 2s-2b,$$
$$c+b-a = 2s-2a,$$

e l' ultima espressione prenderà la forma

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}\,C = \sqrt{\left[\frac{(s-a)(s-b)}{ab}\right]},$$

che possiamo facilmente calcolare mediante i logaritmi.

Avremo evidentemente, ed ugualmente per i due altri angoli A e B l' espressioni simili

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}\,A = \sqrt{\left[\frac{(s-b)(s-c)}{bc}\right]},$$

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}\,B = \sqrt{\left[\frac{(s-a)(s-c)}{ac}\right]}.$$

Possiamo trovare altre formule analoghe per risolvere la questione. Per esempio, partendo dall' espressione conosciuta (*vedi* Seno, n.° 25)

$$2\cos^2\frac{1}{2}\,z = 1+\cos z,$$

si ha

$$2\cos^2\frac{1}{2}\,C = 1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab};$$

donde finalmente

$$\cos\frac{1}{2}\,C = \sqrt{\left[\frac{s\,.\,(s-c)}{ab}\right]}.$$

Quest' ultima espressione dev' esser preferita alla precedente quando l' angolo C è molto ottuso.

Moltiplicando l' espressione di $\cos\frac{1}{2}\,C$ con quella di $\text{sen}\,\frac{1}{2}C$, e osservando che

$$2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\,C\,.\,\cos\frac{1}{2}\,C = \text{sen}\,C$$

(*vedi* SENO, n.° 24), si ottiene ancora:

$$\text{sen}\,C = \frac{2}{ab}\sqrt{\left[s(s-a)(s-b)(s-c)\right]},$$

formula meno semplice delle due altre, ma non meno degna di osservazione.

9. Ci rimane da dare la determinazione dell' *area* del triangolo per mezzo di alcune di queste parti. A quest' effetto, rammentiamoci che l' area di un triangolo qualunque è uguale alla metà del prodotto della sua base per la sua altezza. Così, indicando quest' area con S e prendendo per esempio il triangolo della figura precedente, avremo

$$S = \frac{1}{2}\,BD \times AC,$$

ma il triangolo rettangolo ABC, dà

$$AC = AB\,.\,\text{sen}\,B;$$

dunque, sostituendo

$$S = \frac{1}{2}\,BD \times AB \times \text{sen}\,B,$$

vale a dire che « l' area di un triangolo è uguale alla metà del prodotto di due qualunque dei suoi lati e del seno dell' angolo che essi formano ».

Riprendendo le precedenti notazioni, avremo

$$S = \frac{1}{2}\,ab\,.\,\text{sen}\,C.$$

Se in quest' espressione sostituiamo quella di sen C, trovata nel precedente numero, verrà

$$S = \sqrt{\left[s(s-a)(s-b)(s-c)\right]},$$

formula la quale dà l' area del triangolo per mezzo dei tre lati, e che in altra parte abbiamo dimostrato in un modo diretto. (*Vedi* APPLICAZIONE DELL' ALGEBRA ALLA GEOMETRIA).

Nel caso in cui si conoscesse solamente c e i due angoli adiacenti A e B, l' area sarebbe data dalla formula

$$S = \frac{1}{2}\,.\,\frac{c^2\,.\,\text{sen}\,A\,.\,\text{sen}\,B}{\text{sen}\,(A+B)},$$

la quale si ottiene cercando l' espressione dell' altezza del triangolo in funzione della base e degli angoli adiacenti.

10. Per dare alcuni esempii dell' applicazione di queste formule, proponiamoci di determinare gli angoli di un triangolo i di cui tre lati hanno per lunghezze date 1200^m, 860^m e 780^m.

Ponendo

$$a = 1200^m,$$
$$b = 860^m,$$
$$c = 780^m,$$

troveremo successivamente

$$s=\frac{1}{2}\left(a+b+c\right)=1420,$$

$$s-a=220,$$
$$s-b=560,$$
$$s-c=640.$$

Osserviamo ora, che per rendere la formula

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}\,C=\sqrt{\left[\frac{(s-a)(s-b)}{ab}\right]}$$

calcolabile mediante i logaritmi bisogna rendere i suoi membri omogenei introducendoci il raggio R delle tavole; ora questa formula è la stessa cosa che

$$\text{sen}^2\,\frac{1}{2}\,C=\frac{(s-a)(s-b)}{ab},$$

il cui primo membro ha due dimensioni, nel mentre che la dimensione del secondo è nulla; bisogna metterla dunque sotto la forma

$$\text{sen}^2\,\frac{1}{2}\,C=R^2.\,\frac{(s-a)(s-b)}{ab}$$

e si ha, impiegando i logaritmi, a motivo di

$$\text{Log}\,R^2=2\,\text{Log}\,R=20,$$

$$\text{Log}\,.\,\text{sen}\,\frac{1}{2}C=\frac{1}{2}\left[20+\text{Log}\,(s-a)+\text{Log}\,(s-b)-\text{Log}\,a-\text{Log}\,b\right].$$

Ecco il calcolo

$\text{Log}\,R^2=20,0000000$
$\text{Log}\,(s-a)=\;\;2,3424227$
$\text{Log}\,(s-b)=\;\;2,7481880$

1.ª somma . . . = 25,0906107

Log a = 3,0791812
Log b = 2,9344984

2.ª somma . . . . = 6,0136796

1.ª somma 25,0906107
2.ª somma 6,0136796

Differenza 19,0769311

metà o Log sen $\frac{1}{2}$ C = 9,5384655;

donde

$$\frac{1}{2} C = 20^\circ\ 12'\ 47'',4$$

e

$$C = 40^\circ\ 25'\ 34'',8.$$

Possiamo fare una sola addizione servendoci dei *complementi aritmetici* (*vedi* QUESTA PAROLA), ma allora bisogna aver la cura di sottrarre dall' ultima caratteristica tante *diecine*, quanti complementi si sono impiegati. Ecco il calcolo dell' angolo B fatto con questo metodo. Si ha in questo caso

$$\text{Log sen} \frac{1}{2} B = \frac{1}{2} \Big[20 + \text{Log}(s-a) + \text{Log}(s-c) - \text{Log}\, a - \text{Log}\, c \Big],$$

e per conseguenza

$$\begin{aligned} 20 &= 20,0000000 \\ \text{Log}(s-a) &= \ \ 2,3424227 \\ \text{Log}(s-c) &= \ \ 2,8061800 \\ \textit{compl.}\ \text{Log}\, a &= \ \ 6,9208188 \\ \textit{compl.}\ \text{Log}\, c &= \ \ 7,1079054 \\ \hline \text{Somma} \ldots &\ \ 39,1773269 \\ &-20 \\ \hline &\ \ 19,1773269 \\ \textit{metà}\ \text{o Log sen} \frac{1}{2} B &= \ \ 9,5886634; \end{aligned}$$

donde

$$\frac{1}{2} B = 22^\circ\ 49'\ 14'',7$$

e

$$B = 45^\circ\ 38'\ 29'',4.$$

Si vede che calcolando questa formula con i *complementi aritmetici* possiamo dispensarci di tener conto del raggio, poichè alla fine si sottrae le due diecine che questo raggio c' introduce.

Conoscendo gli angoli C e B possiamo ottenere l' angolo A sottraendo la loro somma da 180°; ma torna più conto calcolare direttamente quest' angolo, il che dà un mezzo di verificazione, poichè inseguito si deve trovare

$$A + B + C = 180^\circ.$$

Applicando la stessa formula si ha

$$\begin{aligned} \text{Log}(s-b) &= \ \ 2,7481880 \\ \text{Log}(s-c) &= \ \ 2,8061800 \\ \textit{compl.}\ \text{Log}\, b &= \ \ 7,0655016 \\ \textit{compl.}\ \text{Log}\, c &= \ \ 7,1079054 \\ \hline \text{Somma} \ldots &\ \ 19,7277750 \\ \textit{metà}\ \text{o Log. sen} \frac{1}{2} A &= 9,8638875; \end{aligned}$$

donde

$$\frac{1}{2} A = 46^\circ\ 57'\ 57'',9$$

e

$$A = 93^\circ\ 55'\ 55'',8.$$

Riunendo questi resultamenti e prendendo la loro somma, si trova

$$\begin{array}{rl} A = & 93^\circ\ 55'\ 55'',8 \\ B = & 45\ \ 38\ \ 29\ ,4 \\ C = & 40\ \ 25\ \ 34\ ,8 \\ \hline \text{Somma} \ldots & 180^\circ\ \ 0'\ \ 0'' \end{array}$$

11. Supponiamo ora che nel medesimo triangolo si conoscano solamente i lati a e b con l'angolo compreso C, e che si vogliano calcolare le altri parti.

Si ha dunque

$$a = 1200^m,$$
$$b = 860^m,$$

e

$$C = 40^\circ\ 25'\ 34'',8.$$

Per determinare gli angoli A e B impiegheremo la formula del 3.° *caso*

$$\text{tang}\,\Delta = \frac{a-b}{a+b} \cdot \cot \frac{1}{2} C,$$

nella quale

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(A-B\right).$$

I membri essendo omogenei non vi è bisogno d'introdurre il raggio, e prendendo i logaritmi, si ha

$$\text{Log}\,.\,\text{tang}\,\Delta = \text{Log}\left(a-b\right) + \text{Log}\cot\frac{1}{2}C - \text{Log}\left(a+b\right);$$

ora

$$a-b = 1200-860 = 340,$$
$$a+b = 1200+860 = 2060,$$
$$\frac{1}{2} C = 20^\circ\ 12'\ 47'',4;$$

così, eseguendo i calcoli indicati, otterremo

$$\begin{array}{rl} \text{Log}\,(a-b) = & 2,5314789 \\ \text{Log}\cot\frac{1}{2}C = & 10,4339289 \\ \hline \text{Somma} \ldots & 12,9654078 \\ \text{Log}\,(a+b) = & 3,3138672 \\ \hline \textit{diff.} \text{ ovvero Log tang}\,\Delta = & 9,6515406; \end{array}$$

donde

$$\Delta = 24^{\circ}\,8'\,43'',1.$$

Con l' aiuto di questo valore di Δ, si ottiene

$$A = 90^{\circ} - \frac{1}{2}C + \Delta = 93^{\circ}\,55'\,55'',7$$

$$B = 90^{\circ} - \frac{1}{2}C - \Delta = 45\quad 38\quad 29\ ,5.$$

Questi valori di A e di B non differiscono da quelli ottenuti sopra che nei *decimi* dei secondi, e questa differenza resulta dai limiti delle tavole dei logaritmi.

Per ottenere ora il terzo lato c, ci serviremo della proporzione

$$\text{sen } A : \text{sen } C :: a : c,$$

e troveremo

$$\begin{aligned} \text{Log } a &= 3,0791812 \\ \text{Log sen } C &= 9,8118897 \\ \hline \text{Somma} \ldots\ldots &\ 12,8910709 \\ \text{Log sen } A &= 9,9989764 \\ \hline \textit{diff.} \text{ o Log } c &= 2,8920945; \end{aligned}$$

donde

$$c = 780 \text{ metri}.$$

12. La superficie dello stesso triangolo in funzione dei lati a e b e dell' angolo compreso C, essendo (n.° 9),

$$S = \frac{1}{2}ab \,.\, \text{sen } C.$$

Per renderla omogenea, siccome S, esprimendo una superficie, ha 2 dimensioni, porremo

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab \text{ sen } C}{R},$$

ovvero, con i logaritmi,

$$\text{Log } S = \text{Log } a + \text{Log } b + \text{Log . sen } C - \text{Log } 2 - 10.$$

Si troverà, eseguendo i calcoli

$$\begin{aligned} \text{Log } a &= 3,0791812 \\ \text{Log } b &= 2,9344984 \\ \text{Log . sen } C &= 9,8118897 \\ \hline \text{Somma} \ldots &\ 15,8255693 \\ \text{Log } 2 + 10 &= 10,3010300 \\ \hline \textit{diff.} \text{ ovvero Log } S &= 5,5245393; \end{aligned}$$

donde

$$S = 334610 \text{ metri quadrati},$$

valore esatto fino ad un decimo di metro quadrato circa.

13. Per ottenere la medesima superficie con l' aiuto dei tre lati, bisogna impiegare la formula

$$S = \sqrt{\left[s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)\right]},$$

la quale dà, con i logaritmi

$$\text{Log}\, S = \frac{1}{2}\left\{\text{Log}\, s + \text{Log}\,(s-a) + \text{Log}\,(s-b) + \text{Log}\,(s-c)\right\},$$

si ha in questo caso

$$s = 1420,$$
$$s-a = 220,$$
$$s-b = 560,$$
$$s-c = 640,$$

e si trova, eseguendo i calcoli

$$\begin{aligned} \text{Log}\, s &= 3,1522883 \\ \text{Log}\,(s-a) &= 2,3424227 \\ \text{Log}\,(s-b) &= 2,7481880 \\ \text{Log}\,(s-c) &= 2,8061800 \\ \hline \text{Somma} \ldots\ldots &\; 11,0490790 \\ \textit{metà} \text{ o log } S &= 5,5245395 \end{aligned}$$

donde, come sopra,

$$S = 334610 \text{ metri quadrati.}$$

II. Trigonometria Sferica. Si chiama *triangolo sferico* qualunque parte della superficie di una sfera limitata da tre archi di circolo tracciati sopra questa superficie; ma generalmente non si considera che quelli di questi triangoli che sono formati da archi di circoli massimi.

I lati dei triangoli sferici sono mediante ciò archi che appartengono a circoli uguali e si valutano in gradi, minuti, ec., il tutto come i loro angoli, i quali si misurano mediante l' inclinazione respettiva dei piani dei lati che gli formano.

14. Tutti i piani dei circoli massimi di una sfera passando pel suo centro, possiamo rappresentarci un triangolo sferico ABC (*Tav.* CCXLV *fig.* 1) come la base curvilinea di una piramide triangolare il cui vertice O è al centro della sfera, allora i lati AC, AB, BC del triangolo sono respettivamente le misure degli angoli piani che compongono l' angolo solido del vertice della piramide, e gli angoli del triangolo sono i medesimi di quelli delle facce di quest' angolo solido.

15. Siccome l' angolo di due piani si misura dall' angolo rettilineo formato da due rette perpendicolari ad uno qualunque dei punti dell' intersezione dei piani e condotte una in un piano e l' altra nell' altro, possiamo dire, generalmente, che un angolo sferico è lo stesso dell' angolo rettilineo formato dalle tangenti dei suoi lati al loro punto d' intersezione ovvero al vertice.

16. La somma degli angoli piani che compongono un angolo solido essendo sempre minore di quattro angoli retti, ne resulta che la somma dei tre lati di un triangolo sferico è sempre minore di una circonferenza intera, o di 360°, adottando la divisione sessagesimale del circolo, la sola ancora generalmente in uso.

17. Non segue lo stesso degli angoli di un triangolo sferico come di quelli di un triangolo rettilineo, non solamente la loro somma non è costantemente uguale a due angoli retti, ma ancora essa supera sempre questa quantità, dimodochè la conoscenza di due angoli è insufficiente per determinare il terzo.

La somma dei tre angoli di un triangolo sferico varia tra i limiti di due e di sei angoli retti, vale a dire, che essa è sempre maggiore di 180° e minore di 540°.

18. Quando un triangolo sferico ha uno dei suo angoli retti, prende il nome di *triangolo rettangolo*, e si chiama ancora *ipotenusa* il lato opposto a quest' angolo. Ma un triangolo sferico può essere doppiamente è triplamente rettangolo, e ne resulta allora le seguenti particolarità.

Se i tre angoli di un triangolo sferico sono retti, i piani dei circoli massimi che lo formano sono respettivamente perpendicolari l' uno sopra i due altri, allora i tre angoli piani che compongono l' angolo solido del vertice della piramide (n.° 14) sono retti, e conseguentemente i tre lati di un triangolo sferico sono quarti di circonferenza. Così quando i tre angoli hanno ciascuno 90°, i tre lati hanno ancora ciascuno 90°, e tutto è determinato nel triangolo.

Se due angoli solamente sono retti, il piano del loro lato comune è perpendicolare nello stesso tempo sopra i piani dei due altri lati, dimodochè l' angolo solido al vertice della piramide si trova composto di due angoli piani retti e di un terz' angolo uguale al terz' angolo del triangolo sferico. In questo caso dunque i lati di un triangolo sono respettivamente uguali agli angoli che sono loro opposti, e tutto si trova ancora determinato.

19. Conoscendo tre delle sei cose che compongono un triangolo sferico, determinare le tre altre, tale è il problema generale della *trigonometria sferica*; esso non differisce da quello della trigonometria rettilinea, se non che non ci è bisogno che tra le tre cose date si trovi almeno uno dei lati. I diversi casi che esso presenta possano essere abbracciati in una sola formula la deduzione della quale non presenta veruna difficoltà.

Sia ABC (*Tav.* CCXLV, *fig.* 2) un triangolo sferico qualunque, ed O il centro della sfera sul quale esso è tracciato. Dal centro O conduciamo per i vertici del triangolo le rette indefinite OF, OE ed OD. Prendiamo OF a piacere, e dal punto F conduciamo sopra OF due perpendicolari una FE nel piano di AOB, e l' altra FD nel piano di AOC. Questa perpendicolari, prolungate sufficientemente, incontreranno OE ed OD in dei punti E e D che uniremo con la retta DE.

Mediante questa costruzione, l' angolo DFE delle due perpendicolari misura l' angolo dei piani AOC ed AOB; è dunque lo stesso dell' angolo A del triangolo sferico.

Ma nei triangoli rettilinei FDE, ODE si ha (n.° 7)

$$\frac{\cos EFD}{R} = \frac{\overline{FE}^2 + \overline{FD}^2 - \overline{DE}^2}{2FE \,.\, ED},$$

$$\frac{\cos EOD}{R} = \frac{\overline{EO}^2 + \overline{OD}^2 - \overline{DE}^2}{2OE \,.\, OD}.$$

Prendendo nella seconda espressione il valore di $\overline{DE}^2$ e sostituendolo nella prima verrà

$$\cos EFD = \frac{OE \cdot OD \cdot \cos EOD - \overline{OF}^2 \cdot R}{FE \cdot FD} \ldots\ldots (p),$$

osservando che

$$\overline{OE}^2 - \overline{FE}^2 = \overline{OF}^2,$$
$$\overline{OD}^2 - \overline{FD}^2 = \overline{OF}^2.$$

Rappresentiamo ora con A, B, C, i tre angoli del triangolo sferico, e con a, b, c, i lati opposti, ed osserviamo che

$$EFD = A,$$
$$EOD = BC = a,$$
$$FOD = AC = b,$$
$$FOE = AB = c.$$

Premesso ciò, i triangoli rettilinei somministrano

$$OE : FE :: R : \operatorname{sen} FOE :: R : \operatorname{sen} c,$$
$$OD : FD :: R : \operatorname{sen} FOD :: R : \operatorname{sen} b,$$
$$OF : FE :: \cos FOE : \operatorname{sen} FOE :: \cos c : \operatorname{sen} c,$$
$$OF : FD :: \cos FOD : \operatorname{sen} FOD :: \cos b : \operatorname{sen} b;$$

così

$$OE = \frac{R \cdot FE}{\operatorname{sen} c},$$

$$OD = \frac{R \cdot FD}{\operatorname{sen} b};$$

donde

$$OE \cdot OD = \frac{R^2 \cdot FE \cdot FD}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}.$$

Ugualmente

$$OF = \frac{FE \cdot \cos c}{\operatorname{sen} c},$$

$$OF = \frac{FD \cdot \cos b}{\operatorname{sen} b};$$

donde

$$\overline{OF}^2 = \frac{FE \cdot FD \cdot \cos c \cdot \cos b}{\operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} b},$$

sostituendo nell' espressione (p), viene

$$\cos A = \frac{R^2 \cdot \cos a}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c} - \frac{R \cdot \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c},$$

ovvero semplicemente, facendo $R = 1$,

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c} \quad \ldots\ldots (g).$$

Evidentemente si otterrebbero, per i due altri angoli B e C, l'espressioni simili

$$\left.\begin{aligned} \cos B &= \frac{\cos b - \cos a \,.\, \cos c}{\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} c} \\ \cos C &= \frac{\cos c - \cos a \,.\, \cos b}{\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (g).$$

Ora, considerando come incognite tre delle sei quantità che entrano in quest'espressioni, si hanno tre equazioni che bastano in tutti i casi per ottenere la loro completa determinazione.

20. Avanti di passare all'applicazioni, ricaviamo da queste formole la relazione che esiste tra i lati e gli angoli opposti. Nell'espressione fondamentale (*Vedi* SENO n.° 30)

$$\operatorname{sen} A = \sqrt{\left[1 - \cos^2 A\right]},$$

se si sostituisce il valore di $\cos^2 A$ preso dall'espressione (g), viene

$$\operatorname{sen} A = \sqrt{\left[\frac{\operatorname{sen}^2 b \,.\, \operatorname{sen}^2 c - (\cos a - \cos b \,.\, \cos c)^2}{\operatorname{sen}^2 b \,.\, \operatorname{sen}^2 c}\right]}.$$

Osservando che

$$\operatorname{sen}^2 b \,.\, \operatorname{sen}^2 c = \left(1 - \cos^2 b\right)\left(1 - \cos^2 c\right),$$

e sviluppando i prodotti, si ottiene

$$\operatorname{sen} A = \frac{1}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c} \sqrt{\left[1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \,.\, \cos b \,.\, \cos c\right]}$$

e, dividendo i due membri per $\operatorname{sen} a$,

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{1}{\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c} \sqrt{\left[1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \,.\, \cos b \,.\, \cos c\right]}$$

ovvero semplicemente

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = M,$$

indicando con M il secondo membro.

Operando nella stessa maniera sopra sen B e sen C, si troverebbe

$$\frac{\text{sen B}}{\text{sen } b} = M,$$

$$\frac{\text{sen C}}{\text{sen } c} = M;$$

donde

$$\frac{\text{sen A}}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen B}}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen C}}{\text{sen } c},$$

vale a dire, che *i seni degli angoli stanno tra loro come i seni dei lati opposti*. Proprietà analoga a quella dei triangoli rettilinei.

21. Per applicare i precedenti principii ai triangoli sferici rettangoli, supporremo che A sia un angolo retto, e per conseguenza che a sia l' ipotenusa: ora, B e C rappresentando i due altri angoli che si chiamano *obliqui* per distinguerli dall' angolo retto, quantunque possano essere retti essi stessi, abbiamo, mediante l' ultima proposizione,

$$\text{sen A} : \text{sen B} :: \text{sen } a : \text{sen } b,$$
$$\text{sen A} : \text{sen C} :: \text{sen } a : \text{sen } c;$$

ovvero, perchè A essendo di 90°,

$$\text{sen A} = R,$$

si ha

$$R : \text{sen B} :: \text{sen } a : \text{sen } b,$$
$$R : \text{sen C} :: \text{sen } a : \text{sen } c;$$

donde segue che *in qualunque triangolo sferico rettangolo, il raggio sta al seno di un angolo obliquo come il seno dell' ipotenusa sta al seno del lato opposto a quest' angolo.*

Così due di queste tre cose, l' ipotenusa, un angolo obliquo e il lato che gli è opposto, essendo date, basterà risolvere questa proporzione per determinare la terza. Si ha dunque per i tre casi che si presentano in questo punto l' espressioni

$$\text{sen B} = \frac{R \cdot \text{sen } b}{\text{sen } a},$$

$$\text{sen } a = \frac{R \cdot \text{sen } b}{\text{sen B}},$$

$$\text{sen } b = \frac{\text{sen } a \cdot \text{sen B}}{R};$$

nelle quali B rappresenta uno qualunque dei due angoli obliqui.

22. Quando

$$A = 90°,$$

si ha

$$\cos A = 0,$$

e l' espressione (q) diventa

$$0 = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\text{sen } b \cdot \text{sen } c};$$

donde

$$\cos a - \cos b \cdot \cos c = 0,$$

e

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c.$$

Ristabilendo il raggio, l' ultima uguaglianza diventa

$$R \cdot \cos a = \cos b \cdot \cos c,$$

il che equivale allo stesso, che alla proporzione

$$R : \cos b :: \cos c : \cos a.$$

Così, « in qualunque triangolo sferico rettangolo, il raggio sta al coseno di uno dei lati dell' angolo retto, come il coseno dell' altro lato sta al coseno dell' ipotenusa ».

Due dei lati di un triangolo sferico rettangolo essendo dati, possiamo dunque sempre determinare il terzo.

23. Se nell' uguaglianza

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c$$

sostituiamo il valore di $\cos c$,

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos C,$$

ricavato dalla terza dell' espressioni (q), otterremo

$$\cos a = \cos a \cdot \cos^2 b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos b \cdot \cos C,$$

il che dà, trasportando $\cos a \cos^2 b$,

$$\left(1 - \cos^2 b\right) \cos a = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos b \cdot \cos C$$

e, dividendo per $\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$,

$$\frac{(1 - \cos^2 b) \cdot \cos a}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b} = \cos b \cos C.$$

Ora,

$$1 - \cos^2 b = \operatorname{sen}^2 b$$

e

$$\frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} = \cot a,$$

così quest' ultima uguaglianza si riduce a

$$\operatorname{sen} b \cdot \cot a = \cos b \cdot \cos C,$$

il che possiamo mettere sotto la forma

$$\frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} = \frac{\cos C}{\cot a},$$

donde finalmente,

$$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} a \cdot \cos C.$$

Rendendo quest' uguaglianza omogenea, essa diventa

$$R \,.\, \tang b = \tang a \,.\, \cos C,$$

e dà la proporzione

$$R : \cos C :: \tang a : \tang b,$$

vale a dire, « in qualunque triangolo sferico rettangolo il raggio sta al coseno di un angolo obliquo, come la tangente dell' ipotenusa sta alla tangente del lato adiacente a quest' angolo.

24. Si dedurrebbe con processi simili tre altri principii necessari per la risoluzione dei triangoli sferici e dei quali ecco gli enunciati:

1.° Il seno di un angolo obliquo sta al coseno dell' altro angolo obliquo come il raggio sta al coseno del lato opposto a quest' altro angolo obliquo.

2.° Il raggio sta alla tangente di un angolo obliquo come il seno del lato adiacente sta alla tangente del lato opposto.

3.° La tangente di un angolo obliquo sta alla cotangente dell' altro angolo obliquo, come il raggio sta al coseno dell' ipotenusa.

Con l' aiuto di questi tre principii e dei tre precedenti, due qualunque delle cinque cose che compongono un triangolo sferico rettangolo essendo date (non teniamo conto dell' angolo retto che è sempre conosciuto), si potranno calcolare le tre altre. Dobbiamo far osservare che quando il valore della quantità cercata è dato per il suo seno solamente, siccome lo stesso seno corrisponde a due angoli supplementi l' uno dell' altro; bisogna poter determinare la natura di quest' angolo mediante le grandezze dell' altre cose date, senza di ciò la scelta tra i suoi due valori rimane interamente incerta. Questo è quello che chiamasi i *casi ambigui* o *dubbiosi*. Essi sono indicati nella seguente tavola che presenta la riunione della soluzione dei triangoli sferici rettangoli.

TAVOLA

DI TUTTI I CASI DELLA SOLUZIONE DI UN TRIANGOLO SFERICO RETTANGOLO

L' ipotenusa è rappresentata da a, i due lati obliqui da b e c, e i due angoli obliqui che sono loro respettivamente opposti da B e C

Dati	Cercati		Formule
a, B	b.	1	$\sen b^* = \sen a \,.\, \sen B^*$
	c.	2	$\tang c = \tang a \,.\, \cos B$
	C.	3	$\cot C = \cos a \,.\, \tang B$
a, C	c.	4	$\sen c^* = \sen a \,.\, \sen C^*$
	b.	5	$\tang b = \tang a \,.\, \cos C$
	B.	6	$\cot B = \cos a \,.\, \tang C$
a, c	b.	7	$\cos b = \frac{\cos a}{\cos c}$
	B.	8	$\cos B = \tang c \,.\, \cot a$
	C.	9	$\sen C^* = \frac{\sen c^*}{\sen a}$

$a.\ b$	$c.$	10	$\cos c = \dfrac{\cos a}{\cos b}$
	C.	11	$\cos C = \text{tang}\ b \cdot \cot a$
	B.	12	$\text{sen}\ B^* = \dfrac{\text{sen}\ b^*}{\text{sen}\ a}$
c, C casi dubbiosi	$a.$	13	$\text{sen}\ a = \dfrac{\text{sen}\ c}{\text{sen}\ C}$
	$b.$	14	$\text{sen}\ b = \text{tang}\ c \cdot \cot C$
	B.	15	$\text{sen}\ B = \dfrac{\cos C}{\cos c}$
b, B casi dubbiosi	$a.$	16	$\text{sen}\ a = \dfrac{\text{sen}\ b}{\text{sen}\ B}$
	$c.$	17	$\text{sen}\ c = \text{tang}\ b \cdot \cot B$
	C.	18	$\text{sen}\ C = \dfrac{\cos B}{\cos b}$
c, B	$a.$	19	$\cot a = \cos B \cdot \cot c$
	$b.$	20	$\text{tang}\ b = \text{tang}\ B \cdot \text{sen}\ c$
	C.	21	$\cos C = \text{sen}\ B \cdot \cos c$
b, C	$a.$	22	$\cot a = \cos C \cdot \cot b$
	$c.$	23	$\text{tang}\ c = \text{tang}\ C \cdot \text{sen}\ b$
	B.	24	$\cos B = \text{sen}\ C \cdot \cos b$
b, c	$a.$	25	$\cos a = \cos b \cdot \cos c$
	B.	26	$\cot B = \text{sen}\ c \cdot \cot b$
	C.	27	$\cot C = \cot c \cdot \text{sen}\ b$
B, C	$a.$	28	$\cos a = \cot B \cdot \cot C$
	$b.$	29	$\cos b = \dfrac{\cos B}{\text{sen}\ C}$
	$c.$	30	$\cos c = \dfrac{\cos C}{\text{sen}\ B}$.

Per calcolare queste formule con i logaritmi, bisogna renderle omogenee introducendoci il raggio, il che si fa dividendo per R i secondi membri che sono dei *prodotti*, e moltiplicando per R quelli che sono dei *quozienti*.

Gli archi marcati di un asterisco sono della stessa natura. Per esempio la formula

$$\text{sen}\ b^* = \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ B^*$$

indica che l' arco b cercato è maggiore o minore di un angolo retto, secondo che B è esso stesso maggiore o minore di 90°. Nei trenta casi possibili non ve ne sono dunque realmente che sei dubbiosi. Quest' indicazione è fondata dal sapere che in qualunque triangolo sferico rettangolo un angolo obliquo e il lato che gli è opposto, son sempre della stessa specie, vale a dire, tutti due maggiori o tutti due minori di 90°.

Esaminando la precedente tavola si vede che i trenta casi che essa presenta si riducono ai cinque casi generali seguenti, i dati dei quali sono:

1.° L' ipotenusa ed un angolo obliquo.
2.° L' ipotenusa e un lato obliquo.
3.° I due lati obliqui.
4.° Un lato obliquo ed un angolo obliquo.
5.° I due angoli obliqui.

Possiamo ancora abbracciare questi cinque casi generali mediante un' analogia o proporzione elegantissima dovuta al Nepero: e dobbiamo maravigliarci come gli autori moderni dei trattati di trigonometria non facciano menzione di un principio che ha il vantaggio di riportare qualunque soluzione dei triangoli sferici rettangoli ad un solo caso generale che la sua elegante simmetria permette d'imprimere facilmente nella memoria. Ecco questo principio.

In un triangolo ciascuna parte è necessariamente *compresa* tra due altre che gli sono o immediatamente *congiunte* o che sono *separate* da queste. Il lato a per esempio è *compreso* tra i due angoli *congiunti* B e C ovvero tra i lati b e c, *separati* da questi angoli congiunti. Ciascun lato ha dunque ancora due angoli per parti *congiunte* e due lati per parti *separate*, nel mentre che ciascun angolo ha due lati per parti *congiunte* e due angoli per parti *separate*. Ma quando si tratta di un triangolo rettangolo non bisogna tener conto dell'angolo retto, e applicando questa suddivisione di parti *congiunte* e di parti *separate*, si debbono considerare le cinque parti di questi triangoli, diverse dall'angolo retto, legate immediatamente tra esse come se l' angolo retto non esistesse. Con questo metodo ciascun lato dell' angolo retto ha per parti *congiunte* l' angolo obliquo adiacente e l' altro lato, e per parti *separate*, l' ipotenusa e l' angolo obliquo opposto. In generale a, b, c, essendo sempre i tre lati, e B, C gli angoli obliqui, le parti *congiunte* e le parti *separate* da ciascuna di queste cinque parti sono:

	Congiunte	Separate
Per a	B, C	b, c
b	C, c	a, B
c	b, B	a, C
B	a, c	C, b
C	a, b	B, c.

Ora, ecco la legge interamente generale che lega qualunque parte *compresa* alle sue *congiunte* e alle sue *separate*.

Il *coseno* di una parte *compresa* è sempre uguale al prodotto tanto delle *cotangenti* delle parti *congiunte*, quanto dei *seni* delle parti *separate*.

Quando i lati dell' angolo retto intervengono nella formula, in luogo di questi lati bisogna impiegare i loro *complementi*, ed allora ai *seni*, *coseni* e *cotangenti* sostituire i loro *coseni*, *seni* e *tangenti*. Così per il lato a, per esempio, le parti *congiunte* danno,

$$\cos a = \cot B \cdot \cot C,$$

e le parti *separate*

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c.$$

Applicando ugualmente questo principio a tutte le parti, otterremo dieci equazioni che somministreranno le trenta formule della tavola, prendendo successivamente, in ciascuna, per incognita, una delle tre quantità che essa contiene.

25. Tutti i casi della soluzione dei triangoli sferici in generale, possono riportarsi a quattro casi generali essenzialmente differenti i quali sono:

1.° I tre lati son dati.
2.° Due lati son dati con un angolo.
3.° Due angoli son dati con un lato.
4.° I tre angoli son dati.

Gli esamineremo successivamente.

26. I tre lati a, b, c, di un triangolo sferico qualunque essendo dati, si determinerebbe uno degli angoli, A per esempio, con l'aiuto dell' espressione fondamentale (q)

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}.$$

Ma siccome questa formula è poco comoda per il calcolo logaritmico, si deve farle subire una trasformazione. Sostituiamo questo valore di cos A nell' espressione

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A = 1 - \cos A$$

avremo

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c - \cos a + \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}.$$

Ma (*vedi* Seno, n.° 16)

$$\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c + \cos b \cdot \cos c = \cos (b - c),$$

e si ha in generale (*vedi* Seno, n.° 17)

$$\cos q - \cos p = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \left(p + q\right) \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2} \left(p - q\right).$$

Così,

$$\cos \left(b - c\right) - \cos a = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \left(a + b - c\right) \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2} \left(a - b + c\right)$$

e per conseguenza

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \sqrt{\left\{ \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\left(a + b - c\right) \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2} \left(a - b + c\right)}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c} \right\}}.$$

Rendendo questa formula omogenea e prendendo i logaritmi, viene

$$\operatorname{Log} . \operatorname{sen} \frac{1}{2} A = 10 + \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{Log} . \operatorname{sen} \frac{1}{2} \left(a + b - c\right) \right.$$

$$\left. + \operatorname{Log} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \left(a - b + c\right) - \operatorname{Log} . \operatorname{sen} b - \operatorname{Log} . \operatorname{sen} c \right\}.$$

Siccome possiamo indicare successivamente ciascuno degli angoli con A, facendo il lato opposto $= a$ e i due altri $= b, = c$, potremo evidentemente calcolare nella stessa maniera i tre angoli del triangolo.

27. Due lati a e b essendo dati con un angolo, la determinazione dei due altri angoli e del terzo lato dipende dalla posizione dell' angolo conosciuto che può essere tanto opposto ad uno dei lati conosciuti, quanto compreso tra questi due lati. Questo caso generale si suddivide dunque in due casi particolari.

I. Siano dati i lati a e b con l' angolo A opposto ad uno di essi. La determinaziona dell' angolo B opposto al lato b è dedotta dalla proporzione (20)

$$\operatorname{sen} a : \operatorname{sen} b :: \operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B ;$$

donde

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a},$$

il che può essere calcolato direttamente con i logaritmi.

Per determinare l' angolo C, bisogna ottenere una relazione tra i lati a e b e l' angolo compreso C, con l' aiuto dell' espressioni fondamentali (q).

Ora la prima e l' ultima di quest' espressioni essendo messe sotto la forma

$$\cos A \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c = \cos a - \cos b \,.\, \cos c,$$
$$\cos C \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} a = \cos c - \cos b \,.\, \cos a,$$

se si elimina $\cos c$ tra queste due equazioni, viene

$$\cos A \,.\, \operatorname{sen} c + \cos C \,.\, \operatorname{sen} a \,.\, \cos b = \cos a \,.\, \operatorname{sen} b ;$$

poi mettendo in quest' ultima il valore di

$$\operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A},$$

ricavato dalla proporzione fondamentale

$$\operatorname{sen} a : \operatorname{sen} c :: \operatorname{sen} A : \operatorname{sen} C,$$

si ottiene

$$\cot A \,.\, \operatorname{sen} C + \cos C \,.\, \cos b = \cot a \,.\, \operatorname{sen} b \,\ldots\ldots\ldots (r),$$

che è la relazione domandata. Per potar ricavare da quest' espressione il valore dell' angolo C, bisogna ricorrere ad un artifizio di calcolo determinando un angolo ausiliare φ tale che si abbia

$$\operatorname{tang} \varphi = \cos b \,.\, \operatorname{tang} A,$$

poichè quest' angolo essendo conosciuto, si ha

$$\operatorname{tang} A = \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\cos b} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos b \,.\, \cos \varphi},$$

ovvero

$$\cot A = \frac{\cos b \,.\, \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi}.$$

Sostituendo questo valore di $\cot A$ nell' equazione (r), quest' equazione diventa

$$\frac{\cos b}{\operatorname{sen} \varphi} \left\{ \cos \varphi \,.\, \operatorname{sen} C + \operatorname{sen} \varphi \,.\, \cos C \right\} = \cot a \,.\, \operatorname{sen} b,$$

ma (*vedi* Seno, n.° 16),

$$\cos\varphi \,.\, \text{sen}\, C + \text{sen}\,\varphi \,.\, \cos C = \text{sen}\left(C+\varphi\right),$$

dunque definitivamente

$$\text{sen}\left(C+\varphi\right) = \frac{\text{tang}\, b \,.\, \text{sen}\,\varphi}{\text{tang}\, a},$$

espressione che fa conoscere il valore di $C+\varphi$ e per conseguenza quello di C.

Così, per recapitolare, i dati essendo a, b ed A, si comincerà da calcolare φ con l'aiuto della relazione

$$\text{Log tang}\,\varphi = \text{Log}\cos b + \text{Log tang}\, A - 10,$$

quindi si troverà la somma $C+\varphi$ mediante questa formula

$$\text{Log sen}\left(C+\varphi\right) = \text{Log tang}\, b + \text{Log sen}\,\varphi - \text{Log tang}\, a.$$

Quanto al terzo lato c, si calcolerà mediante la proporzione tra i seni degli angoli e i seni dei lati opposti, la quale dà

$$\text{sen}\, c = \frac{\text{sen}\, a \,.\, \text{sen}\, C}{\text{sen}\, A}.$$

II. Siano dati i lati a e b con l'angolo compreso C.

Ricavando dall' equazione (r) il valore di cot A, si ha

$$\cot A = \frac{\cot a \,.\, \text{sen}\, b - \cos C \,.\, \cos b}{\text{sen}\, C},$$

il quale potrebbe servire a calcolare l'angolo A con l'aiuto di un angolo ausiliare. Come ancora per calcolare l'angolo B, ugualmente con l'aiuto di un ausiliare, si avrebbe l'equazione simile

$$\cot B = \frac{\cot b \,.\, \text{sen}\, a - \cos C \,.\, \cos a}{\text{sen}\, C},$$

ma è molto più pronto di servirsi, in questo caso, delle formule conosciute sotto il nome d' *analogie del Nepero* e delle quali parleremo inseguito. Esse danno in questo caso

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}\left(A+B\right) = \cot\frac{1}{2}C \,.\, \frac{\cos\frac{1}{2}\left(a-b\right)}{\cos\frac{1}{2}\left(a+b\right)},$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}\left(A-B\right) = \cot\frac{1}{2}C \,.\, \frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}\left(a-b\right)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}\left(a+b\right)}.$$

Avendo dunque calcolato con questo mezzo la semi-somma $\frac{1}{2}\left(A+B\right)$ e la semi-differenza $\frac{1}{2}\left(A-B\right)$ degli angoli A e B, si ha immediatamente l'angolo A, aggiungendo questa semi-differenza con questa semi-somma, e l'angolo B, sottraendo la semi-differenza dalla semi-somma.

Gli angoli A e B essendo conosciuti, si calcolerà c mediante la proporzione

$$\operatorname{sen} A : \operatorname{sen} C :: \operatorname{sen} a : \operatorname{sen} c,$$

ovvero si determinerà direttamente ricavando $\cos c$ dalla terza dell'espressioni (q), il che dà

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos C.$$

Facendo dunque scelta di un angolo ausiliare φ, come

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\cos C \cdot \operatorname{tang} b}{R},$$

avremo, operando come sopra,

$$\cos c = \frac{\cos b}{\cos \varphi} \cdot \cos\left(a - \varphi\right).$$

È sempre utile di calcolare le medesime parti di un triangolo in due modi differenti, quando ciò non si facesse che per verificare l'esattezza dei resultamenti.

28. Due angoli e un lato essendo dati, si presentano ancora due casi particolari: 1.° Il lato è adiacente ai due angoli; 2.° esso è opposto ad uno di loro.

I. Siano dati gli angoli A e B col lato adiacente c.

I due altri lati a e b possono essere facilmente calcolati mediante le analogie del Napero;

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}\left(a+b\right) = \operatorname{tang} \frac{1}{2} c \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}\left(A-B\right)}{\cos \frac{1}{2}\left(A+B\right)},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}\left(a-b\right) = \operatorname{tang} \frac{1}{2} c \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\left(A-B\right)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\left(A+B\right)},$$

le quali danno la loro semi-somma e la loro semi-differenza.

Quanto al terz'angolo C, avendo preso un angolo ausiliare φ, come

$$\cot \varphi = \frac{\cos c \cdot \operatorname{tang} B}{R},$$

avremo

$$\cos C = \cos B \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(A - \varphi\right)}{\operatorname{sen} \varphi}.$$

Conosciuti i lati a e b, possiamo ancora calcolare quest' angolo C mediante la proporziona

$$\text{sen}\, a : \text{sen}\, c :: \text{sen A} : \text{sen C}.$$

II. Siano dati gli angoli A e B col lato a opposto ad uno di essi.
Per calcolare il lato b, si ha la proporzione

$$\text{sen A} : \text{sen B} :: \text{sen}\, a : \text{sen}\, b.$$

Si calcolerà il lato c mediante la formula

$$\text{sen}\left(c - \varphi\right) = \frac{\text{tang B} \,.\, \text{sen}\, \varphi}{\text{tang A}},$$

nella quale l' angolo ausiliare φ è dato dalla relazione

$$\text{tang}\, \varphi = \frac{\cos \text{B} \,.\, \text{tang A}}{\text{R}}.$$

Finalmente, il terz' angolo C sarà calcolato dalla formula

$$\text{sen}\left(\text{C} - \varphi\right) = \frac{\cos \text{A} \,.\, \cos \varphi}{\text{R}},$$

nella quale l' angolo ausiliare φ resulta dalla relazione

$$\text{tang}\, \varphi = \frac{\cos \text{B} \,.\, \cos \varphi}{\text{R}}.$$

Finalmente, il terzo angolo C sarà calcolato dalla formula

$$\text{sen}\left(\text{C} - \varphi\right) = \frac{\cos \text{A} \,.\, \cos \varphi}{\text{R}},$$

nella quale l' angolo ausiliare φ resulta dalla relazione

$$\cot \varphi = \frac{\cos a \,.\, \text{tang B}}{\text{R}}.$$

29. I tre angoli essendo dati, per determinare il lato a, per esempio, si ha la formula

$$\text{sen}\, \frac{1}{2}\, a = \sqrt{\left(\frac{-\cos \frac{1}{2}\left(\text{A}+\text{B}+\text{C}\right) \,.\, \cos \frac{1}{2}\left(\text{B}+\text{C}-\text{A}\right)}{\text{sen B} \,.\, \text{sen C}}\right)} \; \ldots\ldots (s),$$

che possiamo ugualmente applicare ai due lati b e c con l' aiuto dell' osservazione che abbiamo fatta (n.° 26) sopra la formula che dà un angolo mediante i tre lati

Quanto alla deduzione di questa formula, si ricava dall' espressioni fondamentali (q) mediante trasformazioni analoghe a quella che abbiamo digià impiegate in ciò che precede, trasformazioni che facilitano estremamente le considerazioni delle proprietà del *triangolo polare*, del quale gli autori dei trattati di trigonometria fanno un grand' uso. Ecco qual' è questo triangolo polare: ABC essendo un triangolo sferico qualunque, immaginiamo un secondo triangolo A'B'C',

i vertici del quale A', B', C' siano i poli dei circoli massimi di cui i lati a, b, c del triangolo ABC fanno parte; allora i vertici A, B, C di questo saranno respettivamente i poli dei lati a', b', c' del triangolo A'B'C', ed è facile vedere 1.° che gli angoli A', B', C' del triangolo polare A'B'C' sono i supplementi dei lati a, b, c del triangolo ABC; 2.° reciprocamente gli angoli A, B, C del triangolo ABC sono i supplementi dei lati a', b', c' del triangolo polare A'B'C'. Si ha dunque ancora

$$\begin{aligned} A' &= 180^\circ - a, \\ B' &= 180^\circ - b, \\ C' &= 180^\circ - c, \\ a' &= 180^\circ - A, \\ b' &= 180^\circ - B, \\ c' &= 180^\circ - C. \end{aligned}$$

Queste relazioni danno i mezzi di trasformare assai facilmente l'espressioni fondamentali (q), come ne daremo un esempio.

L'espressione (q) applicata al triangolo A'B'C' diventa

$$\cos A' = \frac{\cos a' - \cos b' \cdot \cos c'}{\operatorname{sen} b' \cdot \operatorname{sen} c'},$$

così, mettendo invece di A', a', b', c' i valori di sopra, viene

$$\cos\left(180^\circ - a\right) = \frac{\cos(180^\circ - A) - \cos(180^\circ - B) \cdot \cos(180^\circ - C)}{\operatorname{sen}(180^\circ - B) \cdot \operatorname{sen}(180^\circ - C)}.$$

Ora in generale,

$$\cos\left(180^\circ - x\right) = -\cos x,$$

$$\operatorname{sen}\left(180^\circ - x\right) = \operatorname{sen} x;$$

dunque quest'ultima espressione è la stessa cosa che

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C} \quad \ldots\ldots (t),$$

si otterrebbe nella stessa maniera

$$\left.\begin{aligned} \cos b &= \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} C} \\ \cos c &= \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (t),$$

formule che danno i lati in funzioni degli angoli come le formule (q) danno gli angoli in funzioni dei lati. Possiamo per verità dedurre direttamente quest' ultime formole dall'espressioni (q), ma in un modo molto meno semplice

Ora è evidente che operando sopra l'espressioni (t) come l'abbiamo fatto al n.° 26 sopra l'espressioni (q), otterremo la formola (s).

30. Le formule del Nepero, delle quali abbiamo fatto uso ai numeri 27 e 28, si deducono facilmente dall'espressioni (q); si preferiscono all'uso degli angoli ausiliari in tutti i casi nei quali esse possano essere impiegate, ed esse sono

infatti più dirette e più eleganti. L' uso dell' angolo ausiliare rende inutile la considerazione della perpendicolare con l' aiuto della quale si riporta la soluzione di un triangolo obliquangolo a quella di un triangolo rettangolo, e il complesso di questa soluzione si trova assai completamente dato in ciò che precede per dispensarci di recapitolarla in una tavola. Esistono ancora un gran numero di formule particolari la cui applicazione può facilitare la soluzione di certi casi, soprattutto quando alcune parti del triangolo proposto sono piccolissime rapporto alle altre, ma dobbiamo rimandare alla *Trigonometria* del Cagnoli; questo è il trattato più completo che esista sopra questo ramo importante della geometria.

Siccome per i triangoli rettangoli, tutte le volte che la quantità cercata è data dal suo seno vi è indecisione nella scelta che possiamo fare dei due archi che gli corrispondono, ciò non ostante si diminuisce molto il numero di questi *casi dubbiosi* mediante le tre seguenti regole:

1.° Se la somma di due lati è minore di 180°, l' angolo opposto al più piccolo è acuto;

2.° Se la somma di due lati è maggiore di 180°, l' angolo opposto al maggiore è ottuso.

3.° Quando la somma di due lati è uguale a 180°, la somma degli angoli opposti è ugualmente uguale a 180°.

Bisogna inoltre fare scrupolosamente attenzione ai *segni* delle linee trigonometriche, le quali sono *positive* o *negative* secondo la grandezza degli archi ai quali esse si riferiscono; per esempio, se il resultamento di un calcolo dà

$$\cos A = -m,$$

e che al valore di m, astrazione fatta dal segno, corrisponda nelle tavole dei seni un arco α, siccome, generalmente,

$$\cos\left(90^\circ + z\right) = -\cos z,$$

l' arco A non è punto allora $=\alpha$, ma bensì $=90^\circ+\alpha$. Bisogna consultare l' articolo Seno per tutto ciò che che riguarda i *segni*. Quanto all' esecuzione dei calculi numerici, essa si effettua nella stessa maniera che per le formule della trigonometria rettilinea; così possiamo contentarci di presentarne un solo esempio.

31. Conoscendo la latitudine e longitudine di due città, si domanda la grandezza dell' arco del circolo massimo terrestre che esse comprendono, ovvero, ciò che è la stessa cosa, la loro più corta distanza.

Sia A la città di Parigi, la cui longitudine è o e la latitudine 48° 50′ 13″, e B la città di Marsilia, la cui longitudine è 3° 1′ 54″ e la latitudine 43° 17′ 50″. Immaginiamo un triangolo sferico formato dal polo boreale e i due luoghi A e B. In questo triangolo si conosce l' angolo al polo che è la differenza in longitudine dei punti A e B, e i due lati compresi AC e BC i quali sono i complementi delle latitudini dei punti A e B. Si ha dunque, servendosi della notazione consacrata:

$$C = 3^\circ\ 1'\ 54''$$
$$b = 90^\circ - 48^\circ\ 50'\ 13'' = 41^\circ\ 9'\ 47''$$
$$a = 90^\circ - 43^\circ\ 17'\ 50'' = 46^\circ\ 42'\ 10''$$

e si tratta di calcolare il lato c.

Questo problema dipende dal II° caso del numero 27; così bisogna cominciare dal calcolare un angolo ausiliare φ mediante la formula

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\cos C \,.\, \text{tang}\, b}{R}$$

il che dà

$$\begin{array}{rl} \text{Log}\,.\,\cos C = & 9,9993918 \\ \text{Log}\,.\,\text{tang}\, b = & 9,9416582 \\ \hline & 19,9410500 \\ & -10,0000000 \\ \hline \text{Log}\,.\,\text{tang}\,\varphi = & 9,9410500\,; \end{array}$$

donde $\varphi = 41°\ 7'\ 24''$.

Sostituiamo questo valore di φ nella formula

$$\cos c = \frac{\cos b}{\cos \varphi}\,.\,\cos\left(a - \varphi\right),$$

e, siccome

$$a - \varphi = 5°\ 34'\ 46'',$$

avremo

$$\begin{array}{rl} \text{Log}\cos b = & 9,8767024 \\ \text{Log}\cos(a-\varphi) = & 9,9979375 \\ \hline & 19,8746399 \\ \text{Log}\cos\varphi = & 9,8769654 \\ \hline \text{Log}\cos c = & 9,9976745\,, \end{array}$$

il che fa conoscere

$$c = 5°\ 55'\ 26''.$$

Prendendo per la lunghezza del grado terrestre quella del grado medio della Francia, che è 111 108 metri (*vedi* TERRA), si ha dunque 658170 metri per la distanza da Parigi a Marsilia.

Si trova nel *Trattato di geodesia* del signor Puissant tutte le formule trigonometriche impiegate nella geodesia e nell'astronomia. Rimanderemo dunque, per le particolarità, a quest'opera come pure a quella del Cagnoli digià citata.

TRIGONOMETRIA SFEROIDALE (*Geodesia*). I triangoli formati sull'ellissoide di rivoluzione mediante linee della più corta distanza di una grandezza qualunque non potendo risolversi come i triangoli sferici, L'Eulero tentò fino dal 1763 di trattargli con un metodo particolare, fondato sulla teoria *dei massimi e minimi*, e giunse a tre equazioni che esprimono le relazioni che hanno tra loro i sei elementi di un triangolo sferoidale formato da due meridiani ellittici ed un arco della più corta distanza: esse fanno l'oggetto di una memoria inserita tra quelle dell'Accademia delle Scienze di Berlino. Ciò non ostante, il Clairaut, venti anni avanti, aveva digià indicato le principali proprietà del triangolo sferoidale rettangolo. Le difficoltà che l'Eulero provò per integrare due delle sue equazioni differenziali resero la sua soluzione incompleta. Ciò è, da una parte, il rapporto tra la differenziale della più corta distanza, che in generale è una curva a doppia curvatura, e quella di una delle latitudini date; dall'altra parte, il rapporto tra la differenziale di questa stessa latitudine e quella dell'angolo al polo. Ma queste difficoltà furono superate da Dionigi del

Soggiorno, perchè questo geometra fece subire a queste stesse equazioni delle trasformazioni che, adattandole alla sfera inscritta, ne rendono più semplice la forma e le fanno facilmente integrare mediante le serie. Fin d'allora, il Legendre e l'Oriani, profittando di quest' ingegnoso processo, giunsero, ciascuno per la loro parte, a perfezionare la teoria dei triangoli sferoidali obliquangoli, il primo, nelle memorie dell'Accademia delle Scienze di Parigi (anno 1806), il secondo, nelle memorie di fisica e matematica di Milano, dello stesso anno. Ciò non ostante era da desiderarsi che la risoluzione di tutti i casi possibili di questi triangoli esposta in un modo diffusissimo dall' Oriani, fosse riportata a metodi di calcolo più semplici, e tale è lo scopo che ci siamo proposti nel nostro Nuovo saggio di Trigonometria sferoidale pubblicato nel quattordicesimo volume delle *Memorie dell' Instituto*. Ecco quali sono i principii di questa trigonometria.

§. PRIMO.

Dell' equazioni differenziali di una linea Geodesica e della loro integrazione mediante le serie.

Se una retta AM (*Tav.* CLXXXV, *fig.* 1), condotta nel piano di un triangolo massimo ABC tracciato sulla terra, è prolungata di una quantità MM', questo prolungamento non sarà punto contenuto nel piano del secondo triangolo BCD per l'effetto della curvatura della superficie terrestre; ma la sua projezione orizzontale MN, determinata dalla verticale M'N, rappresenterà, con la prima parte AM, la più corta distanza dal punto A al punto N. Per provarlo, rivolgiamo la linea MM' sul triangolo BCD, facendola girare intorno di BC come asse, e supponendo l'angolo CMM' invariabile. Mediante questo movimento M' descriverà un piccolissimo arco di circolo che potrà considerarsi come una retta M'N perpendicolare al piano BCD; e se, nel triangolo MM'N rettangolo in N, l'ipotenusa è uguale ad MM' e indicata da ds o dal primo elemento della linea geodesica, e che il piccolissimo angolo M'MN lo sia con i, avremo

$$M'N = ds \,.\, \operatorname{sen} i = ds \,.\left(i - \frac{i^3}{6} \,.\,.\,.\,.\,.\right),$$

$$M\,N = ds \,.\, \cos i = ds \,.\left(i - \frac{i^2}{2} \,.\,.\,.\,.\,.\right).$$

Così è evidente che trascurando i termini inferiori a i^2, il secondo elemento MN della linea geodesica è, ad un infinitesimo circa del terz' ordine, uguale a ds, e che la normale M'N compresa tra il prolungamento di AM e la superficie terrestre è del second' ordine. La distanza AMN è dunque uguale alla retta AMM'. Dunque, generalmente, una linea tracciata sulla terra mediante biffe che si guardano l'une con le altre è la più corta tra tutte quelle che si possano condurre tra le sue estremità, e la proprietà analitica di una tale linea resulta dal sapere che la sua differenziale ds è costante.

Ora, siano x, y, z le coordinate rettangolari dell' origine di quest' elemento ds o del punto A della sferoide terrestre; quelle delle sue estremità M saranno $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$; e le coordinate del punto M', estremità del secondo elemento

$$MM' = ds,$$

saranno evidentemente

$$x+2dx = X',$$
$$y+2dy = Y',$$
$$z+2dz = Z'.$$

Da un' altra parte abbiamo dimostrato che la piccola normale M'N o la perpendicolare al secondo triangolo BCD è del second' ordine; così essa può considerarsi come la diagonale di un parallelepipedo rettangolo i cui lati sarebbero dello stesso ordine, vale a dire

$$d^2x\,,\ d^2y\,,\ d^2z:$$

le coordinate del punto N o del piede di questa normale sono perciò

$$x+2dx-d^2x=X\,,$$
$$y+2dy-d^2y=Y\,,$$
$$z+2dz-d^2z=Z.$$

Di più, dalla teoria conosciuta delle superficie curve, la cui equazione differenziale è

$$dz=pdx+qdy=\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy\,,$$

si ha in generale, per le due equazioni delle projezioni verticali della loro normale

$$X'-X+p\left(Z'-Z\right)=o\,,$$

$$Y'-Y+q\left(Z'-Z\right)=o\,;$$

e se tra esse si elimina $Z'-Z$, la terza equazione di questa linea sul piano delle xy, sarà

$$q\left(X'-X\right)-p\left(Y'-Y\right)=o\,,$$

ovvero, mettendo per $X'-X$ e $Y'-Y$ i loro precedenti valori, avremo

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)d^2x-\left(\frac{dz}{dx}\right)d^2y=o\ \ldots\ldots\ (1).$$

Quest' equazione sarà quella della linea della più corta distanza soll' ellissoide di rivoluzione, mettendoci per p e q i loro valori ricavati dall' equazione di questo corpo, cioè:

$$b^2\left(x^2+y^2\right)+a^2z^2=a^2b^2,$$

quando si prende l' asse delle z per quello di rotazione. Ora, si ha differenziando,

$$dz=pdx+qdy=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{z}\,dx-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y}{z}\,dy\,;$$

così l' equazione (1) diventa

$$xd^2y-yd^2x=o.$$

Dividendo quindi per ds e integrando, si ha, a motivo di ds costante e dell' omogeneità,

$$xdy-ydx=Cds\ \ldots\ldots\ (2),$$

C essendo la costante introdotta dall' integrazione.

Per far conoscere come quest' ultima equazione conduce ad una proprietà caratteristica della più corta distanza, facciamo CT (*Tav.* CLXXXV, *fig.* 2), ovvero

$$z = t,$$

e

$$TM = q;$$

il triangolo rettangolo Cpm, nel quale

$$Cp = x, \quad pm = y \quad e \quad Cm = q$$

darà evidentemente, facendo l' angolo $APM = \varphi$,

$$x = q \cos \varphi,$$
$$y = q \operatorname{sen} \varphi,$$

e mediante la differenziazione, avremo

$$dx = dq \cos \varphi - qd\varphi \operatorname{sen} \varphi,$$
$$dy = dq \operatorname{sen} \varphi + qd\varphi \cos \varphi,$$

valori che cangiano l' equazione (2) nella seguente:

$$q^2 d\varphi = Cds \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Da un' altra parte, il triangolo elementare $a'm'M$ rettangolo in m' dà sen PMA, ovvero

$$\operatorname{sen} V = \frac{a'm'}{ds},$$

e i due archi simili

$$F'G' = d\varphi,$$

ed $a'm'$, essendo proporzionali ai loro raggi respettivi CF' e $q-dq$, si ha

$$a'm' = qd\varphi,$$

prendendo ciò non ostante CF' per unità e trascurando il termine del second' ordine $-dqd\varphi$; dunque

$$\operatorname{sen} V = \frac{qd\varphi}{ds},$$

e

$$q \operatorname{sen} V = C.$$

Così la proprietà della linea la più corta è di rendere $q \operatorname{sen} V$ costante; ed osserviamo che quando si prende per meridiano fisso il piano delle xz perpendicolare alla linea geodesica $MM'A$, il che evidentemente è permesso, l' azimut V al punto A è retto, e la costante C è uguale all' ordinata AI, valore iniziale di q.

L' equazione (3) esprime il rapporto della differenziale della linea geodesica a quella della longitudine di uno dei suoi punti. Ne esiste un' altra tra queste due differenziali che si deduce dall' espressione

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Infatti, mettendo in questa i loro valori per dx e dy trovati sopra, e facendo attenzione che $z=t$, si ha

$$ds^2=dq^2+q^2d\varphi^2+dt^2,$$

e sostituendo in questa nuova espressione per ds il suo valore $\frac{q^2d\varphi}{C}$, quindi eliminando $d\varphi$, viene

$$\left.\begin{array}{l} q^2\left(q^2-C^2\right)d\varphi^2=C^2\left(dt^2+dq^2\right) \\ \left(q^2-C^2\right)ds^2=q^2\left(dt^2+dq^2\right) \end{array}\right\} \ldots\ldots (4).$$

Avanti d'integrare queste due equazioni, bisogna eliminare da ciascuna di esse una delle variabili t, q con l'aiuto dell'equazione del meridiano mobile PMF, che è

$$a^2t^2+b^2q^2=a^2b^2.$$

Ma, per giungere a resultamenti più semplici, prendiamo, secondo quanto prescriva Dionigi del Soggiorno, una nuova variabile λ tale, che si abbia l'ascissa

$$t=b\ \text{sen}\ \lambda,$$

nel qual caso λ sarà l'angolo che fa col piano dell'equatore xy il raggio b del circolo inscritto al meridiano mobile, e di cui l'ascissa di uno dei suoi punti è la variabile t. Questo valore essendo introdotto nell'equazione precedente di questo meridiano, si ha l'ordinata

$$q=a\cos\lambda;$$

e la costante C, che è uguale a q sen V, diventa

$$C=a\ \text{sen}\ V\cos\lambda.$$

Ad un altro punto M' della più corta distanza, per la quale λ si cangia in λ' e V in V', si ha ugualmente

$$C=a\ \text{sen}\ V'\cos\lambda'.$$

Finalmente, al punto A, dove l'azimut di AM' si suppone di 90°, si ha, indicando con ψ ciò che diventa λ,

$$C=a\cos\psi.$$

Resulta dunque da questi tre valori la relazione

$$\cos\psi=\text{sen}\ V\cos\lambda=\text{sen}\ V'\cos\lambda';$$

vale a dire che *i seni degli angoli azimuttali all'estremità di una linea geodesica stanno tra loro reciprocamente come i coseni delle latitudini ridotte di questi medesimi punti*. In questo punto si chiamano *latitudini ridotte* gli angoli λ e λ', ed ecco perchè.

Se per il punto M si conduce la normale MO terminata al piccolo asse dell'ellissoide, l'angolo POM sarà il complemento della latitudine vera l di que-

sto punto, ovvero, ciò che equivale allo stesso, avremo

$$\frac{TO}{TM} = \text{tang}\, l;$$

ma, nell'ellisse, la suunormale TO corrispondente alle coordinate t, q, essendo

$$TO = \frac{qdq}{dt},$$

si ha ancora

$$\frac{TO}{TM} = \frac{dq}{dt} = \frac{a}{b}\,\text{tang}\,\lambda;$$

per conseguenza,

$$\text{tang}\, l = \frac{a}{b}\,\text{tang}\,\lambda,$$

ovvero

$$\text{tang}\,\lambda = \frac{b}{a}\,\text{tang}\, l.$$

Si vede dunque che l'angolo λ è più piccolo di l, poichè a è il raggio dell'equatore e b quello del polo.

Ora, se nell'equazioni differenziali (3) si sostituisce per t, q e C i loro valori respettivi b sen λ, $a\cos\lambda$ e $a\cos\psi$, avremo, a motivo che l'angolo φ e la linea s aumentano quando λ diminuisce,

$$d\varphi = -\frac{d\lambda\cos\psi}{a\cos\lambda}\sqrt{\frac{a^2\,\text{sen}^2\lambda + b^2\cos^2\lambda}{\cos^2\lambda - \cos^2\psi}},$$

$$ds = -d\lambda\cos\lambda\sqrt{\frac{a^2\,\text{sen}^2\lambda + b^2\cos^2\lambda}{\cos^2\lambda - \cos^2\psi}}.$$

Queste sono l'equazioni differenziali dell'arco AM perpendicolare al meridiano fisso PA. Il Legendre rende la loro integrazione facilissima mediante le serie, facendo loro precedentemente subire alcune trasformazioni con l'aiuto di un angolo sussidiario; ma si giunge allo stesso scopo e più direttamente cangiando sotto i radicali i coseni in seni, e facendovi, per abbreviare,

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2} = \varepsilon.$$

Infatti, si comincia ad avere

$$ds = -\frac{bd\,.\,\text{sen}\,\lambda}{\left(\text{sen}^2\psi - \text{sen}^2\lambda\right)^{\frac{1}{2}}}\,.\,\sqrt{1 + \varepsilon\,\text{sen}^2\lambda},$$

$$d\varphi = -\frac{b}{a}\,.\,\frac{\cos\psi\cos\lambda\,.\,d\lambda}{\cos^2\lambda\left(\text{sen}^2\psi - \text{sen}^2\lambda\right)^{\frac{1}{2}}}\,.\,\sqrt{1 + \varepsilon\,\text{sen}^2\lambda},$$

e se si sviluppa il radicale $\sqrt{1+s\,\text{sen}^2\lambda}$ fino al termine dell' ordine s^2 inclusivamente, i primi termini dei valori di ds e $d\varphi$ saranno respettivamente

$$-b\frac{d\,.\,\frac{\text{sen}\,\lambda}{\text{sen}\,\psi}}{\left(1-\frac{\text{sen}^2\lambda}{\text{sen}^2\psi}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$-\frac{b}{a}\frac{d\,.\,\frac{\text{tang}^2\lambda}{\text{tang}^2\psi}}{\left(1-\frac{\text{tang}^2\lambda}{\text{tang}^2\psi}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

poichè, mediante le formule trigonometriche conosciute, si ha identicamente

$$\text{sen}^2\psi-\text{sen}^2\lambda=\left(\text{tang}^2\psi-\text{tang}^2\lambda\right)\cos^2\psi\cos^2\lambda;$$

e gl' integrali respettivi saranno

$$b\,\text{arco}\left(\cos=\frac{\text{sen}\,\lambda}{\text{sen}\,\psi}\right),$$

$$\frac{b}{a}\,\text{arco}\left(\cos=\frac{\text{tang}\,\lambda}{\text{tang}\,\psi}\right),$$

ovvero, ciò che equivale allo stesso

$$b\tau,\quad \frac{b}{a}\omega,$$

facendo

$$\cos\tau=\frac{\text{sen}\,\lambda}{\text{sen}\,\psi},$$

$$\cos\omega=\frac{\text{tang}\,\lambda}{\text{tang}\,\psi}.$$

Quanto agli altri termini, essi saranno della forma

$$\frac{Au^m du}{\left(K^2-u^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

e s' integreranno col processo conosciuto.

In ultim' analisi e a motivo di

$$\frac{b}{a}=1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{3}{8}\varepsilon^2\,.\,.\,.\,.\,.\,.,$$

avremo mediante un poca d' attenzione

$$\frac{s}{b}=\left(1+\frac{1}{4}\epsilon\,\text{sen}^2\psi-\frac{3}{64}\epsilon^2\,\text{sen}^4\psi\right)\sigma$$

$$+\left(\frac{1}{8}\epsilon\,\text{sen}^2\psi-\frac{1}{32}\epsilon^2\,\text{sen}^4\psi\right)\text{sen}\,2\,\sigma$$

$$-\frac{1}{256}\epsilon^2\,\text{sen}^4\psi\,\text{sen}\,4\,\sigma\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(A),$$

$$\varphi=\omega-\left[\frac{1}{2}\epsilon-\frac{3}{8}\epsilon^2-\frac{1}{16}\epsilon^2\,\text{sen}^2\psi\right]\sigma\cos\psi$$

$$+\frac{1}{32}\epsilon^2\,\text{sen}^2\psi\cos\psi\,\text{sen}\,2\,\sigma\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(B),$$

e siccome è utile di avere σ in funzione di $\frac{s}{b}$, applicheremo il ritorno delle serie alla serie (A) mettendola sotto questa forma

$$\sigma=\frac{s}{b}+P\epsilon+Q\epsilon^2+\;.\;.\;.\;.\;.\;,$$

limitata ai termini del second' ordine; quindi da ciò si ricava

$$\text{sen}\,2\,\sigma=\text{sen}\,2\left(\frac{s}{b}\right)+2P\,\epsilon\cos 2\left(\frac{s}{b}\right),$$

$$\text{sen}\,4\,\sigma=\text{sen}\,4\left(\frac{s}{b}\right).$$

Dopo di che verrà, fatte tutte le sostituzioni (*Vedi* GEODESIA)

$$\sigma=\frac{s}{b}\left(1-\frac{1}{4}\epsilon\,\text{sen}^2\psi+\frac{7}{64}\epsilon^2\,\text{sen}^4\psi\right)$$

$$-\text{sen}\,2\left(\frac{s}{b}\right)\left(\frac{1}{8}\epsilon\,\text{sen}^2\psi-\frac{1}{16}\epsilon^2\,\text{sen}^4\psi\right)$$

$$+\frac{s}{b}\cos 2\left(\frac{s}{b}\right)\left(\frac{1}{16}\epsilon^2\,\text{sen}^4\psi\right)$$

$$+\frac{5}{256}\epsilon^2\,\text{sen}\,4\left(\frac{s}{b}\right)\text{sen}^4\psi\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(C).$$

Inoltre si avrà, mediante quello che precede

$$\text{sen}\,V'=\frac{\cos\lambda}{\cos\lambda'}\;.\;.\;.\;.\;.\;(D),$$

V' essendo l'angolo che l'arco s fa col meridiano che passa per la sua estremità M'.

§. II.

FORMULE FONDAMENTALI DELLA TRIGONOMETRIA SFEROIDALE.

Consideriamo ora due triangoli sferici *pma*, *pm'a* (*Tav.* CLXXXIV, *fig.* 4), rettangoli in *a* e corrispondenti ai triangoli sferoidali della stessa specie PMA,

PM'A; e supponiamo che gli azimut V, V' siano i medesimi da una parte e dall'altra, ma che le latitudini dei punti a, m, m' siano ψ, λ, λ'; finalmente, rappresentiamo respettivamente con σ, σ', ξ gli archi am, am', mm'; con ω, ω' gli angoli mpa, $m'pa$; avremo, per la proprietà dei triangoli sferici rettangoli, le seguenti relazioni:

$$\cos\psi = \cos\lambda \operatorname{sen} V, \qquad \operatorname{sen}\sigma = \operatorname{sen}\omega\cos\lambda \ldots (I),$$

$$\cos\sigma = \frac{\operatorname{sen}\lambda}{\operatorname{sen}\psi}, \qquad \cos\omega = \cos\sigma \operatorname{sen} V \ldots (II),$$

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\operatorname{tang}\sigma}{\cos\psi}, \qquad \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\psi = \cos V\cos\lambda \ldots (III).$$

Quelle che compongono il primo sistema a sinistra daranno la posizione del punto A, quando il punto M sarà dato. Si ha, inoltre, rapporto al punto M', la cui latitudine vera è l' e la latitudine ridotta λ',

$$\operatorname{sen}\lambda' = \operatorname{sen}\psi\cos\sigma' \ldots\ldots\ldots\ldots (IV),$$

$$\operatorname{tang}\omega' = \frac{\operatorname{tang}\sigma'}{\cos\psi} \ldots\ldots\ldots\ldots (V),$$

$$\cos\lambda'\operatorname{sen} V' = \cos\lambda\operatorname{sen} V \ldots\ldots\ldots\ldots (VI).$$

Finalmente, la proporzione dei quattro seni dà

$$\operatorname{sen}\left(\omega' - \omega\right)\cos\lambda' = \operatorname{sen}\left(\sigma' - \sigma\right)\operatorname{sen} V \ldots\ldots\ldots (VII).$$

Potremo dunque, con l'aiuto delle relazioni (IV, V, VI), determinare tre delle quattro variabili l', σ', ω', V' quando una di esse sarà conosciuta.

Da ciò e dalle formule (A) e (B) si deducono generalmente due altre equazioni relative al triangolo sferoidale obliquangolo PMM', nel quale MM' $= s$, e la differenza in longitudine MPM' $= \varphi$, cioè:

$$\begin{aligned}\frac{s}{b} = &\left(\sigma' - \sigma\right)\left(1 + \frac{1}{4}\,\varepsilon\operatorname{sen}^2\psi - \frac{3}{64}\,\varepsilon^2\operatorname{sen}^4\psi\right)\\ &+ \left(\operatorname{sen}2\sigma' - \operatorname{sen}2\sigma\right)\left(\frac{1}{8}\,\varepsilon\operatorname{sen}^2\psi - \frac{1}{32}\,\varepsilon^2\operatorname{sen}^4\psi\right)\\ &- \left(\operatorname{sen}4\sigma' - \operatorname{sen}4\sigma\right)\left(\frac{1}{256}\,\varepsilon^2\operatorname{sen}^4\psi\right)\ldots\ldots\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\varphi = \omega' - \omega &- \left(\sigma' - \sigma\right)\left(\frac{1}{2}\,\varepsilon - \frac{3}{8}\,\varepsilon^2\right)\cos\psi\\ &+ \left(\sigma' - \sigma + \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\sigma' - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\sigma\right)\left(\frac{1}{16}\,\varepsilon^2\operatorname{sen}^2\psi\cos\psi\right)\ldots\ldots\end{aligned}$$

Si ha inoltre, rivolgendo il valore di $\frac{s}{b}$, quest'altra serie, ugualmente dovuta al Legendre, e la cui convergenza non dipende, come le precedenti, che dalla

piccolezza di ε,

$$
\begin{aligned}
\sigma' = \sigma + \frac{s}{b}\left(1 - \frac{1}{4}\,\varepsilon\,\text{sen}^2\psi + \frac{7}{64}\,\varepsilon^2\,\text{sen}^4\psi\right) \\
- \text{sen}\,\frac{s}{b}\cos\left(2\sigma + \frac{s}{b}\right)\left(\frac{1}{4}\,\varepsilon\,\text{sen}^2\psi - \frac{1}{8}\,\varepsilon^2\,\text{sen}^4\psi\right) \\
+ \frac{s}{b}\cos\left(2\sigma + 2\frac{s}{b}\right)\left(\frac{{}^2\,\text{sen}^4\psi}{16}\right) \\
+ \text{sen}\,\frac{s}{b}\cos\left(2\sigma + \frac{s}{b}\right)\cos\left(2\sigma' + 2\frac{s}{b}\right)\left(\frac{\varepsilon^2\,\text{sen}^4\psi}{16}\right) \\
+ \text{sen}\,2\,\frac{s}{b}\cos\left(4\sigma + 2\frac{s}{b}\right)\left(\frac{\varepsilon^2\,\text{sen}^4\psi}{128}\right) \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Se, invece di far uso del rapporto ε, si volesse impiegare il quadrato dell' eccentricità dell' ellissoide di rivoluzione, che è

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

si avrebbe evidentemente

$$\varepsilon = e^2\,\frac{a^2}{b^2}.$$

Tutta la teoria dei triangoli sferoidali è racchiusa in quest' equazioni, ed è mediante certi artifizj di calcolo che si giunge a dedurne i valori dell' incognite propri ai differenti casi della trigonometria attuale. Per esempio, se si trattasse di trovare sull' ellissoide di rivoluzione la più corta distanza di due punti qualunque dati dalla loro latitudine e dalla loro longitudine, bisognerebbe procedere come l' abbiamo fatto conoscere all' articolo (Descrizione Geometrica della Francia); o ricorrere alla soluzione che l' illustre geometra il signor Ivory ha dato di questo problema, senza appoggiarlo sulla considerazione della sfera inscritta. (*Vedi* la pagina 31 dell' ottavo volume del *Philosophical Magazine*). Ma passiamo alle questioni più usuali le quali possano essere trattate elementarmente.

§. III.

Risoluzione dei triangoli sferici pochissimo curvi.

Comincieremo dal fare osservare che il Legendre ha riportato la risoluzione di un triangolo geodesico qualunque, ma poco esteso, a quella di un triangolo rettilineo della medesima specie; e ciò per mezzo di questo teorema, che *qualunque triangolo sferico assai poco curvo corrisponde sempre ad un triangolo rettilineo che ha i lati della stessa lunghezza, ma di cui gli angoli opposti a questi lati sono quelli del triangolo sferico, diminuiti ciascuno del terzo dell' eccesso della loro somma sopra due angoli retti.*

Non rammenteremo l' elegante dimostrazione che il Lagrange ne ha data nei primi fascicoli del *Giornale della Scuola Politecnica*, e che il Legendre ha riprodotto nella sua *Trigonometria*; ma eccone un' altra meno conosciuta e che ci sembra abbastanza semplice.

Supponiamo che al triangolo sferico i dati del quale sono i due lati a, b, e

i due angoli opposti A, B, corrisponda il triangolo rettilineo a, b e A', B', e che si abbia

$$A' = A - x,$$
$$B' = B - x;$$

si domanda di determinare x.

Mediante la proprietà del triangolo rettilineo

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen}(A-x)}{\text{sen}(B-x)},$$

ma, a motivo della serie conosciuta

$$\text{sen}\, a = a - \frac{a^3}{2 \,.\, 3} + \frac{a^5}{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} - \text{ec.},$$

si ha con pochissima differenza, considerata l'estrema piccolezza di a rapporto al raggio della terra,

$$a = \text{sen}\, a + \frac{a^3}{6} = \text{sen}\, a\left(1 + \frac{a^2}{6}\right);$$

per conseguenza,

$$\frac{\text{sen}\, a\left(1 + \frac{a^2}{6}\right)}{\text{sen}\, b\left(1 + \frac{b^2}{6}\right)} = \frac{\text{sen}(A-x)}{\text{sen}(B-x)} = \frac{\text{sen}\, A\,(1 - x \cot A)}{\text{sen}\, B\,(1 - x \cot B)}.$$

D'altra parte il triangolo sferico corrispondente, dando

$$\frac{\text{sen}\, a}{\text{sen}\, b} = \frac{\text{sen}\, A}{\text{sen}\, B},$$

si ha, semplicizzando, mandando via i denominatori e trascurando le quantità del quart' ordine,

$$x = \frac{a^2 - b^2}{6}\left(\frac{1}{\cot B - \cot A}\right) = \frac{a^2 - b^2}{6} \,.\, \frac{\text{sen}\, A\, \text{sen}\, B}{\text{sen}(A-B)},$$

valore che è esattamente il terzo dell'area del triangolo sferico considerato come rettilineo, come è facile dimostrarlo. Ma la somma dei tre angoli di un triangolo sferico è

$$A + B + C = A' + B' + C' + \Sigma = 180^\circ + \Sigma,$$

Σ essendo l'area di questo triangolo, quando l'unità d'angolo è il quarto della circonferenza e l'unità di superficie il quarto dell'emisfero. Ora quest'area differendo estremamente poco da quella del triangolo rettilineo i cui lati fossero a, b, c, si ha

$$x = \frac{1}{3}\Sigma;$$

e, per conseguenza

$$A' = A - \frac{1}{3}\Sigma,$$

$$B' = B - \frac{1}{3}\Sigma;$$

pertanto

$$A+B+C=A-\frac{1}{3}\Sigma+B-\frac{1}{3}\Sigma+C'+\Sigma.$$

Finalmente

$$C'=C-\frac{1}{3}\Sigma.$$

Ora è evidente che se con i dati a, c, A, C, del triangolo sferico, si formasse un secondo triangolo rettilineo a, c, $A-y$, $C-y$, si avrebbe

$$y=x=\frac{1}{3}\Sigma,$$

ovvero, ciò che equivale allo stesso, questo secondo triangolo sarebbe uguale al primo. Dunque, ec.

L' eccesso sferico Σ riferito ad una sfera del raggio $=1$ ha evidentemente per valore $\frac{\alpha}{r^2}$, quando α indica l' area del triangolo proposto sopra una sfera il cui raggio è r; così, in generale, quest' eccesso è proporzionale all' area del triangolo al quale esso appartiene, e per averlo in secondi bisogna fare

$$\Sigma=\frac{\alpha R''}{r^2},$$

$R''=\frac{1}{\text{sen } 1''}$ essendo il numero dei secondi compresi in un arco uguale al raggio.

Il più gran triangolo che sia stato misurato nell' operazione del meridiano della Francia prolungato in Spagna è il seguente:

	Angoli sferici	Lati opposti
Campvey	$A=59^\circ\ 50'\ 53'',40$	$a=142201^m,77$
Desierto.	$B=42\ .\ 5\ .\ 36\ ,07$	$b=110235\ ,63$
Mongo.	$C=78\ .\ 4\ .\ 9\ ,53$	$c=160903\ ,96$
	$180^\circ\ 0'\ 39'',00$	

Gli angoli di questo triangolo sferico resultano dagli angoli orizzontali osservati al centro delle stazioni, e diminuiti ciascuno del terzo dell' errore totale trovato di $1'',6$; vale a dire che questi tre ultimi angoli formavano $180^\circ\ 0'\ 40'',6$. Per eseguire questa correzione, è stato necessario calcolare l' eccesso sferico di questo triangolo, il quale, mediante ciò che abbiamo detto, è

$$\Sigma=\frac{\alpha}{r^2\ \text{sen } 1''}=\frac{c^2\ \text{sen } A\ \text{sen } B}{2r^2\ \text{sen } 1''\ \text{sen }(A+B)}=39'',$$

$r=6366198^m$, essendo il raggio medio della terra.

Osserviamo di più che togliendo da ciascuno degli angoli sferici

$$\frac{1}{3}\Sigma=13'',$$

si hanno gli angoli *medj* ossia quelli del triangolo rettilineo corrispondente;

così

Campvey	$A' = 59°\ 50'\ 40'',40$	. . . . .	$a =$ . . . . . .
Desierto	$B' = 42\ .\ 5\ .\ 23\ ,07$	. . . . .	$b = 110235,63$
Mongo.	$C' = 78\ .\ 3\ .\ 56\ ,53$	. . . . .	$c =$ . . . . . .
	$180°\ 0'\ 0''$		

Supponendo solamente conosciuto il lato b e gli angoli medj A', B', C', si troverebbero i due altri lati mediante la trigonometria rettilinea; ma la trigonometria sferica conduce agli stessi resultamenti nella segnente maniera:

Prima di tutto, la base essendo piccolissima relativamente al raggio r della terra, sarà più esatto di valutare in metri i seni dei lati a, b, c; e per eseguir ciò, si ha

$$\text{Log sen } b = \text{Log } b - \frac{Mb^2}{6r^2},$$

$M = 0,43429$ . . . . . essendo il modulo delle tavole, ossia

$$\text{Log } M = 9,63778;$$

e siccome d'altra parte

$$\text{Log } b = 5,0423220,$$

si ha

$$\text{Log sen } b = 5,0423003.$$

Quindi, dalle due proporzioni

$$\text{sen B : sen A :: sen } b : \text{sen } a,$$
$$\text{sen B : sen C :: sen } b : \text{sen } c,$$

si deduce facilmente, a motivo dei valori di sopra degli angoli sferici A, B, C,

$$\text{Log sen } a = 5,1528690$$
$$\text{Log sen } c = 5,2065206.$$

Finalmente per passare dai seni agli archi, si farà attenzione che in generale

$$\text{Log } x = \text{Log sen } x + \frac{M \text{ sen}^2 x}{6r^2},$$

almeno con pochissima differenza; pertanto

$$\text{Log } a = 5,1529052,$$

e

$$a = 142201^m,77,$$
$$\text{Log } c = 5,2065668,$$

e

$$c = 160903^m,96.$$

Questo processo rigoroso non è dunque molto più lungo del metodo del Legendre e può servire a verificare i valori numerici ottenuti mediante quello.

§. IV.

Determinazione delle Latitudini e Longitudini Geografiche.

Un altro problema importante di geodesia, è quello di determinare le coordinate geografiche dei vertici dei triangoli i quali, mediante il loro concatenamento, ricoprono tutta l'estensione di un paese del quale ci proponiamo di eseguire la carta. Queste coordinate sono la latitudine, la longitudine e l'altezza (*vedi* questa parola); ma alcune volte è necessario ricorrere precedentemente all'osservazioni celesti per avere, tanto la latitudine e la longitudine di uno di questi vertici presi per punto di partenza, quanto l'*azimut* o l'inclinazione di uno dei lati dei triangoli sul meridiano di questo stesso punto. Questi elementi geografici essendo ottenuti, le differenze di latitudine, di longitudine e dell'azimut degli altri vertici, paragonati successivamente uno ad uno, si calcolano sulla terra mediante l'aiuto delle formule che provengono dalla risoluzione di un triangolo sferoidale di cui si conoscono due lati e l'angolo compreso, e ai quali si giunge abbastanza semplicemente come segue.

Sia $AB = k$ (*Tav.* CLXXXIV, *fig.* 6) un lato del triangolo o un arco della più corta distanza di un grado e mezzo d'amplitudine al più; PA, PB i meridiani delle sue estremità; l, l' le latitudini dei punti A e B; e indichiamo con p, p' le loro longitudini contate dal primo meridiano PM, vale a dire gli angoli APM, BPM; finalmente si chiamino v, v' gli azimut di k contati dal nord all'ovest, ovvero, ciò che equivale allo stesso, gli angoli BAP, B'BP supposti acuti.

Premesso ciò, se k, l, p, v sono i dati del problema l', p', v' saranno necessariamente funzioni del lato k, e mediante il teorema del Taylor si avrà

$$l' = l + \frac{dl}{dk}k + \frac{1}{2}\frac{d^2l}{dk^2}k^2 + \frac{1}{2\,.\,3}\frac{d^3l}{dk^3}k^3 + \ldots\ldots$$

$$p' = p + \frac{dp}{dk}k + \frac{1}{2}\frac{d^2p}{dk^2}k^2 + \frac{1}{2\,.\,3}\frac{d^3p}{dk^3}k^3 + \ldots\ldots$$

$$v' = v + \frac{dv}{dk}k + \frac{1}{2}\frac{d^2v}{dk^2}k^2 + \frac{1}{2\,.\,3}\frac{d^3v}{dk^3}k^3 + \ldots\ldots$$

Rimane dunque da determinare i coefficienti differenziali di queste tre serie. Ora cominciando dall'assomigliare il triangolo sferoidale APA ad un triangolo sferico i cui lati siano k, $90^\circ - \lambda$, $90^\circ - l'$, e formando il triangolo elementare APR, nel quale

$$AR = dk,$$

questo triangolo somministrerà evidentemente queste relazioni:

$$\text{sen}\left(l + dl\right) = \text{sen}\ l \cos dk + \cos l\ \text{sen}\ dk \cos v,$$

$$\frac{\text{sen}\ dp}{\text{sen}\ dk} = \frac{\text{sen}\,(v + dv)}{\cos l},$$

$$\frac{\text{sen}\,(v + dv)}{\cos l} = \frac{\text{sen}\ v}{\cos\,(l + dl)},$$

poichè

$$AP = 90^\circ - l,$$

e

$$RP = 90^0 - \left(l + dl\right);$$

e se si mandano via i denominatori, se si sviluppi e si riduca conformemente alla dottrina degli infinitesimi, verrà

$$\frac{dl}{dk} = \cos v,$$

$$\frac{dp}{dk} = \frac{\operatorname{sen} v}{\cos l},$$

$$\frac{dv}{dl} = \operatorname{tang} v \operatorname{tang} l;$$

per conseguenza

$$\frac{dv}{dk} = \operatorname{sen} v \operatorname{tang} l.$$

Questi coefficienti differenziali del prim' ordine essendo trovati, passeremo senza difficoltà a quelli degl' ordini superiori facendo tutto variare, e si otterrà in ultima analisi,

$$l' = l + k \cos v - \frac{1}{2} k^2 \operatorname{sen}^2 v \operatorname{tang} l$$

$$- \frac{1}{2} k^3 \operatorname{sen}^2 v \cos v \left(\frac{1}{3} + \operatorname{tang}^2 l\right),$$

$$p' = p + k \frac{\operatorname{sen} v}{\cos l} + \frac{1}{2} k^2 \frac{\operatorname{sen} 2v \operatorname{tang} l}{\cos l}$$

$$+ \frac{1}{3} k^3 \frac{\operatorname{sen} v \cos^2 v}{\cos l} \left(1 + 3 \operatorname{tang}^2 l\right)$$

$$- \frac{1}{3} k^3 \frac{\operatorname{sen}^3 v}{\cos l} \operatorname{tang}^2 l,$$

$$v' = v + k \operatorname{sen} v \operatorname{tang} l + \frac{1}{4} k^2 \operatorname{sen} 2v \left(2 \operatorname{tang}^2 l + 1\right)$$

$$+ k^3 \operatorname{sen} v \cos^2 v \operatorname{tang} l \left(1 + \frac{4}{3} \operatorname{tang} l\right)$$

$$- k^3 \operatorname{sen} v \operatorname{tang} l \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^2 l\right).$$

Ma per contare gli azimut dal sud all' ovest e da o fino a 360°, nel modo praticato dagli ingegneri geografi francesi, si cangerà v in $180^\circ - z$ e v' in $360^\circ - z'$, ed avremo

$$\operatorname{sen} v = \operatorname{sen} z,$$

$$\cos v = - \cos z.$$

Finalmente le precedenti serie, mediante un poca d'attenzione, si cangeranno nelle seguenti:

$$l'-l=-k\cos z-\frac{1}{2}k^2\operatorname{sen}^2 z\operatorname{tang} l$$
$$+\frac{1}{6}k^3\operatorname{sen}^2 z\cos z\left(1+3\operatorname{tang}^2 l\right),$$

$$p'-p=k\frac{\operatorname{sen} z}{\cos l}-\frac{1}{2}k^2\frac{\operatorname{sen} 2z\operatorname{tang} l}{\cos l}$$
$$+\frac{1}{3}k^3\frac{\operatorname{sen} z\cos^2 z}{\cos l}\left(1+3\operatorname{tang}^2 l\right)$$
$$-\frac{1}{3}k^3\frac{\operatorname{sen}^3 z}{\cos l}\operatorname{tang}^2 l,$$

$$z'-z=180^\circ-\left(p'-p\right)\operatorname{sen} l+\frac{1}{4}k^2\operatorname{sen} 2z$$
$$-\frac{1}{2}k^3\operatorname{sen} z\cos^2 z\operatorname{tang} l$$
$$+\frac{1}{6}k^3\operatorname{sen}^3 z\operatorname{tang} l.$$

In queste formule, la linea geodesica k si considera appartenere ad una sfera del raggio 1, poichè tale è la supposizione tacita che è stata fatta in principio; ma nella pratica si prende per questo raggio la normale N alla sferoide terrestre, compresa tra il punto la cui latitudine è l e l'asse della terra. Ora questa normale, data in unità metriche come la linea k, avendo per espressione

$$N=\frac{a}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2 l}},$$

così, come è facile provarlo, si deve porre in vece di k e delle sue potenze l'espressioni $\frac{k}{N}$, $\frac{k^2}{N^2}$, ec., quantità che a motivo della loro piccolezza, sono respettivamente del 1.°, del 2.°, ec., ordine. Di più, tutti i termini delle serie di sopra, per essere espressi in secondi di grado debbono essere moltiplicati per r'', vale a dire per il numero dei secondi contenuti in un arco uguale al raggio, ovvaro, ciò che significa lo stesso, con $\frac{1}{\operatorname{sen} 1''}$.

Ciò non ostante conviene considerare che la latitudine l' determinata in tal maniera non sarebbe esattamente quella che, sulla terra ellittica, corrisponderebbe all'estremità della linea geodesica k; ma se indichiamo con R il raggio di curvatura del meridiano alla latitudine media

$$\frac{1}{2}\left(l+l'\right)=\psi,$$

basterà, per maggiore esattezza, moltiplicare il valore di $l'-l$ per il rapporto

$\frac{N}{R}$; perchè quando due archi della più corta distanza sono della stessa grandezza sulla sfera e sull' ellissoide di rivoluzione, le loro amplitudini sono in ragione inversa dei loro raggi di curvatura. In questo caso,

$$R = \frac{a(1-e^2)}{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \psi\right)^{\frac{3}{2}}},$$

e si ha, sviluppando in serie mediante la formula del binomio,

$$\frac{N}{R} = 1 + e^2 \cos^2 l + e^4 \cos^2 l + \frac{3}{2} e^2 \frac{k}{N} \cos z \operatorname{sen} l \cos l;$$

ma il più delle volte i due primi termini bastano.

Quanto alla seconda formula, con la quale si ottiene $p'-p$, essa conviene nello stesso tempo alla sfera e alla sferoide, ed essa è allora vantaggiosamente sostituita da questa:

$$p'-p = k \frac{\operatorname{sen} z}{\cos l'},$$

nella quale la latitudine l' è data dalla prima equazione. Segue quasi lo stesso della terza equazione; ciò non ostante a tutto rigore bisognerebbe aggiungervi il termine del terz' ordine $\frac{1}{4} \frac{k^2}{N^2} e^2 \operatorname{sen} 2z \cos^2 l$, per adattarla esattamente alla sferoide terrestre il cui quadrato dell' eccentricità è e^2. *Vedi* sopra di ciò il *Trattato di Geodesia* del signor Puissant, o la *Nuova descrizione geometrica della Francia*, la quale contiene una tavola che considerabilmente abbrevia i calcoli di questo genere.

Una sola applicazione delle due prime formole ridotte ai termini del primo e del second' ordine ne farà sufficientemente conoscere l' utilità.

Paoblema. Dalle operazioni geodesiche della Francia, si sa che la latitudine del Panteon è

$$l = 48^\circ\, 50'\, 48'', 6,$$

che la sua longitudine orientale è

$$p = -34'', 6.$$

Si sa di più che l' azimut di Montlhery sull' orizzonte del Panteon è

$$z = 13^\circ\, 3'\, 23'', 5,$$

contata dal sud all' ovest; finalmente, che il logaritmo della distanza di questi due punti, valutata in metri, è

$$\operatorname{Log} k = 4,3822185.$$

Si domanda la latitudine l' e la longitudine p' di Montlhery.

Soluzione. Si hanno da risolvere le due seguenti formule:

$$l' - l = -\left[\frac{k \cos z}{\text{N} \operatorname{sen}''} + \frac{1 k^2 \operatorname{sen}^2 z}{2\text{N}^2 \operatorname{sen} 1''} \operatorname{tang} l\right]\left(1 + e^2 \cos^2 l\right),$$

$$p' - p = \frac{k \operatorname{sen} z}{\text{N} \operatorname{sen} 1'' \cos l'}.$$

Prima di tutto, se in

$$\text{N} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 l}},$$

si fa

$$e^2 \operatorname{sen}^2 l = \operatorname{sen}^2 \theta,$$

avremo

$$\text{N} = \frac{a}{\cos \theta},$$

e, a motivo di

$$\text{Log}\, a = 6,8046154,$$
$$\text{Log}\, e^2 = 7,8108714,$$

quando si suppone lo schiacciamento della terra di

$$\frac{1}{308,64} = 0,00324;$$

si troverà

$$\text{Log} \operatorname{sen}^2 \theta = 7,5644132,$$

donde

$$\text{Log} \operatorname{sen} \theta = 8,7822066,$$

e

$$\text{Log} \cos \theta = 9,9992020.$$

Pertanto,

$$\text{Log N} = \text{Log}\, a - \text{Log} \cos \theta = 6,8054134.$$

Si ha inoltre

$$\text{Log} \operatorname{sen} 1'' = 4,6855749$$

e

$$\text{Log}(1 + e^2 \cos^2 l) = 0,0012153,$$

e, con tutti questi dati, si trova facilmente

$$l' - l = -760'',5 = -0^\circ\ 12'\ 40'',5,$$
$$p' - p = +266'',1 = +0^\circ\ 4'\ 26'',1.$$

Finalmente, si ha

$$\text{latit}.\ l' = 48^\circ\ 38'\ 8'',1$$
$$\text{long}.\ p' = 0^\circ\ 3'\ 51'',5\ \text{(occidentale)}$$

La gran triangolazione che serve di fondamento alla nuova carta topografica della Francia somministra un numero immenso di posizioni geografiche che sono

state calcolate come era necessario, e le cui altezze al di sopra del livello del mare sono ugualmente conosciute (*Vedi* ALTEZZA).

Terminando, faremo osservare, che la differenza degli azimut alle estremità della linea k si valutano abbastanza semplicemente, con l'aiuto di questa formola

$$s'-s = 180° - (p'-p)\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(l+l')}{\cos\frac{1}{2}(l-l')},$$

alla quale conduce direttamente quelle delle analogie del Nepero, che dà la tangente della semi-somma degli angoli incogniti in funzione di due lati e dell'angolo compreso. Diremo di più che il valore analitico precedente di $l'-l$ esprimerebbe in metri la lunghezza di un arco del meridiano compreso tra le parallele dell'estremità di k data nella stessa misura, se, per stabilire l'omogeneità nei termini della serie, si dividessero respettivamente il secondo e il terzo termine per la normale N e per il suo quadrato N^2. Questo è infatti uno dei metodi di rettificazione che sono stati impiegati per determinare le diverse parti del meridiano di Francia.

TRILATERO. Si chiama così, in *geometria*, una figura che ha tre lati. Questa parola non è più in uso: una tal figura si chiama un *triangolo*.

TRINCANO (DESIDERIO GREGORIO), ingegnere francese, nato il 26 Dicembre 1719 a Vaux, si diede di buon'ora con ardore e successo grande alle matematiche, ed in breve fu fatto professore aggiunto alla scuola di artigiani a Besanzone. In seguito militò in Svizzera, in Italia e in Olanda, e tornato in patria si applicò allo studio delle fortificazioni. Nel 1756 fu mandato a Tunisi per dirigere i lavori che il dey voleva fare per fortificare la città di Kairovan. Al suo ritorno in Francia, fu fatto professore di matematica dei cavalleggeri; e dalla sua scuola uscirono distinti allievi, tra i quali sono da notarsi il figlio dello stesso Trincano e Rieber. Questo professore morì verso il 1792. Le sue opere sono. I *Discours sur les fortifications, et de la nécessité d'un maître de mathématiques pour l'infanterie*, Besanzone, 1755, in-4, di 60 pag. II *Eléments de fortification, de l'attaque et de la défense des places*, Parigi, 1768, in-8; ivi, 2.ª ediz. 1786, 2 vol., in-8, con 51 tav. Tale opera contiene l'esposizione di nuovi sistemi immaginati dell'autore, il quale gli stimava preferibili a quelli di Cohorn e di Vauban: ma sembra che i militari non ne abbiano giudicato così; III *Traité complet d'arithmétique*, ivi, 1781, in-8; e ivi, 1787, in-8.

TRINCANO (LUIGI CARLO), figlio del precedente, nato a Besanzone nel 1754, aveva fatto eccellenti studj matematici, e prometteva di correre con onore l'arringo di tali scienze, quando una morte prematura lo rapì il 5 Ottobre 1785. Oltre diversi opuscoli e discorsi da lui recitati al museo di Parigi di cui era segretario, abbiamo di lui due opere stampate insieme con quelle di suo padre: 1.° *Nouveau système d'ordre renforcé*, negli *Éléments de fortification*, tom. I, pag. 266; 2.° *Mémoire sur les logarithmes des quantités negatives*, in seguito al *Traité d'arithmétique*. Havvi l'elogio funebre di Trincano scritto da Bicquilley, Parigi, 1786, in-8 di 40 pag.: il suo ritratto è stato intagliato da Ponce.

TRINOMIO (*Alg.*). Quantità composta di tre termini. (*Vedi* POLINOMIO).

TRIONI (*Astron.*). Si chiamano così le stelle che compongono tanto l'Orsa maggiore che l'Orsa minore: e dal loro numero è venuta la denominazione di *Settentrione*, *Septem Triones*, che è stata data alla parte del nord.

TRIPARTIZIONE. Divisione in tre parti uguali di una grandezza qualunque (*vedi* TRISEZIONE).

TRIPLATA. Si chiama *ragione triplata* il rapporto che vi è tra i cubi di due numeri.

Non bisogna confondere una *ragione triplata* con una *ragione tripla*, poichè quest' ultima non è che il rapporto di un numero ad un altro che essa contiene tre volte. Per esempio, il rapporto di 3 ad 1 è una ragione tripla, nel mentre che quello di 8 ad 1 è la ragione triplata dei numeri 2 ed 1.

TRISEZIONE. Divisione di una grandezza in tre parti uguali.

Questo termine è specialmente consacrato in geometria per indicare la divisione di un angolo in tre parti uguali, problema divenuto assai celebre perchè esso non può risolversi geometricamente, vale a dire con la riga e col compasso. Possiamo paragonare il problema della *trisezione dell' angolo* a quelli della *duplicazione del cubo* e della *quadratura del circolo* sopra i quali si sono vanamente esercitati per due mila anni, volendo fargli dipendere da condizioni incompatibili con la loro natura. La soluzione di questo dipende da un' equazione del terzo grado che possiamo costruire con diverse curve. Vedi sopra di ciò un' opera del signor Garnier, intitolata *Trisezione dell' angolo*.

TRISPASTON. Nome che gli antichi davano ad una macchina formata dalla riunione di tre pulegge. (*Vedi* Taglia o Polispasto).

TROCOIDE. Nome della curva più generalmente conosciuta sotto quello di Cicloida.

TROMBA. (*Mec. Idraul.*) Macchina idraulica destinata ad elevare l' acqua. Si distinguono tre specie principali di *trombe*: la *tromba aspirante*, la *tromba follante* e la *tromba* nello stesso tempo *follante* e *aspirante*.

Tromba aspirante. Essa si compone di un corpo di tromba (*Tav.* CLXV, *fig.* 1) aperta in alto, e nella parte inferiore del quale è adattato un tubo che s' immerge nell' acqua del serbatojo, e che si chiama *tubo d' aspirazione*. Nella riunione del tubo d' aspirazione col corpo di tromba esiste una valvula S' destinata a permettere, sollevandosi, all' acqua di entrare dal tubo d' aspirazione nel corpo di tromba, e ad impedire, abbassandosi, di uscirne per la stessa strada. Nel corpo di tromba esiste uno stantuffo forato con un buco ricoperto di una valvula S, e il cui fusto è attaccato all' estremità di una leva, il cui giuoco è quello di far salire e scendere alternativamente lo stantuffo.

Quando lo stantuffo si eleva, fa il vuoto nel corpo di tromba, l' acqua sale nel tubo d' aspirazione mediante l' effetto della pressione atmosferica, ed allora la valvula S è chiusa e la valvula S' aperta. Quando lo stantuffo discende, la valvula S' è chiusa, la valvula S è aperta, l' acqua elavata al di sopra di S' passa attraverso dello stantuffo e si trova sollevata da esso nella seguente ascensione.

L' altezza della colonna d' acqua che misura lo sforzo dello stantuffo è uguale alla differenza dei livelli dei serbatoj superiore e inferiore.

Siccome dipende dalla pressione dell' aria il far salire l' acqua in questa tromba, e che questa pressione non può sostenere una colonna d' acqua che di 32 piedi circa d' altezza, o $10^{m},4$ (*vedi* Idrostatica, n.° 17), è necessario che il tubo d' aspirazione abbia una lunghezza verticale minore di 32 piedi.

1. Ecco una più particolare descrizione di questa macchina; La figura 3 della Tav. CCXLV, rappresenta una tromba di questo genere, la figura 4 ne è il suo taglio verticale.

c è il tubo d' aspirazione, o quello che s' immerge nell' acqua, *hh* il corpo di tromba, *b* lo stantuffo che si muove nel corpo di tromba mediante un moto di va e vieni, impresso con l' aiuto di una leva a gomito *d*. La figura 4 della Tav. CCXLVI fa conoscere il giuoco dell' apparecchio nel momento in cui lo stantuffo risale; allora esso spinge al di sopra di esso l' acqua contenuta nel corpo di tromba e la getta nello sgorgatojo; nello stesso tempo, il vuoto formandosi al di

sotto dello stantuffo, la pressione atmosferica che agisce sull' acqua del pozzo la fa salire nel tubo d' aspirazione; essa spinge la valvula f, chiamata *valvula dormiente*, e si spande nel corpo di tromba seguendo lo stantuffo. Quando questo, giunto nell' alto della sua corsa, comincia a scendere, il peso dell' acqua chiude la valvula f, e l'acqua contenuta nel corpo di tromba si trova isolata; la resistenza che essa oppone alla discesa dello stantuffo solleva la valvula c dello stantuffo, dimodochè quando esso è giunto al basso della sua corsa, l' acqua che esso aveva sotto di se si trova al di sopra. In una nuova ascensione, si trova davanti ad esso una massa d' acqua da inalzare, la sua valvula si chiude, la valvula dormiente f si riapre, e così di seguito. Abbiamo supposto, in ciò che precede, che il tubo d' aspirazione come pure il corpo di tromba fossero digià pieni d' acqua nel momento in cui lo stantuffo si muove; per meglio render conto del modo con cui questa prima azione si effettua, immaginiamo lo stantuffo nel suo punto più basso e tutti i tubi vuoti. Ordinariamente rimane tra lo stantuffo e la valvula dormiente uno spazio più o meno grande, che gli idraulici tedeschi chiamano lo *spazio nocibile*, per ragioni che quanto prima vedremo; l'aria della quale questo spazio è ripieno quando lo stantuffo si eleva per la prima volta dilatandosi a misura che lo stantuffo sale, e terminando per riempire tutta la capacità del corpo di tromba, diminuisce di densità e di forza elastica, dimodochè essa non può più fare equilibrio alla pressione costante che l' aria esterna esercita sopra la superficie nn dell' acqua del pozzo, e che è trasmessa alla valvula dormiente dall' aria contenuta nel tubo d' aspirazione: questa valvola è dunque spinta di basso in alto, essa si apre, e l' aria del tubo d'aspirazione si mescola con quella del corpo di tromba, nel tempo che una colonna d' acqua sale nel tubo aspiratore fino ad un' altezza tale che la sua pressione aumentata di ciò che è dovuto all' aria interna faccia equilibrio alla pressione atmosferica. Se ora si abbassa lo stantuffo, la valvula dormiente si chiude, quella dello stantuffo si apre, l' aria contenuta nel corpo di tromba passa sopra lo stantuffo, e quando esso risale di nuovo, la massa d' aria compresa tra esso e la colonna d' acqua trovandosi diminuita, questa colonna acquista una maggiore altezza in virtù della pressione sempre costante dall' aria esterna esercitata al di fuori sopra la sua superficie dell' acqua del pozzo. Così, a ciascuna salita dello stantuffo, l'acqua sale nel tubo d' aspirazione, fino a tanto che la densità dell' aria contenuta nel corpo di tromba sia uguale a quella dell' aria esterna, e siccome a ciascuna discesa una parte di quest' aria interna passa al di sopra dello stantuffo che la scaccia, risalendo, nel tubo di scaricamento, ne resulta che dopo un dato numero di colpi di stantuffo il corpo di tromba e il tubo d' aspirazione saranno vuoti d' aria, e, per conseguenza, che la colonna d' acqua acquisterà la più grande altezza alla quale la pressione atmosferica possa fare equilibrio nel vuoto; ammettendo dunque che la distanza verticale dello stantuffo, al livello nn dell' acqua del pozzo non superi quest' altezza, quando essa è nel più alto della sua corsa, il giuoco della tromba si troverà definitivamente stabilito, come l' abbiamo esposto nel principio.

2. La prima condizione essenziale del giuoco di una tromba aspirante consiste perciò nel sapere che la più grande altezza dello stantuffo al di sopra del livello dell' acqua del pozzo sia tutto al più uguale all' altezza della colonna d' acqua che la pressione atmosferica è capace di sostenere nel vuoto; ora, indicando con h l' altezza media del barometro nel luogo in cui la tromba è stabilita, e con K quella di questa colonna d' acqua, si sa che il rapporto delle quantità h e K è uguale al rapporto inverso delle densità del mercurio e dell' acqua (*vedi* IDRODINAMICA), vale a dire che si ha

$$h : K = 1 : 13,598,$$

donde

$$K = 13,598\,h.$$

Così, al livello del mare, dove si ha

$$h = 0^m,762,$$

l'altezza K non può superare $10^m,4$, ma osservando che la pressione atmosferica varia da un giorno all'altro nello stesso luogo, bisogna ammettere che, per le trombe aspiranti, il limite che lo stantuffo non deve superare nella sua ascensione non potrebbe essere al più di $12h$ al di sopra del pozzo, h essendo l'altezza media del barometro nella località dov'è la tromba; questo sarà di 9 a 8 metri, secondo che l'elevazione del luogo al di sopra del livello del mare sarà di 100 a 1000 metri.

3. Un'altra circostanza tende a diminuire l'altezza K, questa è lo spazio che rimane tra lo stantuffo giunto al basso della sua corsa e la valvula dormiente. Infatti, indichiamo con e questo spazio, con E la capacità totale del corpo di tromba, e si chiami h' l'altezza della colonna d'acqua $= 13,598h$, la quale rappresenta la pressione atmosferica. Sia, di più, k l'altezza alla quale l'acqua è giunta nel tubo d'aspirazione, dopo alcuni colpi di stantuffo, e φ la forza elastica dell'aria compresa tra la superficie di quest'acqua e la valvula dormiente o piuttosto φ l'altezza di una colonna d'acqua il cui peso misurerebbe questa forza elastica; siccome questa, più il peso della colonna d'acqua k fa equilibrio alla pressione atmosferica, abbiamo

$$h' = k + \varphi,$$

donde

$$\varphi = h' - k.$$

D'altra parte, lo stantuffo supponendosi al basso della sua corsa, la massa d'aria che riempie lo spazio e ha la stessa forza elastica che l'aria atmosferica e per conseguenza uguale ad h'. Premesso ciò, quando lo stantuffo si alza, questa massa d'aria si dilata e finisce per riempire lo spazio E; la sua densità diminuisce nel rapporto $\frac{e}{E}$, e la sua forza elastica diventa $h' \cdot \frac{e}{E}$; se la forza φ dell'aria al di sopra della valvula dormiente è maggiore di quest'ultima, essa aprirà la valvula, della quale in questo punto non considereremo il peso; una parte dell'aria inferiore entrerà nel corpo di tromba, φ diminuirà e diventerà φ_1, e l'acqua si eleverà di una nuova quantità nel tubo d'aspirazione. Quando lo stantuffo scenderà, la massa d'aria che viene ad introdursi nel corpo di tromba scapperà sollevando la valvula c, dimodochè alla fine della sua corsa non rimarrà tra esso e la valvula dormiente, nello spazio e che una quantità d'aria uguale alla prima, avente sempre la forza h'. Quando lo stantuffo risalirà, la valvula dormiente non potrà riaprirsi che quando si avrà

$$\varphi_1 > h' \frac{e}{E},$$

dimodochè dopo un numero μ d'oscillazioni dello stantuffo a cominciare da quella in cui la colonna elevata era k, se le due forze al di sopra e al di sotto della valvula dormiente si fanno equilibrio, questa valvula non si aprirà più e l'acqua non s'innalzerà di più, quantunque il giuoco dello stantuffo continui. Si avrebbe

allora

$$\varphi_\mu = h' \frac{e}{E},$$

donde possiamo dedurre

$$k_\mu = h'\left(1 - \frac{e}{E}\right),$$

a motivo della relazione

$$\varphi_\mu = h' - k_\mu.$$

Quest' espressiona indica la più grande altezza k_μ a cui l' acqua possa giungere in un lungo tubo d' aspirazione. Laonde l'effetto utile della tromba potrà aver luogo solamente quando la più grande altezza K dello stantuffo al di sopra del livello del pozzo non supererà k_μ, e si vede che K differirà tanto più da

$$h' = 1,598h$$

quanto e sarà più grande rapporto ad E, il che rende sensibile quanto questo spazio e è pregiudicevole all' effetto dell' aspirazione. È dunque importante di renderlo il più piccolo possibile, lasciandogli ciò non ostante assai grandezza perchè, in seguito del giuoco che prendono tutti i pezzi del meccanismo che muova lo stantuffo, questo non vada a colpire la valvula dormiente. Per uno stantuffo la cui corsa eccede 50 centimetri, possiamo dare a questo spazio 5 centimetri d' altezza, ed è mediante questa condizione che si ammette l'espressione qui sotto

$$K = 12h.$$

In generale, per evitare che si *fermi*, bisogna situare la valvula dormiente e conseguentemente il fondo del corpo di tromba in modo che lo stantuffo, scendendo, se ne avvicini il più possibile.

4. L' arresto potrebbe ancora aver luogo se la velocità dello stantuffo salendo fosse maggiore di quella dell' acqua che si eleva nel corpo di tromba, poichè allora l' acqua non potendo seguire immediatamente lo stantuffo nel suo corso, si stabilirebbe un vuoto tra essi che aumenterebbe a ciascuna aspirazione e che finirebbe per diventare tanto grande, che lo stantuffo non potrebbe più raggiungere, nella sua discesa, la colonna d' acqua, il che arresterebbe il lavoro della tromba. Si evita quest' inconveniente dando allo stantuffo una velocità moderata e non impiegando tubi d' aspirazione troppo stretti.

5. Quando il giuoco della tromba è bene stabilito, ciascun colpo di stantuffo fa salire un volume d' acqua equivalente ad un cilindro la cui base è quella dello stantuffo, e l' altezza quella dello spazio percorso. Si chiami r il raggio della base dello stantuffo, l la lunghezza della sua corsa, e π il rapporto della circonferenza al diametro, il volume d' acqua somministrato da un colpo di stantuffo sarà

$$\pi r^2 l,$$

e, se m è il numero dei colpi di stantuffo dati in un tempo determinato,

$$m \pi r^2 l$$

esprimerà la quantità d'acqua che sgorgherà in questo stesso tempo dal tubo di scaricamento della tromba.

6. Quanto all'altezza ove questa quantità d'acqua può inseguito essere portata in un tubo d'ascensione G situato al di sopra del corpo di tromba, essa è illimitata. Si cita una tromba aspirante stabilita nelle mine del sale della Baviera, che versa la sua acqua di un solo getto a 370 metri d'altezza; non si tratta dunque che di avere una forza motrice sufficiente. Quando una tromba aspirante è sopravanzata da un lungo tubo d'ascensione, essa prende il nome di *tromba elevatoria.*

7. Per valutare la forza necessaria all'elevazione dello stantuffo, bisogna osservare che esso allora adempie a due differenti funzioni: da una parte, esso aspira l'acqua che è al di sotto di se e la solleva, dall'altra, quella che è al di sopra; dimodochè subisce due pressioni, l'una dall'alto in basso, prodotta dal peso dell'acqua superiore e dal peso dell'atmosfera, l'altra di basso in alto prodotta dal peso dell'atmosfera diminuita da quello della colonna d'acqua che è al di sotto di se.

Così, indicando con d, ad un istante qualunque del suo moto, la distanza verticale dello stantuffo al punto del versamento, con d' la sua distanza al livello dell'acqua del pozzo, e chiamando come sopra r il raggio della base dello stantuffo ed h' la pressione atmosferica, avremo, per l'espressione numerica della pressione esercitata dall'alto in basso

$$1000\,r^2\pi\left(h'+d\right) \;\ldots\ldots\; (a),$$

e per quella esercitata dal basso in alto

$$1000\,r^2\pi\left(h'-d'\right) \;\ldots\ldots\; (b).$$

Infatti, la pressione dovuta all'acqua superiore non dipende che dalla sua altezza verticale e dalla superficie della base dello stantuffo (*vedi* Idrostatica); essa si misura dunque dal peso di un cilindro d'acqua il cui volume è uguale a

$$r^2\pi d.$$

Così, esprimendo r e d in metri, la quantità $r^2\pi d$ rappresenta un numero di metri cubi d'acqua di cui ciascuno pesa 1000 chilogrammi, e, per conseguenza,

$$1000\,r^2\pi d$$

rappresenta, in chilogrammi, il peso del cilindro d'acqua o la pressione sopportata alla base dello stantuffo. Di più h' essendo la pressione atmosferica sopra l'unità di superficie, $r^2\pi h'$ è la pressione atmosferica sulla superficie $r^2\pi$, e

$$1000\,r^2\pi h'$$

questa stessa pressione espressa in chilogrammi.

Ora, le due pressioni (a) e (b) operando in senso inverso, la loro resultante o il carico effettivo dello stantuffo sarà

$$1000\,r^2\pi\left(h'+d\right) - 1000\,r^2\pi\left(h'-d'\right) = 1000\,r^2\pi\left(d+d'\right).$$

Osservando che $d+d'$ è la distanza verticale del livello del pozzo al punto del versamento, se ne concluderà:

Qualunque sia l' altezza alla quale una tromba versa la sua acqua, qualunque sieno il diametro e l' inclinazione dei tubi d' aspirazione e d' ascensione, lo stantuffo porta sempre un carico d' acqua uguale al peso di una colonna di questo fluido, che avrebbe per base quella dello stantuffo stesso e per altezza la differenza di livello tra la superficie del pozzo e il punto di versamento.

8. Questo carico, che facendo

$$d+d'=\mathrm{H},$$

avrà per espressione

$$1000\, r^2 \pi \mathrm{H} \;.\;.\;.\;.\;.\; (1),$$

non è la sola resistenza che il motore abbia da vincere per fare agire la tromba, esso deve di più superare le seguenti resistenze passive:

1.° L' attrito dello stantuffo contro le pareti del corpo di tromba;

2.° L' attrito dall' acqua contro queste medesime pareti e contro quelle dei tubi;

3.° La resistenza che il liquido prova quando entra nel tubo d' aspirazione e che passa per l' apertura della valvola dormiente;

4.° Il peso della valvola;

5.° Finalmente l' inerzia della massa d' acqua da mettere in moto.

Queste diverse resistenze non possono ancora essere valutate rigorosamente; ma, in mancanza di formule esatte, ripeteremo la determinazioni approssimate che resultano dalle ricerche del signor d' Aubuisson, esse sono sufficienti per guidare in tutti i casi ordinari della pratica.

9. La resistenza dovuta all' attrito dello stantuffo dipende: 1.° dal numero dei punti del circuito dello stantuffo in contatto con le pareti del corpo di tromba, numero che è proporzionale al raggio r; 2.° dalla pressione di ciascuno di questi punti contro le pareti, la quale è proporzionale all' altezza totale H del carico; 3.° dal pulimento e dalla natura delle superficie stropiccianti.

Indicando con μ un numero da determinare dall' esperienza, e che principalmente dipenderà dal pulimento delle superficie, avremo dunque per l' espressione di questa prima resistenza passiva

$$\mu r \mathrm{H} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2);$$

il valore approssimato di μ è, secondo gli idraulici tedeschi, per dei corpi di tromba, in

Ottone ben pulito	14 *ch.*
Metallo semplicemente bucato . . .	30
Legno abbastanza liscio.	50
Legno degradato dall' uso	100.

Non esiste ancora alcuna osservazione positiva a questo soggetto.

Per valutare la resistenza dovuta all' attrito dell' acqua, si chiami

D il diametro del corpo di tromba;
L la sua lunghezza;
D' il diametro del tubo d' aspirazione;
L' la sua lunghezza;
D'' il diametro del tubo d' ascensione;
L'' la sua lunghezza;
v la velocità dello stantuffo.

Cominciamo da osservare che la velocità dell'acqua non è la stessa nei diversi tubi; uno stesso volume d'acqua dovendo passare, in uno stesso tempo, da ciascuna della sezioni (*vedi* Corrente d'acqua), e le aree di queste sezioni essendo tra loro come i quadrati dei loro diametri, le velocità stanno tra loro nel rapporto inverso di questi quadrati; dimodochè chiamando u la velocità dell'acqua nel tubo d'aspirazione e θ la sua velocità nel corpo di tromba, abbiamo

$$u = \theta \cdot \frac{D^2}{D'^2}.$$

Ugualmente, u' indicando la velocità dell'acqua nel tubo d'ascensione,

$$u' = \theta \cdot \frac{D^2}{D''^2}.$$

Ora, V essendo in generale la velocità dell'acqua che percorre un condotto la cui lunghezza è L, l'area della sezione S e la circonferenza di questa medesima sezione P, la resistenza dovuta all'attrito contro le pareti è espressa da (*vedi* Corrente d'acqua)

$$0,0003425 \frac{LP}{S}\left(V^2 + 0,055 V\right),$$

formula che le relazioni conosciute tra il diametro D, la circonferenza P e l'area S,

$$P = \pi D,$$

$$S = \frac{1}{4} \pi D^2,$$

permettono di trasformare in

$$0,00137 \frac{L}{D}\left(V^2 + 0,055 V\right) \;.\;.\;.\;.\;.\; (c);$$

ma, per applicare quest'espressione alle trombe, bisogna osservare che la velocità V che vi entra è la velocità media del fluido in un condotto, la quale è maggiore della velocità delle molecole vicine delle pareti e donde dipende l'attrito. Nelle trombe dove le molecole si muovono con una velocità quasi uguale, bisogna dunque dare a V un valore maggiore di quello della velocità reale nel rapporto della velocità vicina delle pareti alla velocità media dei condotti. Il signor d'Aubuisson ammette, dietro le osservazioni del Dubuat, che se v indica la velocità reale dell'acqua nel corpo di tromba, velocità che è quella dello stantuffo, bisogna dare alle quantità V della formula (c) il valore

$$V = v + 0,17\sqrt{v};$$

l'espressione dell'attrito dell'acqua nel corpo di tromba, vale a dire l'altezza dell'acqua il cui peso esprime la resistenza dovuta a quest'attrito diverrebbe mediante ciò

$$0,00137 \frac{L}{D}\left[\left(v + 0,17\sqrt{v}\right)^2 + 0,055\left(v + 0,17\sqrt{v}\right)\right],$$

ovvero, più semplicemente, ma con un poco meno di esattezza

$$0,00143 \frac{L}{D}\left(v + 0,17\sqrt{v}\right)^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; (d).$$

Nel tubo d' aspirazione, si avrebbe, in seguito del rapporto delle velocità,

$$0,00143\,\frac{L'}{D'}\left(v+0,17\sqrt{v}\right)^2\cdot\left(\frac{D}{D'}\right)^4,$$

e in quello d' ascensione, quando si tratta di una tromba elevatoria,

$$0,00143\,\frac{L''}{D''}\left(v+0,17\sqrt{v}\right)^2\cdot\left(\frac{D}{D''}\right)^4.$$

La somma di queste resistenze parziali è

$$0,00143\left(v+0,17\sqrt{v}\right)^2\left[\frac{L}{D}+\frac{L'}{D'}\cdot\left(\frac{D}{D'}\right)^4+\frac{L''}{D''}\left(\frac{D}{D''}\right)^4\right]\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(e).$$

Siccome è lo stantuffo che deve vincere questa resistenza totale, e che è sulla sua base $\frac{1}{4}\pi D^2$ che pesa la colonna d' acqua la cui espressione (e) dà l' altezza, abbiamo definitivamente, per il peso in chilogrammi che rappresenta il valore assoluto delle resistenze provenienti dall' attrito dell' acqua

$$0,3575\,\pi D^2\left(v+0,17\sqrt{v}\right)^2\left[\frac{L}{D}+\frac{L'}{D'}\left(\frac{D}{D'}\right)^4 + \frac{L''}{D''}\left(\frac{D}{D''}\right)^4\right]\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(3).$$

Per la resistenza dovuta a ciascuno dei gorghi che la colonna fluida prova nelle trombe, conserviamo le precedenti denominazioni, e si chiami inoltre

m il coefficiente di contrazione all' ingresso del tubo d' aspirazione. (Il suo valore varia da 0,82 a 0,95, secondo la forma del dilatamento. *Vedi* Scolo dei Fluidi, n.° 13);

s la sezione o l' area dell' apertura della valvola dormiente;

m' il coefficiente di contrazione relativo a quest' apertura, il quale generalmente sarà $=1$ (*vedi* Corrente d' acqua, n.° 30) quando il diametro dell' apertura supererà la metà di quello del tubo d' aspirazione;

γ il rapporto tra la velocità nel tubo d' aspirazione e quello dello stantuffo $=\left(\frac{D}{D'}\right)^2$.

g la forza della gravità.

La resistenza totale dei due gorghi sarà

$$250\,\pi D^2\,\frac{v^2}{2g}\left[\frac{1}{m^2}\left(\frac{D}{D'}\right)^4+\left(\frac{\pi D^2}{4m's^2}\right)^2-\gamma^2\right]\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(4).$$

La deduzione di questa formola riposa sul principio che *la resistenza che prova una colonna fluida passando da un tubo più largo in un tubo più stretto è rappresentata dall' altezza dovuta alla velocità dell' acqua nel tempo del suo passaggio per il gorgo, diminuito dell' altezza dovuta alla velocità che il fluido aveva immediatamente avanti.* Così, rappresentando con S l' area della sezione del corpo di tromba e con S' l' area della sezione del tubo d' ascensione, e osservando che quest' ultima si riduce a mS' all' ingresso di questo tubo per l' effetto della contrazione, avremo, per la velocità al momento dell' ingresso

dell' acqua,

$$v \cdot \left(\frac{S}{mS'}\right),$$

la quale corrisponde ad un' altezza (*vedi* Altezza),

$$\frac{v^2}{2gm^2}\left(\frac{S}{S'}\right)^2,$$

questa rappresenterà la resistènza del gorgo, poichè la velocità dell'acqua avanti il suo ingresso è nulla. Gli daremo la forma

$$\frac{v^2}{2gm^2}\left(\frac{D}{D'}\right)^4,$$

sostituendo il rapporto dell'aree con quello dei quadrati dei diametri.

Al passaggio dell' acqua per la valvola dormiente, la sua velocità nel tubo d' ascensione, che rappresenteremo con γv, diventa

$$v\left(\frac{\frac{1}{4}\pi D^2}{m'S}\right),$$

poichè $\frac{1}{4}\pi D^2$ è la sezione del corpo di tromba e $m'S$ la sezione contratta dalla valvola. La differenza dell' altezze dovute a queste velocità, cioè:

$$\frac{v^2}{2g}\left(\frac{\pi D^2}{4m'S}\right)^2 - \frac{\gamma^2 v^2}{2g}$$

è dunque la resistenza di questo secondo gorgo. Osservando di nuovo che queste resistenze agiscono di nuovo sulla base $\frac{1}{4}\pi D^2$ dello stantuffo, avremo pel loro valore assoluto espresso in chilogrammi

$$1000 \cdot \frac{1}{4}\pi D^2\left[\frac{v^2}{2gm^2}\left(\frac{D}{D'}\right)^4 + \frac{v^2}{2g}\left(\frac{\pi D^2}{4m'S}\right)^2 - \frac{\gamma^2 v^2}{2g}\right],$$

il che è identico con la formula (4). In una tromba elevatoria bisognerebbe tener conto, inoltre, del gorgo che prova la colonna fluida passando dal corpo di tromba nel tubo d' ascensione. La resistenza dovuta al peso della valvola dormiente deve calcolarsi in due differenti maniere, secondo che questa valvola è a cerniera o a volta (*vedi* Valvola). Nel caso di una valvola a cerniera, siano P il suo peso λ la distanza del suo centro di gravità all' asse di rotazione, S l' area dell' apertura, λ' la distanza del suo centro allo stesso asse ed x l' altezza della colonna d' acqua il cui peso rappresenta la resistenza cercata: $P\lambda$ sarà il momento (*vedi* questa parola) della resistenza dovuta al peso della cerniera, e $1000 sx\lambda'$ sarà quello della forza opposta; così, siccome queste due azioni sono uguali, si ha l' equazione

$$P\lambda = 1000\, s\, x\, \lambda',$$

donde si deduce

$$x = \frac{P\lambda}{1000\, s\, \lambda'}.$$

Moltiplicando quest' altezza per $1000^{ch}\frac{1}{4}\pi D^2$ per avere, espresso in chilogrammi lo sforzo da esercitare sullo stantuffo, viene

$$\frac{P\pi D^2 \lambda}{4s\lambda'} \ldots\ldots (5).$$

Se la valvola è a volta, la sua resistenza sarà semplicemente

$$P \cdot \frac{D^2}{d^2} \ldots\ldots\ldots (6),$$

d essendo il diametro dell' orifizio circolare che essa ricopre.

Finalmente, per valutare la resistenza proveniente dall' inerzia dell' acqua, osserviamo che se lo stantuffo fosse libero a che la forza capace di bilanciare questa resistenza gli fosse applicata e agisse costantemente sopra esso, prenderebbe un moto uniformente accelerato; dimodochè, percorrendo la lunghezza totale della sua corsa l in un tempo t, la velocità acquistata nell' unità di tempo sarebbe $\frac{2l}{t^2}$, e per conseguenza $\frac{2l}{t^2}$ rappresenterebbe la forza acceleratrice. Così, M rappresentando la massa del fluido messa in moto,

$$M \cdot \frac{2l}{t^2}$$

rappresenta la forza motrice cercata. Indicando con Π il peso di questa massa d' acqua, quest' espressione diventerà

$$\frac{\Pi}{g} \cdot \frac{2l}{t^2} \ldots\ldots\ldots (7),$$

ed avremo, riducendo le diverse parti dell' acqua alla velocità dello stantuffo;

$$\Pi = 1000^{ch}\, \frac{1}{4}\pi D^2 \left[L + L' \frac{D^2}{D'^2}\right].$$

Bisogna osservare che tutte le volte che lo stantuffo sarà messo in moto mediante una macchina che regola le circostanze del suo moto, quando tiene, per esempio, alla manovella di una ruota animata da un moto uniforme, l' inerzia non porterà veruna spesa di forza: lo stantuffo muovendosi con una velocità accelerata nella prima metà del suo corso è ritardata nella seconda, l' inerzia rende alla forza motrice, in questa seconda parte del moto, lo sforzo che essa ha esatto nel primo.

10. Prenderemo per esempio d' applicazione di queste diverse formule quello che ha dato il signor d' Aubuisson sopra una tromba di cui esso aveva determinato, mediante esperienze dirette tutte le specie di resistenze.

Questa tromba aveva le seguenti dimensioni:

Diametro del corpo di tromba	$D = 0^m,3248$
Lunghezza di questo corpo	$L = 1^m,80$
Striscia della base dello stantuffo $= \frac{1}{2}$ D	$r = 0^m,1624$
Diametro del tubo d' aspirazione	$D' = 0^m,13535$
Lunghezza di questo tubo	$L' = 7^m,652$

Differenza del livello del pozzo al punto di versamento, L+L' . . . . H $=9^m,452$

Lunghezza della corsa dello stantuffo. . . . . $l=1^m,453$

Velocità media dello stantuffo ($4\frac{1}{2}$ levate in un minuto). . . . . $v=0^m,218$

Peso della valvola. . . . . P' $=1^{ch}$

Coefficiente di contrazione all'ingresso del tubo d'aspirazione . . . . $m=0,85$

Coefficiente alla valvola dormiente . . . . $m'=1,00$

(L'acqua del tubo d'aspirazione non prova contrazione alla sua uscita.)

Sezione effettiva dell'apertura della valvola. . . . . . $s=\frac{2}{12}\pi D^2$

Per approssimazione, si è presa i $\frac{2}{3}$ della sezione del tubo d'aspirazione.)

La velocità dell'acqua nel tubo d'aspirazione stando alla sua velocità nel corpo di tromba a alla velocità media dello stantuffo nel rapporto $\left(\frac{D}{D'}\right)^2$, essa giunge alla valvola dormiente con la velocità $v\left(\frac{D}{D'}\right)^2$, e si ha. $\gamma=\left(\frac{D}{D'}\right)^2$.

Sostituendo questi valori nelle precedenti formule, si trova:

1.° Peso della colonna d'acqua da elevare (1).

$$1000.\left(3,1416\right).\left(0,1624\right)^2.\left(9,452\right)= \dots\dots\dots\dots 783^{ch},2$$

2.° Attrito dello stantuffo (2).

$$30.\left(0,1624\right).\left(9,452\right)= \dots\dots\dots\dots\dots 46\ \ ,1$$

Si fa $\mu=30$, perchè i tubi sono di getto.

3.° Attrito dell'acqua (3).

$$250\left(3,1416\right)\left(0,3248\right)^2\left[0,218+0,17\sqrt{0,218}\,\right]^2\times$$
$$\times\left[\frac{1,80}{0,324}+\frac{7,652}{0,1353}\left(\frac{0,325}{0,135}\right)^4\right]=\dots\dots\dots 19\ \ ,7$$

4.° Gorghi della colonna fluida (4).

Osservando che $\left(\frac{\pi D^2}{4m'S^2}\right)^2=\frac{9}{4}\left(\frac{D}{D'}\right)^4$ e che $\left(\frac{D}{D'}\right)^4$ si trova in tutti i termini del fattore complesso, si ha

$$250\left(3,1416\right)\left(0,3248\right)^2.\frac{(0,218)^2}{2(9,8088)}.\left(\frac{0,325}{0,135}\right)^4\left[\frac{1}{(0,85)^2}+\frac{9}{4}-1\right]=17\ \ ,5$$

Segue . . . . $866^{ch},5$

Riporto 866ch, 5

5.° Resistenza dovuta al peso della valvola (6)

$$1\times\left(\frac{0,325}{0,135}\right)^2\times\frac{0,151}{0,131}= \ldots\ldots\ldots \quad 5,8$$

6.° Per l'inerzia, la tromba essendo messa in moto da una ruota idraulica . . . . 0 ,0

Totale delle resistenze Chil. 872 ,3

Sottraendo da questa somma il peso dell'acqua spostata dallo stantuffo, rimane, per il complesso delle resisteoze attive e passive, chilogrammi 858, 3.

L'esperienza aveva dato chilogrammi 860, e possiamo considerare questi due resultamenti come perfettamente identici.

11. Le resistenze passive sono di due specie: le une, le più considerabili, sono indipendenti dalla velocità; le altre variano con questa velocità; ma esse sono generalmente tanto piccole, comparativamente alla resistenza totale, che possiamo, nei casi ordinari considerare il rapporto del peso della colonna d'acqua elevata alla somma delle resistenze passive di qualunque specie come un numero costante. Dall'esperienze fatte dal signor d'Aubuisson per determinare questo numero (vedi *Giornale delle Mine*, tomo 21), basterebbe moltiplicare per il fattore 1,08 il peso della colonna d'acqua dato dalla formula (1) per ottenere immediatamente la resistenza totale al moto di una tromba aspirante, quella finalmente che il motore deve superare per metterla in giuoco; si avrebbe ancora, indicando con R questa resistenza totale

$$R = 1,08\times\left[1000r^2\pi H\right],$$

il che si riduce a

$$R = 848\, D^2 H,$$

ponendo invece di π il suo valor numerico ed r per $\frac{1}{2}$ D. Possimo adottare, per maggiore esattezza

$$R = 850\, D^2 H \;\ldots\ldots\; (7),$$

e quest'espressione eminentemente semplice dispenserà, in quasi tutti i casi, dai lunghi calcoli che abbiamo indicato. Per esempio, con i precedenti dati si avrebbe

$$R = 850 . \left(0,3248\right)^2 . \left(9,452\right) = 847^{ch},6,$$

resultamento poco differente da chilogrammi 858, 3. Dobbiamo osservare che il tubo d'aspirazione della tromba in questione era più stretto dell'ordinario, il che ha dato luogo ad una resistenza per l'attrito dell'acqua, molto più forte di quella che si ha abitualmente; dimodochè possiamo sperare, in generale, dall'impiego della formula (7) dei resultamenti del tutto ancora esatti quanto da quello delle formule relative a ciascuna resistenza.

Bisognerà sempre aggiungere alla resistenza totale calcolata il peso dello stantuffo e del suo manico.

12. Quando lo stantuffo scende, la forza motrice non ha da superare che il suo attrito contro il corpo di tromba e il gorgo della colonna fluida che traversa

la sua valvola. Dimodochè, nelle trombe ben fatte, dovrebbe bastare il solo peso dello stantuffo e il suo corredo per vincere queste resistenze, le quali d' altra parte non esigono che uno sforzo del motore, comparativamente piccolissimo con quello che deve spostare per sollevare lo stantuffo. Ne resulta che, nella metà del tempo che dura il giuoco della tromba, la forza motrice non è quasi impiegata; ancora, per meglio utilizzarla, spesso si riuniscono due trombe; dimodochè con l' aiuto di un bilanciere, uno stantuffo sale nel mentre che l' altro scende. Facendo versare l' acqua delle due trombe in uno stesso trogolo, si ottiene un getto quasi continuo, che non si potrebbe produrre con una sola tromba che aggiungendoci un serbatojo d' aria, come alle trombe per gl' incendj.

13. Abbiamo veduto (n.° 5) che, quando il giuoco della tromba è stabilito, ciascun colpo di stantuffo somministra un volume d' acqua uguale a $\pi r^2 l$, espressione che riporteremo alla forma

$$0,785\, D^2 l \;\ldots\ldots\; (8),$$

per non avere da considerare che il diametro dello stantuffo $= 2r$. Per verità, nel tempo che lo stantuffo sale, il volume d' acqua che esso solleva non è esattamente quello che corrisponde allo spazio generato dalla sua base, e bisognerebbe diminuire questo dello spazio occupato dal manico; ma, nella discesa, quando l' acqua che era sotto lo stantuffo passa sopra, il manico ne sposta e ne fa versare uno stesso volume; dimodochè ne resulta, che la quantità d'acqua sommistrata da un' oscillazione intera dello stantuffo è sempre quella dell'espressione (8).

Ma quando una tromba ha servito per qualche tempo, essa è lungi dal dare questo prodotto. La guarnitura dello stantuffo e le valvole lasciano scendere nuovamente una parte dell' acqua aspirata, il che cagiona una diminuzione che mediamente possiamo valutare a 0,15 del prodotto teorico. Il prodotto reale non è più dunque che di circa $0,65\, D^2 l$, e può ancora diventare molto minore, se il moto dello stantuffo è assai lento. Ciò non ostante è essenziale d' altra parte, di non dare allo stantuffo una velocità capace di cagionare un arresto (n.° 4). La velocità delle grandi trombe che lavorano con un moto continuo è comunemente da $0^m,16$ a $0^m,24$ per secondo; ed esso equivale da 4 a 6 alzate per minuto per una corsa di $1^m,20$.

14. Tromba follante, o premente. Essa si compone di un cilindro vuoto (*Tav.* CLXV, *fig.* 5) immerso nell' acqua del serbatojo inferiore e il cui prolungamento, al di sopra della superficie dell' acqua, comunica, tanto direttamente, quanto per mezzo di un raggio di sgorgo, col serbatoio superiore, o col luogo dove vogliamo elevare l' acqua. Nella parte inferiore di questo cilindro, che si chiama *corpo di tromba*, esiste uno stantuffo P, il cui manico è solidamente attaccato alla traversa inferiore di un telajo mobile che si fa salire e scendere alternativamente per mezzo di una leva. La testa dello stantuffo è forata da un buco ricoperto con una valvola S che si apre dal basso all' alto. In S'; un poco al di sotto della superficie dell' acqua, esiste un diaframma forato da un buco ricoperto da una valvola che si apre ugualmente dal basso all' alto.

Per concepire il giuoco di questa tromba, bisogna supporre lo stantuffo situato nel più basso della sua corsa. Allora l' acqua del serbatoio, mediante la sua propria pressione, apre le valvole S ed S', e penetra nel corpo di tromba dove essa tende a mettersi a livello con l' acqua esterna. Quando essa ha raggiunto questo livello, o quasi raggiunto, le valvole si chiudono mediante il loro proprio peso, e se allora s' inalza lo stantuffo, la valvola inferiore S rimane chiusa, ma la valvola superiore S' si apre, e l' acqua contenuta nel corpo di tromba tra le due valvole è forzata ad elevarsi al di sopra del livello del serbatojo.

Abbassando lo stantuffo, la valvola S' si chiude e impedisce all'acqua che è al di sopra di scendere, nel mentre che la valvola S si apre, e la parte del corpo di tromba compresa tra le due valvole si riempie d'acqua. Così, mediante il giuoco alternativo dello stantuffo, il tubo superiore si riempie d'acqua sempre di più, e quest'acqua finisce per giungere al serbatojo superiore.

Nella tromba aspirante, il corpo di tromba e la valvola dormiente sono situati ad una data altezza al di sopra del livello dell'acqua del pozzo, nella tromba premente, al contrario, il corpo di tromba, lo stantuffo e la valvola sono immerse. Quando si eleva lo stantuffo a (*Tav.* CCXLVIII, *fig.* 2), l'acqua solleva la valvola dormiente b, e sale nell'interno del corpo di tromba per prendere il livello MN dell'acqua del pozzo, che è il limite dell'inalzamento dello stantuffo, perchè mai non vi sia luogo ad aspirazione. Quando lo stantuffo scende di nuovo, la valvola b si chiude, l'acqua premuta apre la valvola c, chiamata *valvola di ritenuta*, e penetra nel tubo d'ascensione B. Quando la corsa discendente dello stantuffo è compita, la valvola di ritenuta si richiude, isola lo stantuffo dalla massa d'acqua scacciata nel tubo d'ascensione; dimodochè a ciascuna alzata, le circostanze del giuoco della macchina sono le stesse.

La massa d'acqua ripremuta, a ciascuna discesa dello stantuffo, nel tubo d'ascensione è sempre quella che corrisponde al volume generato dalla base di questo stantuffo, e si calcola per mezzo della formula (8). Quando il tubo d'ascensione è ripieno fino al punto del trabocco, un'oscillazione intera dello stantuffo somministra una quantità d'acqua espressa teoricamente da $0,785\,D^2 l$, ma che, nella pratica, va da $0,7 D^2$ a $0,6 D^2 l$. È evidente che il carico dello stantuffo, ossia il suo sforzo, quando preme, è, astrazione fatta dagli attriti e altre resistenze, equivalente al peso di una colonna d'acqua che avrebbe per base la base stessa dello stantuffo, e per altezza la differenza di livello tra il pozzo e il punto dove l'acqua è inalzata. Questa differenza di livello può essere, d'altra parte, tanto grande quanto il bisogno lo richiede, e non ha altro limite che quello che potrebbe metterci la forza della quale possiamo disporre.

14. Tutto ciò che riguarda le resistenze degli attriti, dei gorghi e dell'inerzia, si applica alle trombe prementi come alle trombe aspiranti; solamente vi è una resistenza particolare nelle trombe prementi, questa è quella della valvola di ritenuta c, la quale, per portare la massa d'acqua contenuta nel tubo d'ascensione, deve avere una superficie superiore maggiore di quella dell'apertura che essa ricopre. Ciò non ostante questa causa di resistenza non sembra doversi valutare al di là di un venticinquesimo del carico sopra lo stantuffo.

Con l'aiuto di questa tromba, s'inalza l'acqua ad un'altezza tale come possiamo desiderare; basta avere la forza motrice necessaria.

15. Tromba aspirante e premente. Questa si compone come la tromba aspirante di un corpo di tromba e di un tubo d'aspirazione (*Tav.* CCXLVIII, *fig.* 3) con una valvola S' situata alla loro congiunzione. Il corpo di tromba è aperto nell'alto, ma lo stantuffo non è forato; esso è ugualmente messo in giuoco mediante una leva. Verso il basso del corpo di tromba viene adattato un tubo saliente, guarnito di una valvola S nella sua parte inferiore; la sua parte superiore comunica col serbatojo dove vogliamo elevare l'acqua.

Quando lo stantuffo sale, la valvola S è chiusa, la valvola S' è aperta, e l'acqua è aspirata nel corpo di tromba; quando lo stantuffo scende la valvola S' è chiusa, la valvola S è aperta, e l'acqua è premuta nuovamente nel tubo di scaricamento.

Lo sforzo esercitato sopra lo stantuffo è questo, quando esso sale, uguale al peso di una colonna d'acqua di cui la sua superficie è la base, e di cui l'altezza è la distanza della superficie dell'acqua nel tubo saliente al livello del serba-

toio inferiore. Quando lo stantuffo scende, il suo sforzo è il peso di una colonna d'acqua la cui altezza è la distanza della superficie dell'acqua nel tubo saliente alla superficie inferiore dello stantuffo.

16. Per fare un uso giudizioso della forza del motore, le trombe aspiranti prementi dovrebbero essere costruite in modo che gli sforzi fossero uguali nella discesa come nella salita dello stantuffo. Si ottiene questo resultamento unendo insieme due trombe, uno degli stantuffi delle quali sale nel mentre che l'altro scende. Lo sforzo totale del motore si compone allora dello sforzo necessario per far salire un solo stantuffo aggiunto a quello che bisogna sviluppare per farlo scendere.

Facciamo astrazione per un momento dalle resistenze passive, e si chiami d la distanza verticale dello stantuffo alla superficie del pozzo, quando esso è giunto al punto il più alto della sua corsa, e d' la sua distanza verticale al punto di versamento, lo sforzo della salita espressa in chilogrammi sarà

$$1000 r^2 \pi d,$$

r essendo il raggio dello stantuffo; ed avremo per lo sforzo della discesa

$$1000 r^2 \pi d'.$$

Lo sforzo totale è dunque

$$1000 r^2 \pi \left(d+d'\right),$$

ovvero

$$1000 r^2 \pi \mathrm{H},$$

H indicando l'altezza verticale del punto di versamento al di sopra del livello del pozzo. Sostituendo r con $\frac{1}{2}\mathrm{D}$ e π col suo valore, avremo, per il carico corrispondente ad una semi-oscillazione del bilanciere che mette in giuoco i due stantuffi,

$$785\,\mathrm{D}^2\mathrm{H},$$

espressione che, tenendo conto della resistenze passive, diventa, mediante il signor d'Aubuisson

$$900\,\mathrm{D}^2\,\mathrm{H}\ \ldots\ldots\ (9).$$

Se indichiamo con v la velocità dello stantuffo, $900\,\mathrm{D}^2\mathrm{H}v$ sarà la quantità d'azione consumata dal motore nell'unità di tempo per tenere le due trombe in attività. Siccome ordinariamente si valuta la velocità v dal numero delle oscillazioni che fa ciascuno degli stantuffi in un minuto, abbiamo, indicando questo numero con N: l essendo la larghezza della corsa,

$$v = \frac{2\mathrm{N}l}{60''}.$$

Così, la forza consumata o l'effetto dinamico (*vedi* Effetto) prodotto in un secondo di tempo è

$$30\,\mathrm{ND}^2\mathrm{H}lch\ \ldots\ldots\ (10).$$

Per paragonare quest'effetto dinamico con l'effetto utile, osserviamo che quello dei due stantuffi che percorre lo spazio v abbassandosi fa entrare nel tubo

d' ascensione un volome d' acqua uguale a

$$\frac{1}{4}\pi D^2 v = 0,785 D^2 v,$$

che ridnrremo mediamente a

$$0,65 D^2 v,$$

a motivo dei consumi (o.° 12). Questo è il prodotto reale dell' apparecchio; moltiplicandolo per 1000, avremo il suo peso espresso io chilogrammi; così,

$$650 D^2 v$$

rappresenta il nnmero di chilogrammi d' acqua che dà la tromba in nn secoodo; e siccome, per il fatto, quest' acqua si trova elevata ad nn' altezza H, l' effetto ntile è rappresentato da

$$650 D^2 v H ch.$$

Sostituendo a v il suo valore in fnnzione della corsa dello stantuffo, quest' espressone diventa

$$21,7ND^2H/ch \ldots\ldots (11).$$

Paragonando questa coo l' espressione (10), si vede che il rapporto dell' effetto utile alla quantità d' azioone consumata è quello dei numeri 21,7 e 30; vale a dire che l' apparecchio non utilizza che 0,72 circa della forza. Questo resultamento si accorda molto bene con la pratica; poichè l' esperienza ha provato che l' effetto utile delle trombe le meglio fatta si eleva, al più, a 0,82 della forza consumata. Secoodo il signor Boistard (*esperienze sulla mano d' opera dei differenti lavori*) le trombe impiegate ai disseccamenti e messe in giuoco da uomini che agiscono sopra una bilanciere, consumerebbero io pura perdita quasi la metà della forza.

17. Una delle riunioni più utili e più osservabili delle trombe aspiranti e prementi è la *tromba d' incendio*. Prenderemo dal *Portafoglio del Conservatorio di Parigi* la descrizione del migliore apparecchio di questo genere che sia ancora conosciuto.

I due corpi di tromba vednti in pianta (*Tav.* CCVI, *fig.* 1) e io sezione verticale (*Tav.* CCV, *fig.* 1) portaoo due stantuffi *kk*, mossi da due doppi vetti attaccati in *c* al bilaociere *aa*, ed in *i* ai dua stantuffi. I vetti sono mobili attoroo di questi due ponti *c*, e per tal guisa possono sollevare verticalmaute gli anzidetti stantuffi. Per assicurare frattanto pienamente questa verticalità, gli stantuffi portano fra i doppi vetti on manico fisso *dd* che sale e discende in un regolatore *e*. La (*Tav.* CCV, *fig.* 1) mostra questo moto, ed indica pure io *ghhg* i punti i più alti e i più bassi cui pervengono i punti *c* nelle loro salite e discese.

L' acqua è somministrata alla tromba dal tubo d' aspirazione *d* (*Tav.* CCVI, *fig* 1). L' acqua così aspirata si distribuisce in on doppio fondo *uu*, comune alle due trombe. La stessa (*Tav.* CCV, *fig.* 1) mostra il moto alternativo delle valvole: dal lato sinistro in cui sale lo stantuffo, la valvola d'aspirazione si apre e quella di pressione si chiude. Dall' altro lato avviene il contrario. Per tal modo entra costantemente acqua nel gran serbatojo comune di pressione, primitivamente ripieno d' aria. Quest' aria premuta da quella che affluisce del continno, la quale giunge in una maggior quantità che non può uscire, sotto una piccola

pressione, preme a sua volta l'acqua nel tubo d'iniezione *mnp*, che si ricurva in *p* e presenta sopra uno dei lati della tromba la sua estremità, sulla quale s'innestano i tubi di cuoio mediante anelli di rame lavorati a vite; e con tali tubi si dirige l'iniezione dove meglio abbisogni

Le traverse *rr* (*Tav.* CCVI, *fig.* 1) servono ad impedire che il bilanciere sia spinto troppo basso pegli sforzi di coloro che manovrano la tromba, nel qual caso lo stantuffo verrebbe ad urtarsi contro la valvola d'aspirazione, mentrechè dall'altro uscirebbe dal corpo della tromba. Le catene attaccate in *w*, *w* servono ad assicurare nel bilanciere le aggiunte *wa*, le quali terminano in doppio braccio, portante a ciascuna delle sue estremità un anello nel quale si passa una leva *tt* (*Tav.* CCV, *fig.* 1) bastevolmente lunga per essere facilmente presa e manovrata ad un tempo da molti uomini.

La tromba è di facile trasporto. Sopra due dei suoi lati paralleli essa porta due arpioni o fermagli *zz*, mobili attorno di chiodi a testa *yy*. Si alzano gli arpioni sino a che urtino contro il chiodo *v*, e vi si passa una leva *rr*. La stessa operazione si ripete dall'altro lato; e la tromba viene così armata come di due bracci di barella, coi quali può essere trasportata ove occorra. I due zoccoli sui quali essa poggia si raddossano piegando attorno alle cerniere *d'a'*, oo. Si vede sulla sinistra lo zoccolo dispiegato in *d'e'*, e ripiegato sulla destra in *d'b'*. Quando la tromba manovra, gli uomini salgono sullo zoccolo spiegato e ciò contribuisce alla stabilità del meccanismo.

La tromba che abbiamo ora descritta, manovrata da otto pompieri bene esercitati, riceve sessanta colpi di bilanciere per minuto; la corsa degli stantuffi è di $0^m,12$. Questa tromba può gettare per minuto 648 litri a 20 metri di altezza, ossia per ogni pompiere e per ogni secondo 27 chilogrammi ad 1 metro, e per ogni ora 27,200 chilogrammi ad 1 metro, che corrispondono a 97 unità dinamiche. Si vede che con ciò si supponga un lavoro forzato, poichè l'uomo lavorando alla manovella non può produrre che 173 unità dinamiche durante otto ore, per cui gli uomini più robusti non possono sostenere lungamente la manovra della tromba da incendi, laonde siamo costretti a dividere i pompieri in isquadre, facendone il cambio tre o quattro volte per ora. Oltre gli uomini impiegati a mettere il bilanciere in moto e a dirigere i tubi d'iniezione, il servizio di una tromba d'incendio esige un numero di lavoratori abbastanza grande, perchè ci sia versato continuamente dell'acqua con delle secchie di rame fatte per un tal uso.

Le trombe aspiranti hanno il vantaggio di non essere punto immerse nel serbatoio inferiore. Possiamo, come si vede (*Tav.* CLXV, *fig.* 6), riunire questo vantaggio a quello di premere di basso in alto, cominciando ad elevare l'acqua in una tinozza situata ad una piccola altezza al di sopra del serbatoio inferiore, donde essa è ripresa da una tromba premente. Possiamo ancora adempire lo stesso oggetto più semplicemente impiegando la disposizione indicata (*Tav.* CLVIII, *fig.* 1). Quando lo stantuffo P discende, le valvole S e T sono chiuse, e vi è aspirazione della valvola S'. Quando questo stantuffo sale, la valvola S' è chiusa e l'acqua è premuta nuovamente di basso in alto. Nella pratica si trova sempre più vantaggioso di far premere di basso in alto che di alto in basso.

La disposizione dei tubi e valvole per il giuoco delle trombe può variarsi in molti modi, ma bisogna distinguere principalmente quelli che hanno per oggetto d'imprimere un moto continuo all'acqua contenuta nel tubo saliente. Questo scopo si trova naturalmente raggiunto quando lo stesso tubo saliente comunica a due o più corpi di tromba, dove i moti simultanei degli stantuffi hanno luogo in senso contrario. Possiamo ancora ottenere questo moto continuo impiegando (*Tav.* CLXV, *fig.* 2) un solo corpo di tromba e due stantuffi, di cui

l' uno discende quando l'altro sale. Finalmente, possiamo non avere, come nella (*Tav.* CLXV, *fig.* 3) che un solo corpo di tromba e un solo stantuffo. Quando lo stantuffo P sale, esso aspira per la valvola T che è aperta, come pure la valvola S che lascia passare l'acqua sollevata sulla testa dello stantuffo. Quando esso discende, esso aspira per la valvola T' che è aperta, e preme di basso in alto l'acqua che passa per la valvola S'.

18. Trombe rotanti. Da Ctésibius, al quale si attribuisce l'invenzione delle trombe, fino a quest' ultimi tempi, gli sforzi degli idraulici si erano limitati a perfezionarne le loro disposizioni; ma, recentemente, due meccanici assai distinti, Bremah in Inghilterra, e il signor Dietz in Francia, si sono aperti delle nuove strade, costruendo apparecchi nei quali il moto di rotazione continuo è sostituito al moto alternativo. Daremo un' idea del modo d' azione di queste ingegnose macchine, prendendo dal signor d'Aubuisson la descrizione della tromba di Dietz.

» Al corpo di tromba è sostituito un tamburo o scatola cilindrica di rame A (*Tav.* CCXLV, *fig.* 4), avente in opera $0^m,20$ a $0^m,40$ di diametro, e $0^m,04$ a $0^m,12$ di grossezza, secondo la forza della macchina. L'anzidetta scatola contiene fra i suoi due fondi, una seconda scatola BB', ugualmente cilindrica di rame, di minor diametro e senza coperchio. Essa è mobile attorno di un albero girevole C; munito di una manovella. Nell'interno della scatola o ruota BB', e attiguo al suo bordo concavo vi ha un eccentrico D fermato a viti sul tamburo. Questo racchiude pure dalla parte dei tubi E ed F una larga fascia di ferro G*b*H, compressa in *b* contro la convessità della ruota e nella quale sono praticate due aperture; per quella in *c* l'acqua passa dal tubo d'aspirazione E nell' intervallo *aaaa*, che esiste tra le due scatole, e per l'altra *d* l'acqua entra nel tubo d'ascensione F. Finalmente la scatola BB' in tutta la sua grossezza, e quasi presso all'albero girevole, presenta quattro incastri in croce nei quali scorrono quattro linguette di ferro I, I', I'' e I'''. La loro larghezza parallela all'albero, come quella della fascia G*b*H, è uguale alla distanza che havvi tra i due fondi del tamburo; una delle loro estremità è costantemente appoggiata contro il bordo esterno dell'eccentrico D, l'altra contro della parete concava dell' intervallo *aaa*; dimodochè, a guisa di tramezze, dividono quest'intervallo in cassette separate.

» Quando si pone la macchina in moto e che la ruota BB' va da *b* verso B', la linguetta I, dopo aver passato il punto *b*, lascia dietro a se un vuoto, e dal punto ch'esso è al di là dell'apertura *c*, l'acqua entra per riempirlo; la linguetta I' che vien dopo spinge davanti a se quest'acqua, le fa percorrere l'intervallo *aaa*, la costringe a passare per l'apertura *d* ed a salire nel tubo F. Così successivamente si ha un moto ed un getto continuo.

» Dietro a quanto si è detto, perchè la macchina innalzi tutta l'acqua possibile conviene che il fluido sia esattissimamente ritenuto nelle cassette, e che non possa passare dall'una all'altra, e per conseguenza che la scatola mobile e le linguette combacino perfettamente coi due fondi del tamburo, senza però cagionarvi un attrito considerabile. E perchè ciò avvenga occorre una perfezione grandissima nell'acconciamento dei pezzi della macchina. Quando una tale perfezione esisterà nella macchina allorchè esce dalle mani dell'artista, v'ha tuttavolta a temere che non venga alterata da lungo e continuato lavoro nell'elevazione d'acque salate, ec., e che alla fine di un certo tempo l'effetto utile non divenga molto inferiore di quanto era primitivamente. Questo, in un'esperienza fatta dai Molard e Mallet fu 0,44 della forza impiegata a produrlo. »

Questo resultamento è di molto inferiore a quello delle trombe a moto alternativo, quand' anche abbian questa per lungo tempo servito; ma dobbiamo ag-

giungere che la macchina sopra la quale i signori Molard e Mallet hanno fatto la loro esperienza non aveva probabilmente tutta la perfezione di quelle che si trovano ora nei lavoratorii del signor Stolz; poichè avendo avuto più volte l'occasione d'impiegare quest'ultime, abbiamo potuto riconoscere che l'effetto utile, il quale si elevava o, 66 della forza applicata quando l'apparecchio era nuovo, non ascendeva al di sotto di o, 5o dopo un servizio giornaliero e continuo di un anno.

Non possiamo entrare in maggiori particolarità sopra queste macchine, per le teorie delle quali si deve consultare la *Nuova Architettura idraulica* del Prony, come ancora una memoria del Borda, *Accademia delle Scienze di Parigi* 1768; il tomo primo dei *Principii d'Idraulica* del Dubuat, il *Trattato elementare delle Macchine* dell' Hachette; Bélidor, *Architettura idraulica*, t. II; e finalmente il D' Aubuisson, *Trattato d'Idraulica*.

TRONCATO (*Geom.*). Si chiama *piramide troncata* e *cono troncato* una piramide e un cono dai quali abbiamo sottratta la parte superiore (*Vedi* CONO e PIRAMIDE).

TROPICO (*Astron.*). Nome di due piccoli circoli della sfera celeste, paralleli all'equatore. Essi passano pei punti solstiziali e sono lontani dall'equatore di circa 23 gradi e 28 minuti, l'uno dalla parte di settentrione l'altro dalla parte di mezzogiorno: il primo, che passa pel solstizio d'estate ossia pel primo punto del Cancro, dicesi *tropico del Cancro*; l'altro, che passa pel solstizio d'inverno ossia pel primo punto del Capricorno, si chiama *tropico del Capricorno*.

Il nome di *tropico* viene da τροπή, *ritorno*, ed è stato dato a questi circoli, perchè, quando il sole dopo essersi continuamente allontanato dall'equatore è giunto a descriverli, gli abbandona subito e ritorna indietro verso l'equatore.

La distanza dei due tropici è il doppio della massima declinazione del sole o della obliquità dell'ecclittica, perciò è eguale a circa 47 gradi e comprende la intera larghezza della zona torrida, che è appunto racchiusa tra i due tropici. *Vedi* OBLIQUITÀ DELL' ECCLITTICA, ARMILLARE, ANNO TROPICO.

TSCHIRNHAUSEN (EHRENFRIED WALTHER DE), gentiluomo tedesco, che si è reso celebre pei suoi lavori e per le sue scoperte in diottrica, nacque il 13 Aprile 1651, in una terra dell'Alta Lusazia che apparteneva alla sua famiglia. Ricevè un'educazione conforme all'alta posizione sociale de' suoi genitori e terminò i suoi studj all'università di Leida. In età ancor giovine Tschirnhausen servì per qualche tempo in qualità di volontario; ma non tardò a darsi interamente allo studio delle scienze, per le quali aveva di buon'ora manifestato una predilezione e un'attitudine particolare. Visitò la Francia, l'Inghilterra, l'Italia, la Sicilia, l'isola di Malta e la Germania, e dovunque strinse amicizia coi dotti più illustri e lasciò prove non dubbie del suo talento e delle sue cognizioni. In uno de' suoi viaggi (nel 1680) a Parigi, presentò all'Accademia delle Scienze una memoria intorno ad una sua scoperta sulla maniera di fare il fosforo: ma due anni dopo espose un'altra scoperta assai più importante, quella cioè delle curve caustiche, che conservando il nome dell'inventore sono anche oggi chiamate le *Caustiche di Tschirnhausen*. Sebbene non avesse allora che trentun anno, Luigi XIV con onorevole distinzione lo fece annoverare tra i membri dell'accademia allora nascente; e quando l'accademia venne definitivamente organizzata nel 1699, Tschirnhausen ne fu uno dei primi membri. Nel 1682 l'Accademia aveva nominato Cassini, Mariotte e La Hire per esaminare le lenti ustorie immaginate da Tschirnhausen, e nel rapporto che ne fece la commissione, rapporto che venne inserito nelle Memorie dell'anno 1699, si leggono le seguenti espressioni: » Gli » effetti di queste lenti ustorie sono superiori a tutto ciò che erasi veduto finora. » Il legno, comunque duro o verde si sia, anco bagnato nell'acqua, s'infiamma

» in un istante; in un vasetto, l'acqua passa tosto all'ebullizione. I pezzi di » metallo di discreta grossezza si fondono, giunti che siano ad un certo grado » di calore. Il ferro ridotto in lastre sottili s'arroventa immantinente e si fonde. » I tegoli, le lavagne, la majolica arrossano subito e si vetrificano. Si possono » fare con tali lenti delle curiose rappresentazioni di ottica, e se ne farebbero » dei cannocchiali e dei microscopj incomparabilmente migliori di tutti quelli » che si videro finora ».

Allora Tschirnhausen si diede con maggiore alacrità di prima ai suoi studj di ottica. Persuaso che i nostri progressi in fisica sarebbero rimasti al punto in cui allora si trovavano, finchè non si fossero perfezionati gli stromenti ottici; persuaso che per meglio conoscere la natura fa d'uopo vederla più d'appresso nelle intime sue forme, rivolse tutta la sua attenzione alla costruzione di nuovi strumenti da lui ideati. Introdusse grandi miglioramenti nell'arte vetraria, e dopo perseveranti studj e ripetuti tentativi giunse finalmente a formare la sua famosa lente convessa da ambe le parti, che tanto è stata utile ai progressi delle scienze. Ecco come se ne parla nel rapporto fatto all'Accademia delle Scienze: » Tale lente, convessa da ambe le parti, con trentadue piedi di fuoco, è straordi- » naria per la grandezza del suo diametro. Laddove le maggiori lenti dello stesso » fuoco, adoperate finora, non hanno che quattro o cinque pollici di diametro, » questa ha più di un piede: ne aveva anzi due in principio, ma fu danneg- » giata da un accidente. Quindi si può giudicare quale dese essere la macchina » inventata da Tschirnhausen per poter lavorare lenti sì grandi. Tutta la diottrica » pare che venga soverchiata dagli effetti che produsse. Lo spazio che può ve- » dersi contemporaneamente con lente siffatta è di un'incredibile grandezza ». E nell'elogio di Tschirnhausen, che fu recitato nell'Accademia delle Scienze dopo la di lui morte, si legge intorno a questa stessa lente: » Lo specchio, convesso » da ambe le parti, è una porzione di due sfere, ciascuna delle quali ha dodici » piedi di diametro, e pesa centosessanta libbre, che è una grandezza enorme re- » lativamente alla massima lente convessa che sia stata mai fatta. Gli orli ne sono » lavorati colla stessa perfezione che il mezzo; ciò che la distingue in special modo » è che il fuoco ne è esattamente rotondo. Tschirnhausen assicura che la massa » di vetro dalla quale fu tratta pesava sette quintali, ed anco questo sarebbe una » maraviglia nell'arte vetraria ».

Nel 1701 si recò a Parigi per prender parte ai lavori dell'Accademia, e nella seduta tenuta da quella dotta Società il 23 Dicembre presentò un *Metodo per trovare i raggi delle evolute, le tangenti, le quadrature e le rettificazioni di parecchie curve, senza supporvi alcuna quantità infinitamente piccola.* Non è qui inutile il fare osservare che Tschirnhausen, le cui cognizioni in geometria erano d'altronde elevatissime, credeva che il metodo degl'infinitamente piccoli non fosse necessario alla scienza, e che si potesse facilmente supplirvi per mezzo di metodi molto meno complicati. Dominato appunto da questa falsa idea sottopose all'Accademia, nella seduta de' 10 Gennajo 1702, una nuova memoria, nella quale sviluppando i suoi concetti esponeva un *Metodo per trovare le tangenti delle curve meccaniche senza supporre alcuna grandezza infinitamente piccola.* Conchiudeva che col suo metodo potevansi trovare le tangenti non solo delle cicloidi, ma eziandio di tutte le curve immaginabili. Queste memorie, che sono per lo meno curiose, eccitarono l'attenzione dei geometri. Tschirnhausen morì in Sassonia l'11 Ottobre 1708.

TURBINE (*Idraul.*). Nome generico di diverse macchine idrauliche il cui organo principale è una ruota orizzontale che riceve l'azione dall'acqua motrice.

Le ruote idrauliche orizzontali son conosciute da lungo tempo, e quantunque quelle che s'impiegano nel mezzogiorno della Francia non utilizzano che una

piccola parte della forza motrice consumata, si preferiscono alle altre ruote, perchè la posizione verticale del loro asse semplicizza considerabilmente il meccanismo dei molini che esse mettono in moto. (*Vedi* Ruota). Il signor Burdin, ingegnere delle mine, colpito dall'enorme perdita di forza che queste macchine portano seco, avendo cercato i mezzi di perfezionarle, immaginò diverse combinazioni ingegnosissime per mezzo delle quali una ruota orizzontale può disporsi in modo da obbedire tanto alla pressione dell'acqua quanto alla sua reazione, quanto finalmente alla sua forza centrifuga. I lavori di questo distinto sapiente hanno mediante ciò dato origine alle tre classi di macchine comprese da esso sotto il nome di *turbini*, nome immediatamente adottato da tutti gli idraulici.

Il *turbine* detto a *evacuazione alternativa*, è messo in giuoco dalla pressione dell'acqua. Il signor Burdin ne ha stabilito uno al mulino di Pontgibaud (dipartimento del Puy-de-Dôme), il cui effetto utile, misurato per mezzo del ritegno dinamometrico, è stato 0,67 della forza totale impiegata. Questo consiste in una ruota a canali curvi che riceve l'acqua da tre circonferenze e la rende in modo che la porzione che esce da un canale non può essere urtata dal canale che viene immediatamente dopo. Se ne trova la descrizione nel tomo III degli *Annali delle mine* per l'anno 1833.

Il *turbine* detto *a reazione* è mosso dalla reazione (*vedi* questa parola) dell'acqua. Quello che il signor Burdin ha stabilito al mulino d'Ardres, nel dipartimento del Puy-de-Dôme, produce un effetto utile che mai non è stato al disotto di 0,65 della forza motrice e che alcune volte si è elevato fino a 0,75. La descrizione è stata data negli *Annali delle mine*, Tomo III, anno 1828.

Il *turbine a forza centrifuga* è la prima macchina idraulica dove si è immaginato d'impiegare la sola forza centrifuga del liquido in moto. Il signor Burdin ne ha fatta menzione in una memoria presentata alla Società d'incoraggimento per il concorso dell'anno 1827; ma sebbene si conosca che non si può rifiutargli la priorità dell'idea principale, il merito di avere realizzato quest'idea superando tutte le difficoltà inerenti alla costruzione, appartiene certamente al signor Fourneyron; laonde è con giustizia che questa macchina non s'indica che sotto il nome di *turbine Fourneyron*.

Il Turbine Fourneyron ha la particolare proprietà di camminare con un eguale vantaggio, tanto che esso si trovi interamente immerso nell'acqua dello strato inferiore, quanto che esso non si tuffi che in parte in quest'acqua, quanto finalmente che esso si muova nell'aria. Quello che il signor Fourneyron ha costruito sopra il Doubs vicino a Besançon consiste in un forte tino *bb* (*Tav.* CLXXXIV, *fig.* 5) in getto chiuso dall'alto, salvo il centro, dal quale esso dà apertura ad un lungo tubo verticale pel quale passa l'albero verticale della ruota. L'acqua giunge in questo tino mediante un canale di getto *aa*, il quale può essere centrato e condurre l'acqua da un serbatoio superiore, il che permette, nel caso in cui il moto debba essere trasmesso ad un punto sensibilmente più basso del livello del serbatojo d'acqua di non dare all'asse del turbine una lunghezza troppo grande, che lo indebolirebbe, e di situare nel punto il più conveniente e con tutta facilità gli ingranaggi di rinvio che ordinariamente si adattano alla parte superiore dell'asse. L'acqua entrando così nel tino, lo riempie interamente, essa si trova, verso il basso, all'altezza *h*, dei tramezzi verticali e curvi *dd* che la conducono sul turbine; questi tramezzi sono visti in pianta nella fig. 5 della detta Tavola CLXXXV. Il turbine è una ruota ad ali curve orizzontali, portata sopra una callotta sferica *ll* forata al suo centro *m* per il passaggio dell'asse, il quale riposa sopra un bilico *n*. L'asse e la callotta sferica fanno corpo insieme. L'acqua condotta dai tramezzi *dd* sopra le palette *ee*, è obbligata a seguirne la curvatura, ed esercita sopra esse, in virtù della sua

forza centrifuga, un' azione motrice che imprime alla ruota un modo di rotazione rapidissimo.

Si trova una descrizione particolarizzata di quest' interessante macchina nel *Bullettino della Società d' Incoraggimento* di Parigi, anno 1834. Dopo, il siguor Fourneyron ne ha costruiti molti altri con un successo che non potremmo fare apprezzare di più che citando le seguenti parole del sigoor Poncelet: « Si sa con qual' arte infinita il signor Fourneyron è giunto a liberare questo stesso turbine al difetto in principio tanto capitale del pronto usare dei perni, e come ancora a forza di studj, di cure e di perseveranza, ne ha perfezionate le differenti parti in modo da costituire, del complesso, un motore potente che è in tutti i punti paragonabile, per l' eleganza e la semplicità delle disposizioni, a quella ammirabile macchina dovuta a quarant' anni di lavori di un uomo di genio come l' Watt ». (*Théorie des effets de la turbine Fourneyron*. Parigi, presso Bachelier, 1838).

Il signor Fourneyron ha creduto poter concludere dalle sue proprie esperienze che, in delle buone condizioni di velocità e di stabilità, l' effetto utile varia tra 0,70 e 0,85 della forza motrice. Vedi la memoria digià citata del signor Poncelet e quella del signor capitano Morin intitolata: *Expériences sur les roues hydrauliques à axe vertical appelées turbines*.

TYCHO. *Vedi* Brahé.

U

UBALDO. *Vedi* GUID' UBADO.

ULLOA (ANTONIO DE) fu uno degli uomini che onorarono maggiormente la Spagna nel secolo decimottavo per i suoi lunghi ed utili servigi come scienziato, come marino, come viaggiatore, come amministratore. Nacque in Siviglia il 12 Gennaio 1716. Destinato di buon'ora alla marineria, si applicò con ardore agli studj necessarii a quell' arringo, e rapidi furono i progressi che vi fece. Allorchè l' Accademia delle Scienze di Parigi inviò al Perù alcuni dei suoi membri (*Vedi* BOUGUER, LA CONDAMINE e GODIN) per misurarvi un arco di meridiano sotto l'equatore, il governo di Spagna inviò in America Antonio de Ulloa e D. Giorgio Juan (*Vedi* JUAN), che insieme coi geometri francesi cooperassero alla dotta impresa. Gl' incaricati spagnuoli partirono nel 1735, e nel Giugno del 1736 cominciarono i lavori. Ulloa in particolar modo contribuì con zelo straordinario a tutte le operazioni trigonometriche insieme con Bouguer e la Condamine, mentre Juan e Godin dal canto loro, come in linea di riprova, formarono un'altra serie di calcoli e di triangoli. Ma nel 1740 essendosi accesa la guerra tra la Spagna e l' Inghilterra, Ulloa e Juan furono obbligati a interrompere le osservazioni astronomiche che allora stavano facendo in una dell' estremità dell' arco del meridiano che era stato misurato, perchè per ordine del vicerè dovettero occuparsi a mettere in stato di difesa i bracci di mare vicini a Lima e a Callao: e d' allora in poi, sebbene a diversi intervalli si riunissero colla spedizione francese, non può più dirsi che avessero una parte molto attiva nelle di lei operazioni.

Una succinta notizia biografica quale può esserci permessa dalla natura di questo Dizionario ci vieta di entrare in alcuna particolarità sulle vicende sofferte da Ulloa: solo diremo che fatto prigioniero dagl' Inglesi fu condotto a Londra, ove fu trattato con tutti i riguardi e fatto membro della Società Reale: ma non gli fu dato di tornare in patria che nel 1746. Nei due anni successivi si occupò unicamente della relazione del suo viaggio, che pubblicò a Madrid nel 1748, in 2 vol. in-4, col seguente titolo: *Relazione storica del viaggio fatto nell' America meridionale, d' ordine del re, per misurare alcuni gradi del meridiano e conoscere la vera figura della terra.* A Juan fu più particolarmente affidata l' esposizione delle osservazioni geometriche, fisiche e astronomiche, fatte tanto in comune che separatamente da ognuno di essi; e tal volume comparve sotto il titolo di *Osservazioni, ec.* 1748. Ulloa visitò poscia una gran parte dell' Europa per ordine del re, e le cognizioni che in tale viaggio raccolse furono felicemente applicate al servizio dello stato e all' utilità della nazione. Durante il corso di una vita attivissima, Ulloa cercò sempre di conciliare il genio suo per lo studio delle scienze colle numerose commissioni di cui fu incaricato dal suo governo pel servizio marittimo e per il miglioramento dell' industria nazionale. Scoprì e denunziò le malversazioni che si commettevano nell' amministrazione delle miniere del mercurio nel Perù: fu uno dei più grandi promotori dell' astronomia, e contribuì molto alla costruzione dell' osservatorio di Cadice. La Spagna gli deve il primo gabinetto di storia naturale e il primo laboratorio di metal-

lurgia che abbia posseduti; la cognizione del platino e delle sue proprietà; dell'elettricità e del magnetismo artificiale. È desso che perfezionò l'arte dell'intaglio e della stampa in Spagna, e che diresse la geografia spagnuola nella compilazione delle carte della penisola. Finalmente questo dotto, di cui tutta la vita fu consacrata alla scienza e al servizio della patria, morì nell'Isola di Leon il 3 luglio 1795 in età di 80 anni. Era socio delle accademie di Stockholm e di Berlino, ed era divenuto membro corrispondente di quella di Parigi fino dal 1748. Oltre l'opera citata, abbiamo di lui: I *Notizie americane, o trattenimenti fisico-storici sull' America meridionale e settentrionale*, Madrid, 1772, in-4: è questa una raccolta interessante di osservazioni fatte durante i suoi viaggi; II *La marina, o le forze navali dell' Europa e dell' Affrica*, ivi, 1773; III *Osservazione fatta in mare dell' ecclisse solare avvenuto nel* 1768, Cadice, 1768: tradotta in francese da Darquier, Tolosa, 1780, in-8.

UNIFORME (*Mecc.*). Il moto uniforme è quello di un mobile che percorre spazj eguali in tempi eguali. *Vedi* Moto.

UNITA'. Quantità presa per termine di confronto tra oggetti della stessa natura e che si considera individualmente senza aver riguardo alle parti di cui possa esser composta. *Vedi* Aritmetica.

UNIVERSALE. Orologio universale. (*Gnom.*) Di tutti gli orologi solari portatili e che non hanno bisogno di essere orientati, questo è il più semplice e il più facile a costruirsi. Dopo aver descritto sopra un cartone, con un raggio arbitrario AC, una circonferenza di circolo (*Tav.* CLIX, *fig.* 1), si divide la medesima in dodici parti eguali, e si uniscono quindi a due a due i punti di divisione per mezzo di linee parallele che divengono le linee orarie della figura. All'estremità A del diametro AS perpendicolare a tutte queste linee, si conduce la retta AB che faccia col diametro AS un angolo BAS eguale alla latitudine del luogo pel quale vuol costruirsi l'orologio, poscia si prolunga questa linea fino al suo incontro colla retta BC che passa pel centro. Nel punto d'intersezione B si conduce ad AB una perpendicolare sulla quale si segnano alla destra e alla sinistra del punto B i punti d'intersezione che saranno determinati da tutte le rette condotte dal punto A e formanti con AB degli angoli di 1, 2, 3, 4 ec. gradi. Per esempio, la retta AD che fa con AB un angolo BAD di 10 gradi determina la divisione segnata col numero 10. Terminato lo strumento come viene indicato dalla figura, si tira nella sua parte superiore una retta parallela al diametro AS, quindi si pongono alle due estremità di questa retta e perpendicolarmente al piano dell'orologio due traguardi aventi tutti e due un foro circolare per potere mirare una stella, o di cui uno solo C' ha un foro, se non si vuol far uso che del sole, mentre l'altro deve essere attraversato da due linee il cui punto d'intersezione corrisponda al foro del primo traguardo.

Per servirsi di questo orologio, si adatta alle divisioni superiori un filo DM che porta un piccolo peso di piombo alla sua estremità inferiore, e nel quale è infilata una piccola perla che si può fare scorrere a volontà. Fissata pertanto l'estremità superiore del filo alla divisione che corrisponde alla declinazione del sole, e posta la perla in modo che tendendo il filo e facendolo passare pel punto A, la perla copra questo punto, si presenta verticalmente lo strumento ai raggi del sole girando dalla parte di quest'astro il traguardo C' in modo che il raggio luminoso che passa pel foro di questo traguardo cada sul punto corrispondente dell'altro traguardo. Allora il filo DM prende, in forza del peso del suo piombo, una posizione verticale, e la perla M indica l'ora mediante la sua posizione sulle linee orarie. Per esempio, nella figura essa taglia la linea segnata V, VII, ed indica così 5 ore dopo mezzogiorno o 7 ore avanti, perchè le cifre segnate in alto indicano le ore della sera, e quelle segnate in basso le ore della mattina: quan-

do la perla cade fra due linee, essa indica gl' istanti intermedj. Si possono facilmente calcolare a occhio le frazioni di ore, e d'altronde nulla impedisce che si moltiplichino le linee orarie. Dividendo il circolo in 24 parti, si hanno le linee orarie di mezz'ora in mezz'ora, e così di seguito.

Con due traguardi forati mirando una stella e fissando il filo alla declinazione della stella, si troverebbe nel modo medesimo l'ora di questa stella che si ridurrebbe poi ad ora solare mediante la differenza delle ascensioni rette del sole e della stella.

UOMO. (*Mec.*) L'uomo, considerato come motore, può agire in un' infinità di modi differenti, ma in tutti non può produrre lo stesso *effetto utile*, e per tirare il più gran partito possibile dalla sua forza, è ben necessario conoscere le circostanze ove il suo sviluppo è accompagnato dalla minor fatica.

L'azione dell'uomo, come quella degli animali, è sottoposta ad un numero tanto grande di variazioni, che fin qui è stato impossibile di sottoporla a leggi teoriche. Le ricerche del Lambert sopra quest'oggetto, quelle di Daniele Bernoulli e di alcuni altri sapienti, per quanto ingegnosissime, presentano troppa poca certezza per servire di base a valutazioni esatte; e ciò che, provvisoriamente, vi è da fare di meglio, si è di regolarsi secondo i resultamenti dell'esperienze che offrono almeno dei termini di paragone nelle diverse specie di lavori ai quali l'uomo può essere impiegato.

Avendo digià dato alle parole Cavallo, Dinamico e Effetto utile i principj ammessi per la valutazione dell'effetto prodotto dagli agenti motori, cominceremo immediatamente da esaminare i fatti, tra i quali quelli che sono stati osservati dal Coulomb tengono ancora al giorno d'oggi il primo posto.

Secondo questo celebre fisico, un uomo senza carico, camminando sopra una strada orizzontale, e il quale non ha, che il suo proprio corpo da muovere, può percorrere 54000 metri in una giornata di dieci ore, divise da una o due refezioni di due a tre ore insieme. Prendendo 65 chilogrammi per il peso medio del corpo, l'effetto giornaliero prodotto, e che lo stesso uomo può ricominciare più giorni di seguito, è dunque

$$65^{ch.} \times 54000^{m} = 3510000^{ch.},$$

vale a dire, 3510000 chilogrammi trasportati ad un metro per giorno, ossia 3510 *unità dinamiche*. In questo caso non ci è veruno effetto utile prodotto.

Se invece di camminare sopra una strada orizzontale, lo stesso uomo saliva un declivio dolce ovvero una scala comoda, non sarebbe più capace di muoversi come nel caso precedente, con una velocità media di $1^{m},5$ per secondo, esso non potrebbe prenderne che una di $0^{m},15$; e se esso continuasse quest' esercizio per più di otto ore per giorno, esso non sarebbe più in istato di ripeterlo nei giorni seguenti. Così, la differenza di camminare salendo sopra un piano inclinato invece di camminare sopra un piano orizzontale diminuisce l'effetto della forza dell'uomo di $\frac{11}{12}$; poichè in questo caso, l'effetto prodotto per ogni secondo, è

$$65^{ch} \times 0^{m},15 = 9^{ch},75,$$

il che fa, per otto ore, 280800 chilogrammi, ossia 281 unità dinamiche; ora il rapporto di 281 a 3510 è, quasi lo stesso di quello di 1 a 12.

In questi due casi, alcun effetto utile, nel senso attaccato a quest' espressione, non è prodotto, poichè non vi è alcun lavoro effettuato; ma, se ora supponiamo che l'uomo porti dei pesi sopra il suo dorso, potremo paragonare i prodotti del suo lavoro. L' esperienza prova che un uomo camminando in piano, e

caricato di 40 chilogrammi, può muoversi con una velocità di $0^m.75$ e durare sett' ore per giorno, il che dà per la quantità d'azione giornaliera, o per l'*effetto utile*, 756000 chilogrammi. Se esso sale una scala o un declivio dolce, caricato di 65^{ch}, la sua velocità non sarà più che di $0^m,04$, e non potrà sostenere questo lavoro più di sei ore per giorno; l'effetto utile non sarà dunque che di 56160*ch* per giorno. Così, nel primo caso, l'effetto utile è rappresentato da 756 unità dinamiche, e nel secondo, solamente da 56.

Ecco la riunione dei resultamenti che, secondo il Navier, comportano il maximum d'effetto utile nell'uso indicato dalle forze.

1.° Uomo che cammina sopra una strada orizzontale senza carico.

Peso medio del corpo.	65 chilogrammi
Velocità per ogni secondo	$1^m,5$
Durata del lavoro giornaliero	10 ore
Effetto prodotto in unità dinamiche.	3510.

2.° Uomo che viaggia in piano e porta dei carichi sul suo dorso.

Peso trasportato	40 chilogrammi
Velocità per ogni secondo.	$0^m,75$
Durata del lavoro giornaliero	7 ore
Effetto utile in unità dinamiche.	756,

3.° Uomo che sale una china dolce ovvero una scala senza carico.

Peso medio del corpo	65 chilogrammi
Velocità per ogni secondo.	$0^m,15$
Durata del lavoro giornaliero	8 ore
Effetto prodotto in unità dinamiche	281.

4.° Uomo che sale una china dolce o una scala, con un peso sul suo dorso

Peso trasportato	65 chilogrammi
Velocità per ogni secondo	$0^m,04$
Durata del lavoro giornaliero	6 ore
Effetto utile in unità dinamiche.	56.

5.° Manuale trasportando in piano dei materiali sul suo dorso, e ritornando a vuoto a cercare dei nuovi carichi.

Peso trasportato	65 chilogrammi
Velocità per ogni secondo	$0^m,5$
Durata del lavoro giornaliero	6 ore
Effetto utile in unità dinamiche	702.

6.° Manuale trasportando dei materiali in un carretto, ritornando a vuoto a cercare nuovi carichi.

Peso trasportato	60 chilogrammi
Velocità per ogni secondo	$0^m,5$
Durata del lavoro giornaliero	10 ore
Effetto utile in unità dinamiche	1080.

7.° Manuale trasportando dei materiali in una piccola carretta o carretto a due ruote e ritornando a vuoto a cercare nuovi carichi.

Peso trasportato.	100 chilogrammi
Velocità per ogni secondo	$0^m,5$
Durata del lavoro giornaliero	10 ore

Effetto utile in unità dinamiche . . . . 1800.

8.° Manuale elevando dei pesi per mezzo di una corda che passa sopra una puleggia, il che l'obbliga a fare scendere la corda a vuoto.

Peso elevato . . . . 18 chilogrammi
Velocità per ogni secondo . . . . 0^{m},2
Durata del lavoro giornaliero . . . . 6 ore
Effetto utile in unità dinamiche . . . . 78.

9.° Manuale elevando dei pesi sollevandoli con la mano.

Peso trasportato . . . . 20 chilogrammi
Velocità per ogni secondo . . . . 0^{m},17
Durata del lavoro giornaliero . . . . 6 ore
Effetto utile in unità dinamiche . . . . 73.

10.° Uomo che agisce sopra una manovella.

Sforzo costante esercitato . . . . 8 chilogrammi
Velocità per ogni secondo. . . . . 0^{m},75
Durata del lavoro giornaliero . . . . 8 ore
Effetto utile in unità dinamiche . . . . 173.

11.° Manuale camminando e spingendo o tirando in una direzione orizzontale.

Sforzo esercitato . . . . 12 chilogrammi
Velocità per ogni secondo. . . . . 0^{m},6
Durata del lavoro giornaliero . . . . 8 ore
Effetto utile in unità dinamiche . . . . 207.

12.° Manuale agendo col suo peso sopra una ruota a pinoli o a tamburo, e situato al livello dell'asse della ruota.

Sforzo esercitato . . . . 60 chilogrammi
Velocità per ogni secondo . . . . 0^{m},15
Durata del lavoro giornaliero . . . . 8 ore
Effetto utile in unità dinamiche . . . . 259.

13.° Manuale agendo col suo piede verso il basso di una ruota a piuoli o a tamburo.

Sforzo esercitato . . . . 12 chilogrammi
Velocità per ogni secondo . . . . 0^{m},7
Durata del lavoro giornaliero . . . . 8 ore
Effetto utile in unità dinamiche . . . . 242.

14.° Manuale spingendo con i piedi una ruota a piuoli.

Sforzo esercitato . . . . 62 ,5 chilogrammi
Velocità per ogni secondo. . . . . 0^{m},15
Durata del lavoro . . . . 8 ore
Effetto utile in unità dinamiche. . . . . . . 270.

Gli sforzi di trazione che l'uomo può sviluppare sono stati assai differentemente apprezzati da diversi autori. Schulze valuta 48 o 49 chilogrammi lo *sforzo assoluto*, vale a dire quello che l'uomo è capace di sostenere per qualche tempo senza prendere velocità. Il Bernoulli non porta questo sforzo che a 34 chilogrammi; ma il Guenyveau ha trovato che, quando la traizione si effettua per mezzo di sopra-spalle, lo sforzo assoluto può elevarsi da 50 a 60 chilogrammi.

La velocità assoluta, o la più gran velocità che l'uomo possa sostenere per qualche tempo senza avere altro sforzo da produrre che quello dello spostamento

del suo corpo, è di $1^m,637$ per ogni secondo, secondo lo Schulze; di 2 metri, secondo Bernoulli; e di 2 a 3 metri, secondo il Guenyveau.

Si chiama *sforzo relativo* a *velocità relativa* lo sforzo medio e la velocità media la cui combinazione può produrre il maximum di effetto utile.

Lo sforzo relativo è, secondo lo Schulze, di 13 a 14 chilogrammi; di 15 chilogrammi, secondo il Bernoulli, e di $17^{ch},13$ secondo il Guenyveau, quando la traizione si fa per mezzo di un sopra-spalla. La velocità relativa è di $0^m,757$, $1^m,660$, e $0^m,8$, secondo i medesimi osservatori.

Il più gran carico che un uomo possa portare ad una piccola distanza, è mediamente da 145 a 150 chilogrammi.

Non abbiamo bisogno di fare osservare che l'età, il clima, e soprattutto l'abitudine, cagionano grandi varietà nel valore delle quantità d'azioni giornaliere prodotte da diversi individui, e che non dobbiamo considerare i numeri riportati sopra che come termini medj a partire dai quali molte circostanze, e principalmente l'ineguaglianza delle forze degli individui, possano cagionare delle differenze più o meno grandi; ma questi numeri presentano ciò non ostante delle indicazioni importantissime sopra i mezzi d'impiegare la forza dell'uomo nel modo il più vantaggioso; poichè basta gettarci un colpo d'occhio per riconoscere, per esempio, che si ottiene un effetto utile più che doppio facendo agire un uomo sopra una manovella, piuttosto che facendogli elevare dei pesi per mezzo di una corda che passa sopra di una puleggia fissa; che il manuale che trasporta dei materiali sopra una carretta fa più lavoro di quello che gli porta sul dorso, ec., ec. Si deve consultare, per tutto ciò che riguarda i motori animati, la memoria del Coulomb sopra *la Forza degli Uomini*, come pure le seguenti opere: Prony, *Nouv. Archit. hydraulique*; Christion, *Mécanique industrielle*; Guenyveau, *Essai sur la science des Machines*; Coriolis, *Calcul de l'effet des Machines*. Il signor Borgnis, nel suo *Trattato della composizione delle Macchine*, espone con grandi particolari tutto ciò che è stato fatto o proposto per il migliore impiego della forza dell'uomo e degli animali.

URANO (*Astron.*). Nome di uno dei pianeti del nostro sistema solare, il più lontano dal sole di tutti quelli che si conoscono fino a questo giorno. Esso fu scoperto da Herschel il 13 Marzo 1781.

Chiamato in principio col nome di *Georgium sidus* (*l'astro di Giorgio*), in onore del sovrano la cui illuminata protezione aveva incoraggiato i lavori dell'astronomo, fu in seguito indicato col nome di Herschel; ma l'analogia ha fatto poi adottare generalmente quello di *Urano*. Il disco di questo pianeta, che non si scorge che con buoni telescopj, è di uno splendore uniforme e non presenta veruna macchia distinta, talchè non si conosce ancora la durata della sua rotazione.

Il diametro di Urano è di 13934 leghe; il suo volume è 77 volte più grande di quello della terra, e la sua massa è 19,8, prendendo per unità quella della terra. La densità di questo pianeta è dunque presso a poco 0,26, e non differisce molto da quella del sole.

Urano descrive la sua orbita intorno al sole nel lungo periodo di $30688^{gior.},713$, ossia di circa 84 anni. La massima sua distanza dal sole è di 787661512 leghe di 2000 tese, e la sua minima distanza di 717418832 leghe: la sua distanza dalla terra varia tra 826875829 e 687204515 leghe.

Ecco gli elementi d'Urano pel 1.° Gennaio 1801.

Semiasse maggiore, preso per unità quello della terra. .	19,1823900
Eccentricità in parti del semiasse maggiore.	0,0466794
Diametro equatoriale, prendendo per unità quello della terra.	4,3320900

Periodo siderale medio.	30686$^{gior.}$,820829G
Inclinazione sull' eclittica	0° 46′ 28″,4
Longitudine del nodo ascendente	72 59 35 ,3
Longitudine del perielio	167 31 16 ,1
Longitudine media dell' epoca	177 48 23 ,0

Urano è accompagnato da sei satelliti che presentano una particolarità notabile nel loro moto (*Vedi* Satelliti). Sono stati scoperti tutti da Heschel; il secondo e il quarto l' 11 Gennajo 1787, e gli altri quattro negli anni 1790 e 1794. Questi ultimi non sono stati più riveduti dipoi.

URANOGRAFIA. Parte dell' astronomia che ha per oggetto la descrizione del cielo. Le carte celesti si chiamano *carte uranografiche*.

URTO (*Meccanica*). Incontro di due corpi che si urtano.

L' urto può essere *diretto* o *obliquo*.

L' *urto diretto* è quello dove il punto di contatto dei corpi si trova sulla retta supposta condotta per i loro centri di gravità.

L' *urto obliquo* è quello che si fa in qualunque altra maniera.

I corpi che s' incontrano possono essere tutti due in moto, ovvero uno dei corpi può essere in riposo. Nel primo caso, si hanno due considerazioni differenti, cioè: quando i movimenti si effettuano nello stesso senso, o quando essi hanno luogo in un senso opposto.

Quantunque non esista nella natura corpi perfettamente elastici, nè corpi perfettamente duri o senza elasticità siamo obbligati, per stabilire le leggi dell'urto, a considerare i fenomeni che possono resultare dall' incontro di tali corpi; supporremo di più, che i movimenti non provino veruna alterazione nel mezzo in cui essi operano.

1. *Urto dei corpi senza elasticità.* Quando due tali corpi, i di cui movimenti hanno luogo nello stesso senso, vengono ad incontrarsi, la quantità di moto che si trova nei due corpi si distribuisce in modo che ne resulta la stessa velocità per tutti due dopo l' urto; poichè quello che va più sollecito agisce sull' altro, solamente fintantochè questo avendo acquistato tanta velocità quanto ne resta al primo, non fa più ostacolo al moto.

Siano A ed a due corpi senza elasticità, i quali vanno dalla stessa parte, a essendo il primo, e siano V e v le loro velocità respettive. Se A va più presto di a, o che V sia più grande di v, esso lo raggiungerà necessariamente, e allora i mobili si comprimeranno reciprocamente fintantochè essi siano animati di una velocità comune.

Indichiamo con F ed f le forze che hanno comunicato ai mobili A, a le velocità V, v; siccome queste forze possano essere rappresentate dalla *quantità di moto* che esse producono, e che la quantità di moto (*vedi* questa parola) di un mobile è uguale al prodotto della sua massa per la sua velocità, avremo

$$F = AV,$$
$$f = av.$$

Ma mediante il principio della *composizione delle forze* (*vedi* questa parola), quelle che operano nella stessa direzione debbono aggiungersi, così

$$F + f = AV + av \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Per ottenere un' altra espressione della somma delle forze $F+f$, indichiamo con x la velocità comune dopo l' urto, allora possiamo considerare $A+a$ come un solo corpo, e questa velocità x come il resultamento dell' applicazione della

forza $F+f$. Avremo dunque ancora

$$F+f=x\left(A+a\right) \ldots\ldots (2),$$

dall' equazioni (1) e (2), dedurremo

$$x\left(A+a\right)=AV+av$$

e per conseguenza

$$x=\frac{AV+av}{A+a} \ldots\ldots (3),$$

espressione generale della velocità finale.

2. Se i corpi si muovono in un senso opposto, o vanno all' incontro l' uno dell' altro, si deve considerare v come negativo, e l' espressione (3) diventa

$$x=\frac{AV-av}{A+a} \ldots\ldots (4).$$

3. Se il corpo a fosse in riposo quando A viene ad urtarlo, si avrebbe $v=0$ e la formula diventerebbe

$$x=\frac{AV}{A+a} \ldots\ldots (5).$$

Le tre espressioni (3), (4) e (5), contengono tutta la teoria dell' urto dei corpi non elastici.

4. Il Maupertuis giunse a queste formule mediante un' applicazione elegante del suo famoso principio della minima azione (*lex parcimoniae*); crediamo doverlo esporre in questo punto, rammentando che s' indica, mediante questo geometra, col nome di *quantità d' azione*, il prodotto della massa di un corpo per la sua velocità e lo spazio percorso.

Conservando le indicazioni date di sopra alle lettere A, V, a, v, x, avremo per la velocità perduta da A al momento dell' urto

$$V-x,$$

e per quella guadagnata da a

$$x-v.$$

Gli spazj percorsi in tempi uguali da queste velocità, stando tra loro come queste velocità, la quantità d' azione impiegata dal corpo A sarà come

$$A\left(V-x\right)^2;$$

e la quantità d' azione guadagnata dal corpo a sarà come

$$a\left(x-v\right)^2;$$

la quantità totale d' azione è dunque come

$$A\left(V-x\right)^2+a\left(x-v\right)^2,$$

e questa quantità dev' essere un minimum secondo la legge del Maupertuis.

Differenziando dunque quest' espressione, avremo

$$A\left[-2Vdx+2xdx\right]+a\left[2xdx-2vdx\right]=o,$$

dividendo per dx, e ricavando il valore di x, otterremo

$$x=\frac{AV+av}{A+a},$$

il che c'insegna, come sopra (1), che la velocità comune, dopo l'urto, è oguale alla somma delle quantità di moto divisa per la somma delle masse.

5. *Urto dei corpi elastici.* Quando dei corpi perfettamente elastici s'incontrano, nel tempo che essi s'incontrano, l'urto è impiegato a piegare le loro parti, a distendere la loro elasticità, e questi corpi non rimangono applicati l'uno contro l'altro che fintantochè la loro elasticità gli separi sbandandosi, e gli faccia allontare con altrettanta velocità con quanta si erano avvicinati: poichè la velocità respettiva essendo la sola causa che ha sbandato la loro elasticità, la reazione di questa elasticità deve riprodurre la medesima velocità respettiva che aveva luogo avanti.

Siano A ed a due corpi elastici che cominceremo dal supporre muoversi nello stesso senso con le velocità V e v. Questi corpi dovendo urtarsi, se a è in principio il più avanzato, bisogna che si abbia $V>v$. Premesso ciò, indichiamo con x la velocità del corpo A, e con x' quella del corpo a, dopo l'urto.

La velocità perduta da A sarà dunque $V-x$, e la velocità guadagnata da a, sarà $x'-v$, e la *quantità d' azione* impiegata nel cambiamento che resulta dall'urto, sarà

$$A\left(V-x\right)^2+a\left(x'-v\right)^2,$$

questa quantità dovendo essere un *minimum*, avremo differenziando

$$A\left[-2Vdx+2xdx\right]+a\left[2x'dx'-2vdx'\right]=o \;.\;.\;.\;.\;.\; (a).$$

Ma nei corpi perfettamente elastici, la velocità respettiva essendo la stessa avanti e dopo l'urto, abbiamo

$$V-v=x'-x,$$

ossia

$$x'=V-v+x,$$

il che dà

$$dx'=dx.$$

Sostituendo questi valori di x' e di dx' in (a), otterremo

$$x=\frac{AV-aV+2av}{A+a} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (m).$$

e quindi mediante la sostituzione di

$$x=x'-V+v,$$

e di

$$dx=dx'$$

nella medesima espressione, troveremo

$$x' = \frac{av - Av + 2AV}{A + a} \; \ldots\ldots (n),$$

con l'aiuto delle due espressioni (m) ed (n), possiamo esaminare tutte le particolarità dell' urto di due corpi elastici.

6. Cominciamo dal supporre le masse uguali, o facciamo

$$A = a$$

(m) ed (n) si riducono a

$$x = \frac{2Av}{2A} = v,$$

$$x' = \frac{2AV}{2A} = V.$$

il che c' insegna che in questo caso i mobili cangiano di velocità dopo l' urto.

7. Se i due corpi si muovono in senso opposto, o vanno all' incontro l' uno dell' altro, bisogna fare v negativo, e l' espressioni (m) ed (n) diventano

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{AV - aV - 2av}{A + a} \\ x' &= \frac{Av - av + 2AV}{A + a} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (p),$$

in questo caso, quando $A = a$, si ha

$$x = -v,$$

e

$$x' = V,$$

vale a dire che i mobili cangeranno di velocità e in seguito si allontaneranno.

8. Se i corpi che vanno all' incontro l' uno dell' altro hanno velocità uguali, facendo $V = v$, le equazioni (p) danno

$$x = \frac{(A - 3a)V}{A + a};$$

$$x' = \frac{(3A - a)V}{A + a},$$

donde resulta che se la massa del corpo A è tripla di quella di a, la sua velocità dopo l' urto è o, vale a dire che questo corpo si arresterà nel mentre che il corpo a avrà ottenuto una velocità doppia della velocità primitiva di A; poichè facendo

$$A = 3a,$$

si ottiene

$$x = 0, \quad x' = 2V.$$

9. Se uno dei mobili fosse in riposo, a, per esempio, si avrebbe

$$v = 0.$$

Sostituendo questo valore in (m) ed (n), quest' equazioni diventano

$$x = \frac{AV - aV}{A+a} = \frac{(A-a)V}{A+a},$$

$$x' = \frac{2AV}{A+a}.$$

Quando i due mobili sono uguali, si ha

$$A = a,$$

e questi valori si riducono a

$$x = o, \quad x' = V,$$

vale a dire che in questo caso il mobile A perde la sua velocità, e la dà ad a.

10. Mediante altre supposizioni sopra la grandezza delle quantità che entrano nell' equazioni generali (m) ed (n), si troverebbero nella stessa maniera i resultamenti dell' urto nei casi particolari di quest' ipotesi: ed è mediante ciò, per esempio, che si comprende come:

1.° Se due corpi uguali si urtano direttamente in senso contrario con velocità uguali, essi ritorneranno indietro dopo l' urto, ciascuno con la velocità che esso aveva e nella stessa linea.

2.° Se le velocità dei due medesimi corpi sono in ragione inversa delle loro masse, essi ritorneranno indietro ciascuno dalla sua parte con la stessa velocità, che avevano avanti l' urto.

11. Il principio della conservazione delle *forze vive* (*Vedi* Questa parola) nell' urto dei corpi elastici, la cui scoperta si deve all' Huygens, è l' oggetto della seguente legge.

Quando due corpi elastici s' incontrano, la somma delle forze vive è la stessa avanti o dopo l' urto.

Conservando le medesime significazioni per A, V, x, a, v, x' la somma delle forze vive, avanti l' urto, è

$$AV^2 + av^2$$

e quella delle forze vive dopo l' urto è

$$Ax^2 + ax'^2;$$

si deve dunque avere, in virtù della legge enunciata

$$AV^2 + av^2 = Ax^2 + ax'^2.$$

Infatti, riprendiamo le due equazioni (m) ed (n)

$$x = \frac{AV - aV + 2av}{A+a},$$

$$x' = \frac{av - Av + 2AV}{A+a},$$

a diamo loro la forma

$$x = \frac{2[AV + av]}{A+a} - V,$$

$$x' = \frac{2[AV + av]}{A+a} - v.$$

Facendo, per maggior semplicità, la quantità comune

$$\frac{AV + av}{A + a} = \ldots\ldots\ (r),$$

quest' espressioni diventeranno

$$x = 2\varphi - V,$$
$$x' = 2\varphi - v.$$

avremo dunque

$$Ax^2 + ax'^2 = A(2\varphi - V)^2 + a(2\varphi - v)^2.$$

Sviluppando il secondo membro di quest' oguaglianza, otterremo

$$4A\varphi^2 - 4A\varphi V + AV^2 + 4a\varphi^2 - 4a\varphi v + av^2$$

ovvero, ciò che equivale allo stesso,

$$AV^2 + av^2 + 4\varphi[A\varphi + a\varphi - AV - av];$$

ma il terzo termine di quest' espressione si riduce a o, poichè l' uguaglianza (r) dà

$$A\varphi + a\varphi = AV + av,$$

dunque abbiamo definitivamente

$$Ax^2 + ax'^2 = AV^2 + av^2,$$

che è il principio dell' Huygens.

12. Quando i corpi non sono perfettamente elastici, la legge della conservazione delle forze vive non ha più luogo, e la perdita di queste forze è tanto maggiore, quanto l' elasticità è più imperfetta.

Per i corpi perfettamente duri, *la perdita delle forze vive, o la differenza tra queste forze avanti e dopo l' urto, si trova uguale alla somma delle forze vive che avrebbero le masse animate dalle velocità perdute o guadagnate.* Questo teorema scoperto dal Carnot, si dimostra facilmente con l' aiuto delle formule date per l' urto dei corpi non elastici.

13. I corpi perfettamente duri da una parte e i corpi perfettamente elastici dall' altra, formano i limiti tra i quali tutti gli altri sono compresi. Si vede che le formule precedenti non possano considerarsi che come approssimazioni, quando si tratta di applicarle ai fenomeni fisici e che i resultamenti del calcolo si ravvicineranno tanto più alla realtà dei fatti, quanto i corpi saranno essi stessi più vicini allo stato duro o elastico espressamente sottinteso in queste formule. Per abbracciare i diversi gradi di elasticità che possano manifestarsi nei corpi, si dà alle formule (m) ed (n) l' espressione più generale

$$x = V - n\left[\frac{V - v}{A + a}\right]a$$

$$x' = v + n\left[\frac{V - v}{A + a}\right]A,$$

n è allora un coefficiente costante che dipende dalla maggiore o minore elasticità dei corpi. Quando $n = 1$, si ha $x = x'$, e queste formule si riducono all' uguaglianza (3): questo è il caso dei corpi duri; quando $n = 2$, si ottengono l' espressioni (m) ed (n): questo è il caso dei corpi elastici; tra questi due valori 1 e 2, sono compresi tutti i casi intermediarii, e bisogna allora dare ad n i valori trovati dall' esperienze sulla natura dei corpi che vogliamo considerare.

14. L'*urto obliquo* presenta un gran numero di variazioni, il cui esame non può trovar parte in questo Dizionario. Considereremo solamente un caso particolare importantissimo, in quanto che esso serve a dimostrare la legge fondamentale della catottrica. (*Vedi* Catottrica I.)

Sia una palla elastica P (*Tav.* CCXLIX, *fig.* 2) che venga a colpire una superficie resistente MN, sotto una direzione obliqua AC. Prendendo la linea AC per rappresentare la forza dell' urto, potremo decomporre queste forze in due altre di cui l' una NC è parallela alla superficie, e di cui l' altra DC gli è perpendicolare. Ora se la forza DC agisse sola, il suo effetto sarebbe di far ribalzare il corpo A, con una forza uguale ed opposta nella direzione CD, nel mentre che se la forza NC agisse sola, il corpo A sarebbe spinto nella direzione CM. Dopo l' urto, il corpo è dunque sollecitato da due forze, di cui l' una lo spinge nella direzione CD, e l' altra nella direziona CM. Conseguentemente seguirà la diagonale CB, vale a dire, che l' angolo d' incidenza ACD sarà uguale all' angolo di riflessione BCD. Le molecole luminose agendo come corpi perfettamente elastici, questa dimostrazione si applica ai fenomeni della riflessione operata dagli specchi.

Possiamo, decomponendo nella stessa maniera tutti i casi dell' *urto obliquo* riportarli alle leggi dell' *urto diretto*. *Vedi* Percussione.

V

VANDERMONDE, illustre geometra francese, nato a Parigi nel 1735, cooperò non poco ai progressi della scienza durante la seconda metà del secolo XVIII. Questo dotto è stato quasi interamente dimenticato dalla fama e dai geometri che si sono giovati de' suoi lavori e delle sue scoperte. Era figlio di un medico di Landrecies; fece i suoi studj nella capitale, ed avendo dimostrato le più felici disposizioni per le matematiche, si applicò con ardore a tali scienze sotto la direzione di Fontaine e di Dionis du Séjour. Nella società di quegli uomini celebri ebbe occasione di far conoscenza colla maggior parte dei membri dell Accademia delle Scienze, dai quali fu ben presto apprezzato il suo merito, e nel 1771 fu chiamato a sedere in quella illustre compagnia. Fino da quel momento prese una parte attivissima ne' suoi lavori, e pubblicò l' una dietro l' altra un numero grande di memorie notabilissime sopra diversi rami della scienza. Disgraziatamente non ha pubblicato nessun trattato importante per la sua estensione, e la maggior parte delle sue produzioni sono sparse nelle raccolte scientifiche del suo tempo. Fra quelle che gli hanno meritato gli elogi che abbiamo creduto di dover tributare alla sua memoria sono da citarsi le seguenti: I *Sulla risoluzione delle equazioni*, nella quale prendendo a semplicizzare i metodi di calcolo e ad accorciare la lunghezza delle formule, cui con ragione riguardava come una delle maggiori difficoltà del suo soggetto, creò una teoria ingegnosissima e del tutto nuova; II *Problema di situazione*; III *Irrazionali di nuova specie*, in cui mostrò le serie dalle quali questi irrazionali sono i termini e la somma, indicando un metodo diretto e generale per farvi tutte le possibili riduzioni; IV *Sull' eliminazione delle incognite nelle quantità algebriche*. Noi dobbiamo dire ancora che non si è data tutta l' importanza che meritava alla ingegnosa sua teoria delle *Potenze del second' ordine*, che, riprodotta posteriormente da Kramp sotto il nome di *Fattoriali*, e generalizzata poscia da Wronski sotto quello di *Facoltà*, è destinata ad esercitare una influenza grande sui progressi futuri della

scienza (*Vedi* Fattoriale, e Facoltà). Si deve pure a Vandermonde una bella teoria sulla composizione musicale, nella quale stabilì su due regole generali la successione degli accordi e l'ordinamento delle parti, dimostrando che tali due regole, riconosciute dai musici, dipendono esse pure da una legge più elevata che deve reggere tutta l'armonia: e siffatta teoria venne approvata dai più celebri compositori, come un Philidor, un Gluck, un Piccini, ec. Nel 1793 cooperò insieme con Berthollet e con Monge a comporre l' *Avviso agli operai in ferro*, sulla formazione dell'acciajo, per ordine del comitato di salute pubblica, del quale *Avviso* havvi un epilogo negli *Annali di Chimica*, tom. XIX. Ci duole ora di dover dire che l'immaginazione viva ed esaltata di questo geometra lo trascinò nella maggior parte degli eccessi che, in nome della libertà, commisero gli uomini i quali nei giorni i più disastrosi della rivoluzione francese sembrarono essersi assunti l'impegno di fare odiare il principio pel quale combattevano. Vandermonde, che dopo l'abolizione dell'Accademia delle Scienze era stato nominato professore di economia politica nella scuola normale, fu compreso nel numero dei dotti che nel 1795 fecero parte nella prima classe dell'Istituto. Morì a Parigi il 1.° Gennajo 1796; e gli successe il celebre Carnot.

VAPORE (*Mecc.*). Si dicono Macchine a Vapore certi apparecchi messi in azione dalla forza elastica dell'acqua vaporizzata, e destinati a comunicare il moto a qualunque specie di macchine.

L'uso del vapore come forza meccanica non rimonta a più di un secolo indietro; la sua applicazione alle macchine locomotive data soltanto dal 1802, e già questo agente ha esercitato sull'industria un'influenza che non permette più di assegnarli limite veruno. Oggi, mossi dal vapore, migliaja di telaj lavorano a vil prezzo le stoffe le più preziose, enormi pesi percorrono con una celerità che spaventa innumerabili strade ferrate, e l'oceano divenuto tributario della sua potenza si vede solcato in ogni senso da vascelli cui non trattengono più nè le correnti nè le tempeste.

Tutte queste maraviglie effettuate in sì breve spazio di tempo non sono però che una minima parte di quelle che debbonsi sperare da una forza modificabile all'infinito e suscettibile di essere applicata in tutti i tempi e in tutti i luoghi. Così, senza temerità, noi possiamo annunziare che verrà un tempo in cui il vapore, divenuto il motore universale, spingerà l'aratro, scaverà le mine, prosciugherà le acque stagnanti, e verrà sostituito finalmente alle braccia dell'uomo in tutti i lavori grossolani e penosi. Forse lo vedremo ancora dirigere nell'aria leggeri aerostati, oggetto al presente di sterile curiosità, chiamati allora a cambiare le relazioni commerciali dei popoli.

La scoperta di un agente così potente è un titolo di gloria troppo bello perchè noi dobbiamo maravigliarci di vederla reclamata con tanta veemenza dalla nazione che fino ad ora ne ha fatto un maggior numero di applicazioni: ma qualunque siano sotto quest'ultimo rapporto i giusti titoli dell'Inghilterra alla riconoscenza del mondo civilizzato, le sue pretensioni esclusive sono inammissibili, e noi crediamo di dover quì confermare i diritti della Francia, stabiliti d'altronde nel modo il più positivo da Arago nella sua notizia sulle macchine a vapore inserita nell'*Annuario* dell'Ufizio delle Longitudini dell'anno 1829, e riprodotta in quello del 1837 con nuovi argomenti che non ammettono replica nessuna. Noi ci contenteremo di stabilire soltanto il quesito: le cifre daranno poi la risposta.

Ogni invenzione tecnologica può esser considerata sotto tre punti di vista differenti: 1.° sotto quello del principio teorico che gli serve di base; 2.° sotto quello del suo concetto primitivo; 3.° sotto quello della sua realizzazione definitiva, ossia della sua costruzione materiale. La scoperta del principio teorico precede necessariamente il concetto della macchina, come questo concetto stesso precede di

necessità la sua realizzazione. Se questi tre elementi non sono l'opera di un sol uomo, la priorità scientifica appartiene evidentemente a quello che ha scoperto il principio, ma la priorità tecnologica, che costituisce il vero titolo alla invenzione, appartiene a quello che ha immaginato la macchina. La realizzazione di questa macchina, i suoi diversi perfezionamenti, i nuovi mezzi di cui si è fatto uso onde farle ottenere il suo fine, qualunque sia l'abilità e l'ingegno che possano essere stati necessarj, non costituiscono che titoli secondarj, capaci di dare ai loro autori una parte più o meno grande nella gloria dell'invenzione, ma che non potrebbero mai distruggere il titolo principale.

Applicando queste considerazioni alle macchine a vapore, si trova primieramente che la forza meccanica del vapore dell'acqua è stata annunziata da Aristotile, e messa in opera da Erone d'Alessandria, 120 anni prima dell'era cristiana, per far muovere un apparecchio di sua invenzione: cosicchè la scoperta del principio teorico che serve di base a queste macchine risale ai primi progressi delle scienze fisiche, quantunque l'applicazione industriale della forza del vapore abbia un'origine assai più recente. Quest'applicazione industriale si trova indicata per la prima volta in un modo autentico nell'opera di Salomone di Caus intitolata: *Raisons des forces mouvantes*, a stampata a Francfort nel 1615. Un'applicazione simile fu accennata soltanto nel 1663 dal marchese di Worcester nella sua opera: *Century of inventions*. L'idea emessa dal marchese di Worcester di alzare l'acqua per mezzo del vapore è identicamente la stessa di quella di Salomon de Caus pubblicata quarantotto anni avanti. Perciò, finattantochè non vengano prodotti documenti irrecusabili per costatare i diritti di altro inventore, non è possibile di negare nella questione delle macchine a vapore la priorità scientifica a Salomone di Caus.

Nel 1668, Papin pubblicò, negli *Atti* di Lipsia, la descrizione di una macchina di cui importa di ben conoscere gli effetti onde rendersi pieno conto di quelli delle macchine a vapore attuali. S'immagini un cilindro verticale (*Tav.* LII, *fig.* 8) aperto nella sua parte superiore, e del quale la parte inferiore, chiusa esattamente, abbia una valvula suscettibile di aprirsi di basso in alto. S'immagini inoltre uno stantuffo mobile P che si muova liberamente nel cilindro chiudendolo peraltro ermeticamente. Se la valvula è aperta, la pressione esterna ed interna dell'aria atmosferica facendosi equilibrio, lo stantuffo scenderà nel cilindro, ma solamente in virtù del proprio peso, e basterà uno sforzo pochissimo superiore a questo peso per far salire lo stantuffo fino alla parte superiore del cilindro. Giunto così all'estremità del suo cammino, se si chiude la valvola e si abbandona a se stesso lo stantuffo, la resistenza dell'aria interna gl'impedirà di discendere, mentre è evidente che se con un mezzo qualunque si distrugga ad un tratto l'aria interna, la pressione dell'aria esterna gravitando sullo stantuffo con tutto il peso della colonna atmosferica di cui è la base lo farà necessariamente discendere; e se si suppone che esso sia attaccato ad uno dei bracci di una leva di cui l'altro sostenga un peso Q eguale a quello della colonna atmosferica, esso farà evidentemente inalzare questo peso mediante la sua caduta.

Immaginiamo ora che nel tempo in cui lo stantuffo tocca il fondo del cilindro si apra la valvula: l'atmosfera, colla sua pressione eguale in tutti i sensi, agirà sotto lo stantuffo e farà equilibrio alla pressione che agisce al di sopra: allora non solo il peso Q lo farà risalire all'estremità superiore del cilindro, ma, fatta anco astrazione da questo peso, basterà come abbiamo detto di sopra un piccolissimo sforzo per produrre quest'effetto. Si potrà dunque sollevar sempre lo stantuffo con una piccolissima forza, mentre la sua discesa potrà fare alzare i pesi più grandi. Infatti, il peso della colonna atmosferica è eguale a quello della colonna di mercurio della stessa base alla quale essa fa equilibrio, vale a dire

a quello di una colonna di mercurio di 76 centimetri di altezza, ossia di circa 28 pollici e una linea (*Vedi* Idrostatica, n.° 17). Dunque, ammettendo che lo stantuffo abbia un metro di diametro, il peso della colonna atmosferica che gravita su di esso è eguale al peso di un cilindro di mercurio del volume di $\pi(0^m,5)^2(0^m,76)$ metri cubi (*Vedi* Cilindro), ossia di 0,5969 di metro cubo; e siccome il peso di un metro cubo di mercurio è eguale a 13598 chilogrammi, quello del cilindro di mercurio sarà di 8117 chilogrammi: perciò ogni discesa dello stantuffo potrà sollevare un peso di 8117 chilogrammi.

Fra i diversi mezzi proposti da Papin per produrre il vuoto sotto lo stantuffo, quello del vapore dell'acqua è indicato come il più efficace nella sua opera intitolata: *Recueil de diverses pièces touchant quelques nouvelles inventions*, stampata a Cassel nel 1695: e si trova di più in tale opera la descrizione di un piccolo apparecchio che Papin aveva costruito alcuni anni prima, apparecchio che presenta la prima realizzazione materiale delle macchine a vapore, perchè l'acqua contenuta nel cilindro stesso vi è vaporizzata e condensata, e, con questa azione alternativa, fa successivamente salire e discendere lo stantuffo.

Confrontando le date fin qui citate con quelle delle invenzioni di cui passeremo ora a parlare, resulta evidentemente che il concetto primitivo della macchina a vapore, detta *macchina atmosferica*, appartiene a Papin.

Assicurata in tal guisa l'anteriorità scientifica e l'anteriorità tecnologica a due francesi, Salomone di Caus e Papin, la nostra imparzialità ci fa un dovere di dichiarare che qui si limita la parte che la Francia può con giustizia reclamare nell'invenzione delle macchine a vapore, e che, giunti alla realizzazione definitiva di queste macchine, non ci restano più da citare che nomi inglesi.

Fu soltanto nel 1705 che Newcomen e Cauley, semplici operaj a Darmouth nel Devonshire, giunsero ad una completa realizzazione dell'ingegnosa idea di Papin, quella cioè del moto dello stantuffo in un cilindro mediante l'azione alternativa del vapore; e la loro macchina, conosciuta sotto il nome di *macchina di Newcomen* o di *macchina atmosferica*, è la prima i cui servigj reali hanno cominciato la nuova era industriale. Sette anni prima, nel 1698, il capitano Savery aveva costruito una macchina sugli stessi principj; ma i suoi tentativi non avendo avuto che un successo incompleto, ei finì con associarsi a Newcomen e Cauley nell'esercizio della patente che fu loro concessa. Noi passeremo adesso a indicare succintamente la disposizione e l'azione tanto della macchina di Newcomen che delle principali macchine perfezionate costruite in appresso.

Nella macchina di Newcomen (*Tav.* LII, *fig.* 8), lo stantuffo P e il peso Q sono attaccati a due catene sospese ai bracci del bilancere AB. Quando si è fatto il vuoto sotto lo stantuffo P, la pressione atmosferica obbliga questo stantuffo a stare nella parte inferiore del cilindro nel quale si muove. Il vapore somministrato da una caldaja esterna venendo ad affluire sotto lo stantuffo, il peso Q discende liberamente quando la tensione del vapore fa equilibrio alla pressione atmosferica. Giunto lo stantuffo nella parte superiore del cilindro, un getto di acqua fredda condensa il vapore nel cilindro, si forma il vuoto, e lo stantuffo discende.

Questa macchina, non potendo che sollevare un contrappeso e lasciarlo ricadere alternativamente, non è stata impiegata che a far muovere delle trombe. La condensazione fatta nel cilindro medesimo ha l'inconveniente di cagionarvi un raffreddamento considerabile che diminuisce la forza elastica del vapore affluente.

Le prime macchine dell'illustre Giacomo Watt, le cui numerose invenzioni sono altrettanti progressi nell'uso del vapore, datano dal 1769. Esse differiscono dalla precedente, in quanto che il cilindro è chiuso in alto, e non è più la pressione atmosferica che fa scendere lo stantuffo. Per farlo abbassare, quando si è

formato il vuoto sotto di esso, si fa affluire il vapore per la valvula *m* (*Tav.* LII, *fig.* 9). Giunto al basso del cilindro, si fa allora affluire il vapore per la valvula *n.* Lo stantuffo essendo premuto egualmente sulle sue due facce, risale per l'azione del contrappeso Q. Quindi si condensa il vapore sotto lo stantuffo e il moto ricomincia. Il coperchio del cilindro ha nel suo centro un foro circolare guarnito di materie untuose a traverso alle quali passa l'asta dello stantuffo.

Questa macchina che non può, come quella di Newcomen, fare altro che sollevare un contrappeso e lasciarlo ricadere, presenta d'altronde un gran perfezionamento nelle circostanze della condensazione, la quale non si fa più nel cilindro principale, ma in un altro cilindro chiamato *condensatore*, immerso in un bagno d'acqua fredda e nel quale un robinetto che poi si chiude lascia passare il vapore; in tal guisa il cilindro principale si trova costantemente mantenuto alla temperatura del vapore.

Per far produrre alla sua macchina un altro genere di lavoro diverso da quello dell'elevazione dell'acqua per mezzo delle trombe, Watt sostituì alla catena BQ una verga metallica BC (*Tav.* LII, *fig.* 4), che attaccata ad una manovella imprimeva un moto di rotazione a un asse armato di un volano. Questa trasformazione del moto alternativo in moto circolare e continuo fu indicata per la prima volta da M. K. Fitzgerald, nelle *Transazioni* della Società Reale di Londra del 1758; ma Watt la realizzò e l'introdusse generalmente mediante l'invenzione di una manovella spirale chiamata *rota planetaria* o *mosca.* Siccome il vapore non agisce sullo stantuffo che nel tempo della sua discesa, per regolarizzare l'azione esercitata sul volano si pone in B un contrappeso eguale alla metà della forza colla quale è spinto lo stantuffo.

L'oggetto delle seconde macchine di Watt, dette *a doppio effetto*, essendo quello di sopprimere il contrappeso B e di dare allo stantuffo una forza ascendente eguale alla sua forza discendente, si richiedeva: 1.° che il vapore fosse condensato alternativamente da ciascuna delle parti dello stantuffo; 2.° che, nel salire, lo stantuffo potesse spingere l'estremità A del bilancere per mezzo di una verga inflessibile che si mantenesse sempre esattamente verticale. Dopo di aver tentato diversi mezzi per soddisfare a quest'ultima condiziona, Watt immaginò il sistema che si dice anche oggi il *parallelogrammo di Watt*, che consiste in una combinazione di verghe (*Tav.* CLXIV, *fig.* 6) unite per mezzo di articolazioni in modo che l'estremità superiore dello stantuffo, senza cessare di spingere il bilancere, descriva una curva pochissimo differente da una linea retta. Quanto all'azione dello stantuffo, il vapore affluente dalla parte superiore del cilindro lo fa discendere nel tempo che la sola parte inferiore è posta in comunicazione col condensatore; arrivato al basso, si pone alla sua volta in comunicazione col condensatore la parte superiore del cilindro, e il vapore affluente dalla parte inferiore fa risalire lo stantuffo. Due robinetti, dei quali uno si apre mentre l'altro si chiude, producono questa condensazione alternativa.

Il perfezionamento principale recato a queste macchine è stato quello di aver loro fatto produrre il moto di rotazione direttamente per mezzo dell'asta dello stantuffo senza l'applicazione di una leva intermedia. Il moto alternativo dello stantuffo imprime un moto circolare alternativo all'asse C (*Tav.* CLXIV, *fig.* 2), che porta una leva la quale mediante una manovella fa prendere all'asse del volano un moto continuo.

Un'altra invenzione ingegnosissima di Watt è quella d'impedire l'accelerazione del moto dello stantuffo col mettere a profitto la forza espansiva del vapore prima della sua condensazione. A tale effetto egli interrompe la comunicazione della caldaja col corpo di tromba quando lo stantuffo ha percorso i due terzi del suo cammino: allora il terzo che rimane vien percorso mediante la

forza che resulta dall' espansiona del vapore introdotto; cosicchè il moto dello stantuffo diviene sensibilmente uniforme e si evitano quegli urti istantanei che producono scosse nocive alla solidità della macchina. Questa applicazione dall' espansione del vapore, che ha fatto dare il nome di *macchine a scatto* agli apparecchi nei quali se ne fa uso, costituisce uno dei progressi più importanti delle macchina a vapore a condensazione.

Fino ad ora non abbiamo parlato che delle parti principali che compongono una macchina a vapore, ma se non ci è possibile di descrivere minutamente i mezzi meccanici, successivamente perfezionati, di cui fino ad oggi si è fatto uso, sia per produrre il vapore, sia per trasmettere e regolare la sua azione, la descrizione seguente di una macchina costruita secondo il sistema di Watt supplirà a tali dettagli e farà comprendere il meccanismo generale di questi apparecchi.

CD (*Tav.* CXLVII, *fig.* 1) è la caldaja nella quale l' acqua è convertita in vapore medianta il calore del fornello D. Talvolta è fatta di rame, ma più spesso di ferro, il suo fondo è concavo e la fiamma si fa circolare intorno alle sue pareti. In alcuna la fiamma è condotta per mezzo di tubi attraverso all' acqua, in modo che sia esposta al fuoco la massima superficie possibile. Quando i fornelli sono costruiti nel modo il più giudizioso, otto piedi quadrati della superficie della caldaja ricevendo l' azione del fuoco o della fiamma possono convertire un piede cubo d' acqua in vapore nello spazio di un' ora; il vapore prodotto nella caldaja è circa 1800 volte meno denso dell' acqua e vien condotto per un tubo CE nel cilindro G, ove esso agisce sullo stantuffo *q* e comunica il moto al gran bilanceere AH. Ma prima di descrivere il modo di trasmettere il moto, dobbiamo parlare del metodo ingegnoso usato da Watt per alimentare regolarmente la caldaja di acqua e mantenerla sempre allo stesso livello OP, circostanza assolutamente necessaria affinchè la quantità ed elasticità del vapore nella caldaja sia sempre la medesima. La tinozza *u* posta al di sopra della caldaja vien conservata piena d' acqua da un serbatojo d' acqua calda *h* per mezzo della tromba *z* e del tubo *f*. Nel fondo di questa tinozza *u* è adattato un tubo *ur* che è immerso nell' acqua OP, ed è ricurvo alla sua estremità inferiore onde impedire l' uscita del vapore. Un braccio ricurvo *ud'*, attaccato lateralmente alla tinozza, sostiene la piccola leva *a'b'* che si muove intorno a *d'* come centro. L' estremità *b'* di questa leva porta per mezzo di un filo metallico *b'*P un peso P che rimane galleggiante esattamente sotto il pelo dell' acqua nella caldaja, e l' altra estremità *a'* è legata pel filo di ferro *a'u* ad una valvula nella parte inferiore della tinozza *u* che chiude la parte superiore del tubo *ur*. A misura che l' acqua diminuisce nella caldaja in conseguenza dell' emissione del vapore, il peso P deve proporzionatamente discendere. Ma nel discendere esso solleva il braccio della leva *d'a'*, la valvula del tubo *ur* si apre e introduce nella caldaja una quantità d' acqua eguale a quella che si è evaporata. Una nuova evaporazione fa di nuovo abbassare il peso, la valvula si apre e l' acqua entra di nuovo, e così successivamente va ripetendosi l' introduzione dell' acqua nella caldaja.

Per conoscere l' altezza esatta dell' acqua nella caldaja, si fa uso di due robinetti *k* ed *l*; il primo discende fino ad una piccola distanza dal livello dell' acqua, e il secondo un poco al di sotto di questo livello. Se l' acqua è ad un' altezza conveniente, aprendo il robinetto *k*, uscirà del vapore, e il robinetto *l* darà dell' acqua, per effetto della pressione del vapore. Ma se l' acqua esce da ambedue i robinetti, ciò significa che ve n' è troppa nella caldaja; e se da entrambi esce del vapore, vuol dire che ve ne manca.

Siccome la caldaja correrebbe pericolo di scoppiare se la pressione del vapore divenisse troppo grande, vi si adatta una valvula di sicurezza *x* che è caricata in modo che il suo peso aggiunto a quello dell' atmosfera possa eccedere la pres-

sione del vapore giunto ad una forza sufficiente. Subitochè la forza espansiva giunge ad un grado che potrebbe mettere in pericolo la caldaja, la sua pressione divenuta più grande di quella del peso e dell'atmosfera fa aprire la valvula, e il vapore esce fino a tanto che sia ristabilito l'equilibrio. Aprendo la valvula di sicurezza, si può fermare la macchina. Talvolta si fa uso di questo mezzo, ed allora si attacca una catena alla leva della valvula, la catena scorre sopra due pulegge, e termina in prossimità dell'operajo, che, tirandola a sè, fa aprire la valvula.

Dalla parte superiore della caldaja si parte il tubo CE, che porta il vapore nell'alto del cilindro G per mezzo della valvula *a*, e nella parte inferiore di questo stesso cilindro, per mezzo della valvula *c*. Nella figura 1 della Tavola CXLVII è stato tolto quel braccio del tubo che si stende da *a* a *c* all'oggetto di far vedere la valvula *b*; ma questo braccio è però distintamente visibile nella figura 2, nella quale si vedono lateralmente i tubi, e le valvule. Il cilindro G è qualche volta rinchiuso in una veste di legno, per impedire che non si raffreddi per effetto dell'aria circostante, e qualche volta in una veste metallica, all'oggetto di circondarlo del vapore condotto dal tubo EC per mezzo dell'altro tubo EG, girando un robinetto. Non vi è però vantaggio nessuno nel fare uso di quest'ultimo mezzo, perchè il consumo del vapore è sempre lo stesso. Dopochè il vapore che è stato introdotto al di sopra dello stantuffo *q* dalla valvula *a*, e al di sotto per la valvula *c*, ha prodotto l'effetto che se ne voleva, di abbassare cioè e di alzare lo stantuffo, e per conseguenza il bilancere AH, esso allora esce dalle valvule di sgorgo *b* e *d*, figura 1 e 2, e s'introduce nel condensatore *i*, ove vien ridotto in acqua per mezzo d'una injezione. L'acqua così introdotta nel condensatore ne viene poi estratta insieme con l'aria che essa contiene, e raccolta in un serbatojo di acqua calda *h*, dalla tromba ad aria *e*, che vien messa in azione dall'asta dello stantuffo T attaccato al bilancere AH. Dal serbatojo di acqua calda *h* quest'acqua vien portata dalla tromba *z* e dal tubo *f* nella piccola tinozza *u*, onde alimentare la caldaja. La tromba *g* mossa dal bilancere porta l'acqua che serve alle injezioni nel condensatore *i*, e la quantità eccedente di quest'acqua, ricoprendo interamente la tromba ad aria, la difende dall'aria esterna. Le valvule d'introduzione e di espulsione del vapore *a*, *b*, *c*, *d*, si aprono e si chindono per mezzo delle verghe *a*M, *d*M, *c*N, *b*N, le quali sono mosse dall'asta TI dello stantuffo della tromba ad aria. Tutte queste aste attraversano un cerchio di cuojo fissato stabilimente ai coperchi dei cilindri, e sono tornite e lavorate con estrema accuratezza. L'estremità V dell'asta R è fissata ad un meccanismo, che si chiama il *parallelogrammo*, e che è costruito in modo che l'asta VR possa sempre salire e scendere in una posizione verticale o perpendicolare.

Per convertire il moto alternativo del bilancere in moto circolare, Watt fissò una verga forte ed inflessibile AU all'estremità del bilancere, e all'estremità inferiore di questa verga fissò una ruota dentata U, attaccata in modo da non poter girare sul suo asse. Questa ruota ingrana in un'altra ruota simile S, dalla quale non può essa staccarsi, talchè nell'azione della macchina la prima ruota è obbligata a girare intorno alla seconda. Quest'apparecchio si chiama *il sole e il pianeta*. Sull'asse della ruota S si colloca il gran volano F che rende regolare il moto del bilancere. Quest'apparecchio è stato abbandonato da Watt, subitochè ha potuto sostituirvi una certa manovella, per la quale prima di lui era stato preso un brevetto d'invenzione.

Dopo aver descritto le differenti parti della macchina, interessa di vedere il suo modo d'agire. Supponiamo che lo stantuffo sia nella parte superiore del cilindro, come viene rappresentato nella tavola CXLVII, e che la valvula supe-

periore d' introduzione *a* sia aperta, egualmente che la valvula inferiore di espulsione *d*, mentre le valvule opposte *c* e *b* siano chiuse: allora il vapore della caldaja s' introdurrà nella parte superiore del cilindro per mezzo del tubo CE e della valvula *a*, ed in forza della sua elasticità spingerà lo stantuffo in basso. Ma, quando lo stantuffo *q* è tratto nella parte inferiore del cilindro, l' estremità H del bilanciere è spinta in basso dal parallelogrammo TV: l' altra sua estremità A si alza, e la ruota U avendo percorso la semicirconferenza di S, avrà spinto in avanti il volano F, e fatto muovere tutto il meccanismo che ne dipende. Quando lo stantuffo *q* è giunto nella parte inferiore del cilindro, l' asta TI della tromba ad aria, incontrando il gomito M dell' asta della valvula *a*, la chiude egualmente che la valvula d' espulsione *d*, mentre, per l' incontro dell' altro gomito N, la stessa asta TI ha fatto aprire la valvula d' espulsione *b* e la valvula d' introduzione *c*; in conseguenza, il vapore che è al di sopra dello stantuffo si precipita per mezzo della valvula d' espulsione *b* nel condensatore *i*, ove è ridotto in acqua, mentre nel tempo medesimo una nuova quantità di vapore della caldaja giunge dalla valvula aperta *c* nel cilindro e obbliga lo stantuffo a risalire; e questo alla sua volta, facendo alzare una dell' estremità del bilancare ed abbassando l' altra, obbliga la ruota U a percorrere l' altra semicirconferenza di S, e fa fare un' altra rivoluzione completa al volano e al meccanismo che esso mette in moto. E l' operazione può in tal modo continuare finchè la macchina è in buono stato.

Le macchine di Newcomen e quelle di Watt non esigono che il vapore che le pone in azione eserciti sullo stantuffo una forza superiore alla pressione dell' atmosfera: le prime macchine dette ad *alta pressione* sono dovute ai sigg. Trevitheck e Vivian, che ottennero nel 1802 una patente che ha per oggetto principale il trasporto delle vetture sulle strade ferrate. La macchina di Trevitheck non presenta delle combinazioni essenzialmente differenti da quella *a doppio effetto* di Watt, in quanto al modo col quale il moto dello stantuffo vien prodotto e quindi trasmesso all' asse del volano. Ma il vapore vi è impiegato in una maniera affatto diversa, in quanto che dopo avere agito sotto una pressione che spesso supera cinque volte quella dell' atmosfera, esso viene espulso nell' aria senza esser condensato. Questa combinazione permette di rinchindere la macchina in uno *spazio minore* e di renderla *più leggera*, facendole nel tempo stesso sviluppare una forza superiore, condizioni essenzialissime per poterla applicare come motore alle vetture e ad altre macchine da trasporto.

Altre macchine ad *alta pressione*, nelle quali il vapore vien condensato dopo la sua azione sullo stantuffo, e che per conseguenza non potrebbero essere applicate agli apparecchi locomotivi, sono state costruite nel 1804 da Woolf. Queste macchine, che si sono assai moltiplicate in Francia, presentano i seguenti perfezionamenti: 1.° la caldaja è composta di tre cilindri di ferro fuso grossissimo, la maggior parte della superficie dei quali riceve l'azione del fuoco: una caldaja fatta in questa guisa è molto più durevole delle caldaje di ferro o di rame battuto delle antiche macchine; 2.° gli stantuffi sono tutti di ferro fuso: i pezzi che debbono stare a contatto e a fregamento col cilindro o corpo di tromba sono segmenti mobili uniti insieme in modo che una molla adattata nell' interno gli prema e gli spinga continuamente contro la superficie del cilindro. Questi stantuffi sono preferibili agli antichi formati di stoppaccio intriso di materia grassa, i quali non impedivano bene il passaggio al vapore e producevano un grande attrito: 3.° il vapore è ricevuto successivamente in due cilindri di diametri disegnali: nel primo, dopo essere stato formato sotto la pressione di quattro atmosfere, il vapore agisce sul piccolo stantuffo; quindi passa nel secondo cilindro ed agisce contemporaneamente sui due stantuffi nel resto del loro cam-

mino comune; e quindi si versa nel condensatore ove è distrutto. L'invenzione dei due cilindri, che ha per oggetto d'impiegare simultaneamente le due azioni dovute alla pressione e alla dilatazione del vapore, appartiene a Hornblower e data dal 1781.

Le macchine a vapore avevano esercitato la loro potente influenza sull'industria assai prima che si pensasse ad occuparsi della determinazione delle leggi che regolano la loro forza motrice, poichè fu soltanto nel 1790 che due dotti francesi, Prony e Betancourt, si accinsero finalmente a calcolare questa forza in una maniera generale nei suoi gradi variabili d'intensità. La formula colla quale Prony rappresentò i resultati delle esperienze fatte nell'estensione di quattro atmosfere è bastata per lungo tempo ai bisogni industriali, e soltanto dopo trent'anni altri dotti francesi ed inglesi hanno trattato lo stesso quesito in confini però molto più estesi. Nel 1824, il governo francese avendo impegnato l'Accademia delle Scienze ad occuparsi di ricerche sperimentali sulle leggi della forza espansiva del vapore a differenti temperature, questa società nominò una commissione composta dei sigg. Arago, Dulong, Ampere, Girard e Prony. Arago e Dulong, incaricati specialmente dell'esecuzione delle esperienze, adempierono a tale incarico lungo, penoso e non senza pericolo, in modo da meritarsi la riconoscenza del mondo dotto. Dopo aver creato degli apparecchi molto superiori a quelli fino allora immaginati, poterono verificare la legge di Mariotte fino a ventisette atmosfere, e costatare col fatto le temperature corrispondenti alle tensioni del vapore da una fino a ventiquattro atmosfere. Questi bei resultati sono riportati nel rapporto di Dulong letto all'Accademia il 30 Novembre 1829, e pubblicato nel 1831, nel tomo X delle *Memorie* dell'Istituto. Esperienze simili, fatte a Vienna dal professore Arzbelger, hanno dato resultati che non differiscono da quelli di Dulong e Arago che nelle temperature elevatissime. Adesso passeremo, per quanto i nostri limiti ce lo permettano, a indicare i principj sui quali si stabilisce la valutazione della forza reale di una macchina a vapore.

Alla parola Forza elastica abbiamo esposto le proprietà generali dei corpi gassosi, tanto di quelli che si dicono *vapori* quanto degli altri che chiamansi *gas permanenti*; ora noi dobbiamo particolarmente occuparci del *vapore dell'acqua*.

Rammentiamoci che tutti i vapori presentano delle proprietà differentissime, secondochè si considerano a contatto coi liquidi che gli generano o separati da questi liquidi. Un vapore a contatto col suo liquido generatore non può aumentare o diminuire di tensione e di densità mediante la diminuzione o l'aumento del recipiente che lo contiene (*Vedi* Forza elastica). La sua tensione e la sua densità dipendono unicamente dalla sua temperatura, e per qualunque temperatura sono sempre le più grandi possibili, ossia allo stato di *maximum*. Separato dal suo liquido, un vapore si comporta esattamente come un gas permanente, vale a dire che per una stessa temperatura esso cangia di tensione e di densità a misura che il suo volume varia, e che, a temperature differenti, la sua pressione è differente, ma non la sua densità, quando il volume resta lo stesso. È facile rendersi conto di tutti questi fenomeni analizzando le circostanze della produzione del vapore.

Se si empie d'acqua fino alla metà un vaso suscettibile di esser chiuso esattamente e da cui si possa scacciare l'aria, lo spazio divenuto vuoto al di sopra della superficie dell'acqua si riempie istantaneamente del vapore emesso dal liquido, qualunque d'altronde sia la temperatura attuale. La quantità di vapore prodotta è sempre proporzionale all'estensione dello spazio vuoto, ma la sua forza elastica non può avere che un valore determinato per ogni temperatura,

perchè è questa forza elastica che mantiene il resto dell'acqua allo stato liquido, mediante la pressione che essa esercita sulla sua superficie. Se si aumenta quindi la temperatura del liquido, la sua tendenza ad evaporarsi aumenta: essa diviene più grande della pressione del vapore già esistente, e allora nuove quantità di vapore sono emesse, cosicchè la densità e la tensione del vapore aumentano parallelamente al di sopra della superficie dell'acqua, fintantochè la pressione a questa superficie si trovi in equilibrio colla tendenza alla vaporizzazione, e così successivamente per ogni aumento di temperatura. Si vede dunque che esiste necessariamente un legame costante tra la temperatura e la tensione del vapore formato sopra un eccesso di liquido, e che questo vapore è sempre *alla massima densità e alla massima pressione per la sua temperatura.* I fenomeni non sono più gli stessi quando tutta l'acqua è vaporizzata, perchè allora la densità del vapore non è più suscettibile di aumento, e per conseguenza essa cessa di essere al suo massimo se la temperatura riceve dei nuovi aumenti. In quest' ultimo caso, il vapore si comporta come i gas permanenti e rimane soggetto alle leggi di Mariotte e di Gay-Lussac.

Le relazioni che esistono tra le densità, le tensioni, e le temperature del vapore, non potrebbero dunque esser le stesse quando esso è a contatto colla sua acqua generatrice di quelle che hanno luogo quando nè è separato: ma in ambedue questi stati esso possiede una proprietà importantissima che permette di determinare la sua densità per ogni temperatura e per ogni pressione data. Questa proprietà costituisce il principio seguente.

Il rapporto del peso di un certo volume di vapore al peso di uno stesso volume di aria alla stessa temperatura e alla stessa pressione è un numero costante.

Infatti, consideriamo un volume qualunque di vapore che, separato dalla sua acqua generatrice, sia al massimo di densità per la sua temperatura, e confrontiamolo con uno stesso volume di aria avente la stessa pressione e la stessa temperatura; se si scalda il vapore e l'aria di uno stesso numero di gradi, questi due fluidi si dilateranno di una stessa quantità, e per conseguenza i pesi dei nuovi volumi avranno sempre lo stesso rapporto coi pesi primitivi, poichè questi pesi rimarranno invariabili. Se si aumenta quindi la pressione dei due fluidi fintantochè il vapore si trovi al massimo di densità corrispondente alla sua nuova temperatura, i volumi di vapore e di aria diminuiranno della stessa quantità, e per conseguenza anco in questo caso il rapporto dei pesi di volumi eguali non avrà provato cangiamento nessuno.

In forza di questo principio, basta conoscere il numero costante che esprime il rapporto dei pesi di due volumi eguali di aria e di vapore sotto la stessa pressione ed alla stessa temperatura, per valutare facilmente la densità del vapore in tutte le circostanze di pressione e di temperatura. Poichè, indicando con D questo numero costante, con h la pressione espressa in colonna di mercurio (*Vedi* FORZA ELASTICA), con t la temperatura espressa in gradi centigradi, e con d la densità del vapore alla temperatura t e sotto la pressione h, si ha

$$d = \mathrm{D}.\frac{h}{0,76}.\frac{1}{1+0,00375t} \quad \ldots\ldots (1).$$

Infatti, sia p il peso di un metro cubo di aria alla temperatura 0° e sotto la pressione media dell'atmosfera $0^{m},76$; siccome questo fluido si dilata di 0,00375 del suo volume alla temperatura zero, per ogni grado centigrado di aumento di temperatura, alla temperatura t il suo volume, che era 1 a 0°, diviene $1+0,00375t$,

e per consegnenza il peso di un metro cubo è allora

$$\frac{p}{1+0{,}00375t},$$

ritenendo però che la pressione non sia cambiata. Ora, il rapporto delle densità essendo lo stesso di quello dei pesi di due volumi eguali (*Vedi* Densità), ne resulta che il rapporto della densità dell'aria alla temperatura t colla densità dell'aria alla temperatura $0°$, sotto la stessa pressione $0^m{,}76$, è

$$\frac{p}{1+0{,}00375t} : p = \frac{1}{1+0{,}00375t},$$

vale a dire che prendendo per unità la densità dell'aria a $0°$ di temperatura e sotto la pressione di $0^m{,}76$, la densità di questo fluido alla temperatura t e sotto la pressione $0^m{,}76$ è rappresentata da

$$\frac{1}{1+0{,}00375t}.$$

Ma, quando la pressione cambia, la densità varia nello stesso rapporto; così la densità dell'aria alla temparatura t e sotto una pressione qualunque h ha per espressione

$$\frac{h}{0{,}76}\cdot\frac{1}{1+0{,}00375t},$$

la quale dovrà moltiplicarsi pel numero costante D per avere la densità del vapore alla stessa temperatura t e sotto la stessa pressione h, e così si otterrà la formula (1).

Tutto si riduce dunque alla determinazione del numero costante D, al quale si è dato il nome di *densità assoluta* del vapore. Questa determinaziona è stata fatta da Gay-Lussac. Egli ha trovato che un grammo d'acqua pura produceva 1 litro,6964 di vapore alla temperatura 100° e sotto la pressione $0^m{,}76$, il che dà pel peso di un litro di vapore

$$\frac{1^g}{1{,}6964} = 0^g{,}58948.$$

Ora il peso di un litro d'aria a $0°$ di temperatura e a $0^m{,}76$ di pressione è $1^g{,}2991$ (*Vedi* Forza Elastica), dunque il peso di un litro d'aria a 100° di temperatura e a $0^m{,}76$ di pressione è

$$\frac{1{,}2991}{1{,}375} = 0{,}94480.$$

Così la densità assoluta del vapore è

$$D = \frac{0{,}58948}{0{,}94480} = 0{,}624,$$

ossia presso a poco $D = \frac{5}{8}$.

Ponendo in luogo di D il suo valore nella espressione (1) e riducendo, si ottiene la nuova forma

$$d = 0{,}821.\frac{h}{1+0{,}00375t} \quad \ldots\ldots (2).$$

La densità del vapore data dalla formula (2) si riferisce a quella dell'aria presa per unità. Se si volesse riferirla alla densità dell'acqua come unità, bisognerebbe moltiplicarla pel numero 0,0012991, che esprime la densità dell'aria alla temperatura 0° e sotto la pressione $0^m,76$, prendendo, per unità la densità dell'acqua alla sua massima condensazione. Allora la formula (2) diviene

$$d = 0{,}001066 \cdot \frac{h}{1+0{,}00375t} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Le formule (2) e (3) faranno conoscere la densità del vapore alla sua massima tensione, quando, dopo aver dato a t un valore particolare, si darà ad h il valore della tensione massima corrispondente espressa in metri. Sapendosi, per esempio, che la tensione massima del vapore a 50° è $0^m,088743$, si farà

$$t = 50\,,\quad h = 0{,}088743\,,$$

e si otterrà: 1.° prendendo per unità la densità dell'aria alla temperatura 0° e sotto la pressione $0^m,76$,

$$d = 0{,}821 \cdot \frac{0{,}088743}{1{,}1875} = 0{,}0613541\,;$$

2.° prendendo per unità la densità dell'acqua,

$$d = 0{,}001066 \cdot \frac{0{,}088743}{1{,}1875} = 0{,}0000797.$$

Nei calcoli relativi alle macchine, le tensioni si esprimono ordinariamente in peso, vale a dire per mezzo della pressione che il fluido esercita sull'unità di superficie della parete del vaso in cui è contenuto. È facile modificare le formule precedenti per renderle immediatamente applicabili alle tensioni misurate in questa guisa, osservando che se s'indica con μ il peso dell'unità di volume del mercurio, μh sarà il peso equivalente alla pressione sull'unità di superficie, talmentechè, indicando questo peso con p, si ha

$$p = \mu h\,,$$

e per conseguenza

$$h = \frac{p}{\mu}\,.$$

Basta dunque sostituire in luogo di h il suo valore $\frac{p}{\mu}$ nella formula generale (1), e si otterrà l'altra formula

$$d = \mathrm{D} \cdot \frac{p}{0{,}76\,\mu} \cdot \frac{1}{1+0{,}00375t} \quad \ldots\ldots \quad (4),$$

nella quale p è la tensione in chilogrammi sopra un metro quadrato e μ il peso del metro cubo di mercurio alla temperatura 0° e sotto la pressione $0^m,76$. Ma siccome si prende comunemente per unità di superficie il centimetro quadro, e d'altronde un centimetro cubo di mercurio pesa $0^{ch},013598$, così scriveremo la suddetta formula (4) nel modo seguente

$$d = \frac{\mathrm{D}}{0{,}013598} \cdot \frac{p}{76} \cdot \frac{1}{1+0{,}00375t} \quad \ldots\ldots \quad (5),$$

ed allora p rappresenta la tensione in chilogrammi sopra un centimetro quadro.

Ponendo in luogo di D il suo valore 0,624 (pag. 432) e riducendo i numeri, si avrà più semplicemente

$$d = 0,6038 \cdot \frac{p}{1+0,00375t} \dots\dots (6),$$

che è la densità del vapore riferita a quella dell' aria presa per unità. Per avere questa medesima densità riferita all' acqua, bisogna moltiplicare il secondo membro di questa espressione per 0,001291, il che dà questa seconda formula

$$d = 0,0007844 \cdot \frac{p}{1+0,00375t} \dots\dots (7).$$

Nel caso che la tensione fosse data in *atmosfere*, bisognerebbe, per fare uso delle formule precedenti, convertirla in chilogrammi, osservando che ciò che dicesi pressione di un' atmosfera è il peso della colonna di mercurio che nel barometro fa equilibrio al peso medio dell' atmosfera (*Vedi* FORZA ELASTICA). Perciò, l' altezza di questa colonna essendo di 76 centimetri e il suo peso per centimetro quadro di base essendo per conseguenza

$$0^{ch.},013598 \times 76 = 1^{ch.},033,$$

se s' indica con f un numero di atmosfere, $1^{ch.},033f$ esprimerà la pressione in chilogrammi, per centimetro quadro, corrispondente a f; vale a dire che in generale si avrà

$$p = 1^{ch.},033f,$$

relazione che serve a passare dalla pressione in atmosfere alla pressione in chilogrammi e reciprocamente.

Sostituendo $1,033f$ in luogo di p nelle formule (6) e (7), si otterranno le seguenti nuove formule, che dispenseranno da qualunque preliminare riduzione.

Densità rapporto all' aria

$$d = 0,6237 \cdot \frac{f}{1+0,00375t} \dots (8).$$

Densità rapporto all' acqua

$$d = 0,00081 \cdot \frac{f}{1+0,00375t} \dots (9).$$

Il calcolo delle densità del vapore al massimo di tensione esige che si conosca la temperatura che corrisponde ad una massima tensione data, o la massima tensione corrispondente ad una temperatura data: disgraziatamente, sebbene il legame di queste quantità sia invariabile, la sua legge è tuttora ignota, e tuttociò che fin quì si è potuto fare si è ridotto a rappresentarla con formule empiriche che hanno l' inconveniente di non verificarsi in tutta l' estensione della scala delle temperature. Ecco tra queste formule quelle che meglio si accordano colle osservazioni.

Formula di Southern, per le pressioni minori della pressione media dell' atmosfera, ossia per le pressioni inferiori a $1^{ch.},033$ *per centimetro quadro.*

$$\left.\begin{aligned} p &= 0,0034542 + \left(\frac{46,278+t}{145,360}\right)^{5,13} \\ t &= 145,360\sqrt[5,13]{\left(p-0,0034542\right)} - 46,278 \end{aligned}\right\} \dots (10).$$

Formula di Tredgold per le pressioni da una fino a quattro atmosfere.

$$\left.\begin{aligned} p &= \left(\frac{75+t}{174}\right)^6 \\ t &= 174 \sqrt[6]{p} - 75 \end{aligned}\right\} \ldots (11).$$

Formula di Dulong e di Arago per le pressioni da 4 a 50 atmosfere.

$$\left.\begin{aligned} p &= \left(0{,}28658 + 0{,}0072003t\right)^5 \\ t &= 138{,}883 \sqrt[5]{p} - 39{,}802. \end{aligned}\right\} \ldots (12).$$

Questa formula è la stessa di quella che abbiamo già riportata all'articolo Forza elastica, colla sola differenza che si sono cangiate in chilogrammi le pressioni espresse in atmosfere.

Il Sig. De Pambour ha proposto la formula seguente per le pressioni da una a quattro atmosfere:

$$\left.\begin{aligned} p &= \left(\frac{72{,}67+t}{171{,}72}\right)^6 \\ t &= 171{,}72 \sqrt[6]{p} - 72{,}67 \end{aligned}\right\} \ldots (13).$$

essa si accorda colle esperienze non meno bene di quella di Tredgold, ed ha di più il vantaggio di coincidere con quella di Dulong e di Arago fino a 4 atmosfere e mezzo.

In tutte queste formule, p indica la pressione sopra un centimetro quadro espressa in chilogrammi e t la temperatura in gradi centigradi.

Facendo uso d' ognuna di queste formule nei limiti in cui è applicabile, potrà sempre determinarsi approssimativamente la temperatura corrispondente a una pressione nota, o la pressione corrispondente a una temperatura nota, in tutti i casi di vapore a contatto colla sua acqua generatrice, vale a dire in tutti i casi che interessano la teoria delle macchine a vapore (*Vedi* Forza Elastica).

Un' altra determinazione non meno importante per le macchine a vapore è quella del *volume relativo* del vapore o del volume di un peso dato di vapore confrontato col volume di uno stesso peso d' acqua preso come unità: e a questa determinazione si giunge con facilità mediante le seguenti considerazioni.

Chiamismo q il peso di un volume V d'acqua alla sua massima condensazione e q' il peso di uno stesso volume V di vapore alla temperatura t e sotto la pressione p: allora, indicando con d la densità di questo vapore rapporto all'acqua, si avrà (*Vedi* Densità)

$$q' = dq.$$

Se s'indica ora con V' il volume d'acqua il cui peso sia eguale a q', si avrà evidentemente

$$V : V' = q : q' = q : dq,$$

donde si ottiene

$$\frac{V}{V'} = \frac{1}{d},$$

vale a dire che il rapporto di un volume di vapore a un volume d'acqua dello stesso peso è eguale all'unità divisa per la densità del vapore.

Prendendo il volume V' dell'acqua per unità, si otterrà semplicemente

$$V = \frac{1}{d} \quad \ldots\ldots (14),$$

ossia, sostituendo in luogo di d il suo valore (7) in funzione della temperatura e della pressione,

$$V = \frac{1+0,00375t}{0,0007844p} \quad \ldots\ldots (15),$$

che può ridursi a

$$V = 1274 . \frac{1+0,00375t}{p} .$$

Se la pressione è data in atmosfere, si può immediatamente fare uso della formula

$$V = 1274 . \frac{1+0,00375t}{f} \quad \ldots\ldots (16),$$

che resulta dalla precedente sostituendovi $1,033f$ in luogo di p.

Per mezzo di queste formule si potrà sempre calcolare il *volume relativo* del vapore ossia il rapporto dello spazio che esso occupa al volume dell'acqua che l'ha prodotto sotto una pressione data, quando si conoscerà la temperatura corrispondente a questa pressione pei vapori alla massima tensione.

Proponiamoci per esempio di trovare il volume relativo del vapore formato alla pressione di due atmosfere e mezzo, ossia alla pressione di $2^{ch.},582$ per centimetro quadro. La tavola riportata all'articolo FORZA ELASTICA ci fa conoscere che la temperatura corrispondente a questa pressione è di $128^{o},8$; perciò, facendo nella formula (15) $p = 2,582$ e $t = 128,8$, si troverà

$$V = \frac{1274}{2,582}\left(1+0,00375 \times 128,8\right) = 732.$$

Il volume del vapore è dunque alla temperatura data 732 volte più grande del volume dell'acqua, o, con maggior precisione, a questa temperatura, un metro cubo d'acqua produce 732 metri cubi di vapore alla pressione di $2^{ch.},582$ sopra un centimetro quadro.

Noi faremo osservare che le temperature t che entrano in tutte le formule precedenti, ad eccezione delle formule (10), (11), (12) e (13), dovrebbero esser misurate con un termometro ad aria, quando oltrepassano 100^{o}, perchè il coefficiente 0,00375 della dilatazione dei gas non è più costante se si fa uso per queste alte temperature di un termometro a mercurio (*Vedi* TERMOMETRO). Dai 100 ai 130 gradi, le indicazioni dei due termometri non presentano ancora che differenze poco sensibili; ma al di là di 130^{o} sarebbe necessario di ridurre i gradi del termometro a mercurio a quelli del termometro ad aria, prima d'introdurli nelle formule in questione, se si esigesse una grande esattezza. Quanto alle formule (10), (11), (12) e (13), è da notarsi che esse sono state dedotte da esperienze in cui le temperature erano misurate sul termometro a mercurio, e per conseguenza si riferiscono a questo solo termometro. Così, quando per una pressione data si sarà calcolata la pressione corrispondente per mezzo di queste ultime for-

mula, e che si vorrà poi calcolare la densità ossia il volume relativo, bisognerà ridurre prima di tutto al termometro a aria la temperatura trovata, quando oltrepasserà i 130° o i 140°. Del resto, nei limiti della pratica, queste riduzioni sono poco necessarie, perchè non si può pretendere di ottenere dalle formule (10), (11), (12) e (13) resultati rigorosi. Il quesito seguente servirà per mostrare l'applicazione di questi principj.

Si domanda la densità e il volume relativo del vapore prodotto in una caldaja sotto una pressione di $15^{ch.},347$.

La prima cosa da farsi è di determinare la temperatura corrispondente alla pressione data: si farà dunque $p = 15,347$ nella formula di Dulong e Arago, e si otterrà

$$t = 138,883 \sqrt[5]{15,347} - 39,802 = 200°.$$

Introdotto questo valore senza riduzione nessuna insieme con quello di p nelle formule (14) e (15), si avrà

$$d = 0,0007844 \frac{15,347}{1,75} = 0,006879,$$

$$V = 1274.\frac{1,75}{15,347} = 145.$$

Se si vuol far conto delle differenze termometriche, si osserverà che i 200° indicati dal termometro a mercurio corrispondono a 197°,05 indicati dal termometro ad aria: si farà per conseguenza $t = 197°,05$ e le formule (7) e (15) daranno

$$d = 0,0007844 \frac{15,347}{1,7389375} = 0,006923,$$

$$V = 1274.\frac{1,7389375}{15,347} = 144.$$

Da questi resultati si può concludere che il vapore formato sotto una pressione di $15^{ch.},347$ per centimetro quadrato occupa uno spazio 144 in 145 volte maggiore della sua acqua generatrice, vale a dire che un metro cubo di acqua produce in queste circostanze presso a poco 145 metri cubi di vapore.

All'articolo Forza Elastica abbiamo già dato una tavola delle massime tensioni per le temperature superiori a 100°; noi ci limiteremo dunque adesso a darne una per le temperature inferiori, unendovi tutte le indicazioni che possono essere utili in una infinità di quesiti fisici e meccanici.

TAVOLA

DELLE TENSIONI, DELLE DENSITÀ E DEI VOLUMI RELATIVI DEL VAPORE DELL'ACQUA A DIFFERENTI TEMPERATURE.

GRADI DEL TERMOMETRO CENTIGRADO.	TENSIONE DEL VAPORE IN MILLIMETRI.	PRESSIONE SOPRA UN CENTIMETRO QUADRO IN CHILOGRAMMI.	DENSITÀ.	VOLUME.
Gradi.	Millimetri.	Chilogrammi.		
— 20	1,333	0,0018	0,00000154	650588
— 15	1,879	0,0026	212	470898
— 10	2,631	0,0036	292	342984
— 5	3,660	0,0050	398	251358
0	5,059	0,0069	540	182323
1	5,393	0,0074	573	174495
2	5,748	0,0078	609	164332
3	6,123	0,0084	646	154842
4	6,523	0,0089	686	145886
5	6,947	0,0094	727	137488
6	7,396	0,0101	772	129587
7	7,871	0,0107	818	122241
8	8,375	0,0114	867	115305
9	8,909	0,0122	919	108790
10	9,475	0,0129	974	102670
11	10,074	0,0137	0,00001032	99202
12	10,707	0,0146	1092	91564
13	11,378	0,0155	1157	86426
14	12,087	0,0165	1224	81686
15	12,837	0,0170	1299	77008
16	13,630	0,0186	1372	72913
17	14,468	0,0197	1451	68923
18	15,353	0,0209	1534	65201
19	16,288	0,0222	1622	61654
20	17,314	0,0235	1718	58224
21	18,317	0,0250	1811	55206
22	19,447	0,0265	1914	52260
23	20,577	0,0281	2021	49487
24	21,805	0,0297	2133	46877
25	23,090	0,0314	2252	44411
26	24,452	0,0334	2376	42084

SEGUE LA TAVOLA PRECEDENTE.

Gradi del termometro centigrado.	Tensione del vapore in millimetri.	Pressione sopra un centimetro quadro in chilogrammi.	Densità.	Volume.
Gradi.	Millimetri.	Chilogrammi.		
27	25,881	0, 0353	0, 00002507	39895
28	27, 390	0,0374	2643	37838
29	29, 045	0, 0396	2794	35796
30	30, 643	0,0418	2938	34041
31	32, 410	0,0440	3097	32291
32	34, 261	0,0465	3263	30650
33	36, 188	0,0492	3435	29112
34	38, 254	0,0520	3619	27636
35	40, 404	0, 0549	3809	26253
36	42, 743	0,0581	4017	24897
37	45, 038	0,0612	4219	23704
38	47, 579	0, 0646	4442	22513
39	50, 147	0,0681	4666	21429
40	52, 998	0, 0720	4916	20343
41	55, 772	0, 0758	5156	19396
42	58, 792	0,0799	5418	18459
43	61, 958	0, 08418	5691	17572
44	65, 627	0, 08916	6023	16805
45	68, 751	0, 09340	6274	15938
46	72, 393	0, 09835	6585	15185
47	76, 205	0, 10353	6910	14472
48	80, 195	0, 10900	7242	13809
49	84, 370	0, 11662	7602	13154
50	88, 743	0, 12056	7970	12546
51	93, 301	0, 12676	8354	11971
52	98, 075	0,13325	8753	11424
53	103, 060	0, 13999	9174	10901
54	108, 270	0, 14710	9606	10410
55	113, 710	0, 15449	0, 00010054	9946
56	119, 390	0, 16220	10525	9501
57	125, 310	0, 17035	11011	9082
58	131 500	0, 17866	11523	8680
59	137, 940	0, 18736	12044	8303

SEGUE LA TAVOLA PRECEDENTE.

GRADI DEL TERMOMETRO CENTIGRADO.	TENSIONE DEL VAPORE IN MILLIMETRI.	PRESSIONE SOPRA UN CENTIMETRO QUADRO IN CHILOGRAMMI.	DENSITÁ.	VOLUME.
Gradi.	Millimetri.	Chilogrammi.		
60	144,660	0, 19653	0, 00012599	7937
61	151,700	0, 20610	13179	7594
62	158,960	0, 21586	13760	7267
63	166,560	0,22639	14374	6957
64	174,470	0, 23758	15010	6662
65	182,710	0, 24823	15668	6382
66	191,270	0, 25986	16356	6114
67	200,180	0, 27196	17066	5860
68	209,440	0, 28456	17797	5619
69	219,060	0, 29761	18566	5386
70	229,070	0, 31121	19355	5167
71	239,450	0, 32532	20174	4957
72	250,230	0, 33996	21013	4759
73	261,430	0, 35518	21889	4569
74	273,030	0, 37094	22794	4387
75	285,070	0, 39632	23789	4204
76	297,570	0, 40428	24702	4048
77	310,490	0, 42184	25699	3891
78	323,890	0, 44004	26739	3741
79	337,760	0, 45888	27789	3599
80	352,080	0, 47834	28889	3462
81	367,000	0, 49860	30025	3331
82	382,380	0,51950	31195	3206
83	398,280	0,54110	32399	3087
84	414,730	0,56345	33637	2973
85	431,710	0,58632	34916	2864
86	449,260	0, 61036	36237	2760
87	467,380	0, 63498	37590	2660
88	486,090	0, 66040	38984	2565
89	505,380	0, 68661	40417	2474
90	525,280	0, 71364	41891	2387
91	545,800	0, 74152	43405	2304
92	566,950	0,77026	44956	2224

SEGUE LA TAVOLA PRECEDENTE.

GRADI DEL TERMOMETRO CENTIGRADO.	TENSIONE DEL VAPORE IN MILLIMETRI.	PRESSIONE SOPRA UN CENTIMETRO QUADRO IN CHILOGRAMMI.	DENSITÀ.	VOLUME.
Gradi.	Millimetri.	Chilogrammi.		
93	588, 740	0, 79986	46556	2148
94	611, 180	0, 83035	48201	2075
95	634, 270	0, 86172	49886	2005
96	658, 050	0, 89402	51613	1938
97	682, 590	0, 92736	53388	1873
98	707, 630	0, 96138	55191	1812
99	733, 460	0, 99648	57055	1751
100	760, 000	0, 03253	58955	1696

Le densità di questa tavola essendo riferite a quella dell'acqua, basta moltiplicarle per 1000 chilogrammi per avere immediatamente il peso di un metro cubo di vapore al *maximum* di tensione a tutte le temperature che vi sono indicate.

Premessi questi principj che bastano per far comprendere il modo di azione del vapore nelle macchine, passiamo ad esporre il metodo di calcolo di cui si fa uso per determinare i loro effetti.

La misura di una forza meccanica qualunque consiste nella determinazione del peso che questa forza può elevare ad una data altezza presa per unità, in un tempo dato preso egualmente per unità. Per esempio, il *metro* essendo l'unità di altezza, e il *secondo sessagesimale* l'unità di tempo, una forza capace di alzare 100 chilogrammi ad un metro in un secondo sarà *doppia* di quella capace di alzare 50 chilogrammi nel medesimo tempo, come sarà la *metà* di quella capace di alzare 200 chilogrammi in un secondo ad un metro di altezza. Così, per confrontare due forze di cui l'una può elevare un peso p ad un'altezza h in un secondo, e l'altra può elevare un peso p' ad un'altezza h' nello stesso tempo, si deve osservare che l'intensità della prima forza è rappresentata dal prodotto ph, quella della seconda dal prodotto $p'h'$, e che per conseguenza il rapporto di queste forze è lo stesso di quello delle quantità ph e $p'h'$, ossia $\frac{ph}{p'h'}$. In origine, si prese la forza del cavallo per termine di confronto della forza delle macchine a vapore, donde è venuto l'uso, che si è conservato anche oggigiorno, d'indicare con un numero di cavalli la forza presunta di una macchina: ma questo termine di confronto è troppo vago per non esserne stata tosto riconosciuta la insufficienza; perciò sono state proposte successivamente due unità astratte, che ambedue raggiungono lo stesso scopo. La prima, che gli autori francesi chiamano *dynamode*, è la forza suscettibile di alzare un peso di 1000 chilogrammi ad un metro di altezza in un secondo di tempo; la seconda, che gli stessi autori dicono *dyname*, è la forza capace di alzare un peso di 75 chilogrammi alla stessa altezza e nello stesso tempo. Quest'ultima unità dinamica rappresentando presso a poco la forza media di un cavallo, è da desiderarsi che

venga adottata generalmente, perchè sì vantaggio di una determinazione precisa unisce quello di non allontanarsi troppo degli usi ricevuti.

Prendendo la prima unità dinamica, cioè il *dynamode*, ecco secondo Prony (Vedi *Annales des mines*, tom. VIII, 1830) come si può calcolare l'effetto di una macchina a vapore a scatto e composta di un solo cilindro. Siano:

Diametro dello stantuffo . . . . $= D$

Superficie della sua base . . . . $= \Omega$

Lunghezza della sua escursione totale . . . . . . $= Z$

Parte di questa lunghezza che vien percorsa dallo stantuffo senza scatto . . . . $= \frac{Z}{K}$

Durata di una intera escursione. . . . . $= T$

Numero delle atmosfere che misurano la tensione del vapore nella caldaja . . . . $= a$

Numero delle atmosfere che misurano la pressione costante che si esercita sopra una delle basi dello stantuffo in senso contrario al suo moto . . . . $= a'$

Numero delle atmosfere che rappresentano la pressione media dello stantuffo considerata nell'estensione di un'escursione. . . . . $= q$

Peso la cui elevazione ad un metro di altezza in un secondo di tempo rappresenta l'effetto utile della macchina . . . . $= Q$

Numero di chilogrammi che misurano la pressione di un'atmosfera sopra una superficie di un metro quadrato $= 10334^{ch.},5$ . . . . $= \Pi$

Facendo astrazione dalla perdita di forza dovuta agli attriti e ad altre circostanze della macchina, che diconsi *cali* dell'effetto utile, si avrà per lo sforzo esercitato sullo stantuffo nell'estensione di un'escursione: 1.° a atmosfere nella prima parte $\frac{Z}{K}$ di questa escursione; 2.° $\frac{aZ}{KZ}$ atmosfere nella seconda parte in cui ha luogo lo scatto, essendo Z lo spazio percorso dall'origine dell'escursione, e supponendo che la pressione vari in questa seconda parte secondo la legge di Mariotte; 3.° a' atmosfere nell'estensione intera dell'escursione.

Prendendo le somme respettive dei prodotti di questi sforzi per gli elementi degli spazj percorsi, la prima da o a $\frac{Z}{K}$, la seconda da $\frac{Z}{K}$ a Z, la terza da o a Z, si avrà per la somma totale, dopo eseguite tutte le riduzioni:

$$Z\left(\frac{a}{K}\left(1+LK\right)-a'\right),$$

dove la caratteristica L indica il logaritmo naturale.

Questo prodotto è proporzionale all'effetto utile dovuto ad un'escursione, facendo sempre astrazione dai cali, e il suo secondo fattore dà la *pressione media*, che ha perciò per valore

$$\frac{a}{K}\left(1+LK\right)-a'.$$

Per introdurre in questa formula la correzione relativa ai cali che diminuiscono il prodotto della macchina, si è considerata la somma di questi cali come eguale al prodotto della pressione a che ha luogo nella caldaja, per un numero α minore dell'unità, e del quale l'esperienza deve dare il valore. La pressione media, espressa in atmosfere sarà dunque

$$q = \frac{a}{K}\left(1+LK\right) - a' - \alpha a$$

ossia

$$q = a\left[\frac{1+LK}{K} - \alpha\right] - a' \quad \ldots\ldots (1).$$

Per avere questa espressione media in peso assoluto, bisogna moltiplicarla per la superficie Ω della base dello stantuffo, e pel peso Π che misura la pressione di un'atmosfera sopra una superficie di un metro quadrato; e per completare la valutazione dell'effetto utile introducendovi il rapporto dello spazio percorso dallo stantuffo al tempo, bisogna in ultimo moltiplicare q pel fattore $\frac{\Pi\Omega Z}{T}$, che darà pel valore di Q

$$Q = \frac{\Pi\Omega Z}{T}\left\{a\left[\frac{1+LK}{K} - \alpha\right] - a'\right\} \quad \ldots\ldots (2).$$

Se ora si osserva che si ha $\Omega = \pi\left(\frac{1}{2}D\right)^2$, ossia $\Omega = \left(0,7853982\right)D^2$, e per conseguenza $\Pi\Omega = \left(10334^{ch.},5\right)\left(0,7853982\right)D^2 = \left(8116^{ch.},68\right)D^2$, si può dare all'equazione precedente la forma

$$Q = \frac{(8116^{ch.},68)D^2Z}{T}\left\{a\left[\frac{1+LK}{K} - \alpha\right] - a'\right\} \quad \ldots\ldots (3).$$

Sia ora μ il numero delle escursioni necessarie per dare l'unità dinamica, cioè il *dynamode*, si avrà

$$\frac{1}{\mu} = \left(0,001\right)\Pi\Omega Z\left\{a\left[\frac{1+LK}{K} - \alpha\right] - a'\right\}.$$

Il peso

$$\Omega\Pi Z\left\{a\left[\frac{1+LK}{K} - \alpha\right] - a'\right\} \quad \ldots\ldots (4),$$

la cui elevazione ad un metro di altezza rappresenta l'effetto meccanico resultante da una escursione dello stantuffo, corrisponde al consumo di un volume $\frac{\Omega Z}{K}$ di vapore preso alla tensione che esso ha nella caldaja. Per trovare il peso che, elevato ad un metro di altezza, rappresenterebbe l'effetto meccanico resultante dal consumo di un metro cubo di questo vapore, bisogna moltiplicare l'espressione (4) per

$$\frac{\overset{\text{metro cubo}}{1}}{\frac{\Omega Z}{K}} = \frac{K}{\Omega Z},$$

e il peso cercato, indicato con P, avrà per valore

$$P = \Pi \left\{ \left(1 + LK - \alpha K \right) a - a'K \right\} \ldots\ldots\ldots (5).$$

Il valore di P essendo legato con quello di K, se si considera quest' ultima quantità come variabile indipendente, il suo valore tratto dall' equazione differenziale

$$\frac{dP}{dK} = 0,$$

e sostituito nell' equazione (5) renderà P un massimo. Ora, differenziando l' equazione (5), si ottiene

$$\frac{dP}{dK} = \Pi \left\{ \left[\frac{1}{K} - \alpha \right] a - a' \right\},$$

che eguagliata a zero dà

$$K = \frac{a}{\alpha a - a'} \ldots\ldots\ldots (6).$$

E questo è il valore che deve avere il fattore K perchè l' effetto prodotto sia un massimo

Se ora si pone l' equazione (2) sotto la forma

$$Q = \frac{\Omega \Pi Z}{T} \left\{ \frac{a}{K} LK - \left(\alpha a + a' - \frac{a}{K} \right) \right\},$$

si scorge che il termine sottrattivo $\alpha a + a' - \frac{a}{K}$ si riduce a zero sostituendovi in luogo di K il suo valore dato dall' espressiooe (6), e che in tal guisa le equazioue (2) e (3) si riducono a

$$Q = \frac{Z \Pi \Omega a}{KT} . LK \ldots\ldots\ldots (7),$$

$$Q = \frac{(8116^{ch.},68) ZD^2 a}{KT} . LK \ldots\ldots (8),$$

espressioni nelle quali bisogna dare a K il valore (6).

Da queste formule si può trarre la regola di calcolo data da Tredgold nel suo *Trattato delle macchine a vapore*, prendendo, come il medesimo ha fatto, il *minuto* per unità di tempo. Infatti, sostituendo a $\frac{Z}{T}$ una celerità v riferita al minnto come unità di tempo, e indicando allora con Q' il peso elevato a un metro di altezza in un minuto di tempo, se si rappresenta inoltre con d il numero dei centimetri contenuti nella lunghezza del diametro dello stantuffo, e con p la pressione assoluta con cui il vapore gravita sopra ciascun centimetro *circolare* della parte interna della caldaja, avremo, per la ragione che il numero dei centimetri *circolari* contenuti nell' area di un circolo è eguale al numero dei centimetri *quadrati* contenuti nel quadrato circoscritto a questo circolo,

$$p = \left(0^{ch.},811668 \right) a, \qquad pd^2 = \left(8116^{ch.},68 \right) aD^2,$$

ove il peso $o^{ch.},811668$ misura la pressione di un'atmosfera sopra un centimetro *circolare*. Ponendo finalmente, come Tredgold, $\alpha = 0,4$ e $a' =$ un'atmosfera, e sostituendo questi valore e quelli di

$$a = \frac{p}{o^{ch.},811668}, \qquad \Pi\Omega = \left(o^{ch.},811668\right)d^2,$$

nell'equazione (2), si ottiene

$$Q' = vd^2\left\{p\left[\frac{1+LK}{K} - 0,4\right] - 0,81167\right\},$$

che esprime la regola di Tredgold.

Osservando che il numero a di atmosfere corrisponde alla pressione che eserciterebbe una colonna di mercurio di un'altezza eguale a $(o^m,76)a$, se s'indica quest'altezza con H, e se si fa

$$G = \left(o^m,76\right)q, \qquad \alpha = 0,368, \qquad \left(o^m,76\right)a' = o^m,1,$$

l'equazione (1) diviene, sostituendovi questi valori,

$$G = H\left(\frac{1+LK}{K} - 0,368\right) - o,1 = \frac{H}{K}\left(1+LK - \frac{(0,368)H+o^m.1}{H}K\right)$$

formula data da Navier per calcolare la pressione media dello stantuffo nell'estensione di un'escursione.

Il valore del coefficiente di correzione α dipende evidentemente in parte dalla maggiore o minore perfezione della macchina, perciò gli sono state assegnate grandezze assai differenti. Tredgold lo ha trovato eguale a 0,392, o 0,4 in numero tondo, mentre Prony, dietro esperienze eseguite con somma accuratezza sopra una macchina benissimo costruita, lo fa eguale a 0,15. Queste valutazioni, sì poco concordanti, fanno pensare al sig. Prony che non si possa considerare α come una quantità invariabile e che si debba sempre, nei progetti di macchine, fare uso della relazione data dall'equazione (6).

Riepilogando quanto fin quì è stato detto sul modo di calcolare gli effetti del vapore, diremo che nel metodo esposto si suppona che il vapore conservi nel cilindro la stessa tensione che ha nella caldaja, e che per conseguenza esso spinga lo stantuffo col medesimo sforzo che viene esercitato sulla valvula di sicurezza. Così, chiamando Ω l'area della base dello stantuffo, a la pressione del vapore nella caldaja sull'unità di superficie,

$$a\Omega$$

rappresenta il peso che il vapore può mettere in moto, e se v è la velocità dello stantuffo,

$$va\Omega$$

è l'effetto teorico che la macchina deve produrre. Ma siccome questo preteso effetto teorico non s'incontra mai nella pratica, fa d'uopo moltiplicarlo per un coefficiente di riduzione α, da determinarsi mediante l'esperienza; dimanierachè l'effetto reale d'una macchina a vapore senza scatto vien rappresentato da

$$\alpha a\Omega v.$$

Ma, oltre l'inconveniente del coefficiente α, al quale ogni autore dà un va-

lore differente, queste teoria non può far conoscere le celerità che prende lo stantuffo in determinate circostanze di pressione e di resistenze; ed è poi d'altronde certo che essa riposa sopra una ipotesi inammissibile, poichè il vapore che esce dalla caldaja per una piccola apertura e che si dilata penetrando nel cilindro non può conservare la sue tensione iniziale.

Per ben comprender questo, è necessario il formarsi un' idea esatte della produzione del vapore ad una determinata tensione. Tutte le macchine a vapore di cui presentemente si fa uso hanno due perti essenziali: 1.° una caldaja, nella quale il vapore si forma; 2.° un cilindro o corpo di tromba, ello stantuffo del quale il vapore imprime un moto rettilinco alternativo. S' immagini primieramente la caldaja isolata dal corpo di tromba e non avente che un' apertura chiusa da una valvula eprentesi di dentro in fuori e caricate di un dato peso. Quando, per effetto del calore comunicato dal fornello el liquido, questo evrà cominciato e bollire, il vapore si radunerà nella parte superiore della caldaja e vi acquisterà una densità ed una tensione che andrenno progressivamente crescendo finchè il fornello sommioistrerà nuove quantità di calorico e finchè il vapore non troverà un' aperture per cui uscire. Supponiamo che l' eperture della valvula abbia un centimetro quadro a che il suo peso sia di 5 chilogrammi; tostochè il vapore eserciterà sulle pareti della caldaja une pressione un poco superiore a 5 chilogrammi per centimetro quadro, esso respingerà le valvula e si lancerà al di fuori; ma siccome la celerità con cui si effettuerà lo sgorgo del vapore sarà in generale più grande della celerità colle quale esso si formerà, la pressione nella caldaja verrà presto ad abbassarsi, e la valvule si richiuderà per eprirsi di nuovo quando le pressione tornerà e superare il peso di 5 chilogrammi. Per mezzo di quest' azione della valvula, la pressione nella caldaja non oltrepasserà dunque giammai la grendezze che le si vorrà dare. Immaginiamo ora che un orifizio si apra e si chiuda elternativamente per lasciar penetrare il vapore nel corpo di tromba, e che questi moti siano regolati in modo che, in un tempo determinato, la qoantità del vapore che esce sia eguale alla quantità del vapore che si forma; allora si vedrà che la tensione della caldaja non potrà più provare che leggere variazioni regolerizzate d' altronde, se ve ne fosse bisogno, delle valvula di sicurezza.

Ponendo mente a tutte queste circostanze della formazione e sviluppo del vapore, il signor de Pambour ha proposto recentemente di sostituire alla difettosa teoria da noi precedentemente esposta e generalmente adottata un' altra teoria molto più razionale. Questo dotto, già conosciuto per un gran numero di lavori sulle macchine a vapore, si parte dai due seguenti principj.

1.° La tensione del vapora cangie nel passare dalla caldaja nel cilindro, ed in quest' ultimo diviene equivalente alla resistenze che il carico esercite sullo stantuffo.

2.° Vi ha eguaglianza tre le quantità di vapore prodotto e le quantità di vapore consumato.

Il sig. de Pambour stabilisce il primo principio per mezzo di argomenti concludentissimi: il secondo è evidente di per se stesso.

Chiamiamo P la pressione nella caldaja, P' la pressione nel cilindro, R la resistenza del carico sullo stantuffo, S il volome di acqua vaporizzata nell' unità di tempo, ed m il vulume relativo del vapore sotto la pressione P, ossie il rapporto del volume del vapore nelle caldaja al volume dell' acqua che l' ha prodotto.

Secondo queste notazioni, mS sarà il volume di vapore formato nell' unità di tempo e sotto la pressione P nelle caldaja: questo vapore passando nel cilindro e prendendovi le pressiene P', aumenta di volume in ragione inversa delle pressioni,

e diviena per conseguenza

$$mS\frac{P}{P'}.$$

Ma essendo v la velocità dello stantuffo ed a l'area della sua base, av è il volume del vapore versato nel cilindro nell'unità di tempo: dunque, in virtù del secondo principio,

$$av = mS\frac{R}{P'}.$$

Ora, in virtù del primo principio, $P' = R$, perciò, ponendo R in luogo di P', si ha la relazione fondamentale

$$v = \frac{mS}{a}\cdot\frac{P}{R},$$

per mezzo della quale si potrà determinare una qualunque delle quantità v, R ed S, conoscendo le altre.

Da questa relazione semplicissima, il sig. De Pambour ha tratto tutte le formule necessarie alla soluzione dei problemi che presentano le macchine a vapore, formule i cui resultati sembrano accordarsi così bene coll' esperienza, che gli stessi ingegneri inglesi cominciano a farne uso nei loro calcoli. Si veda Pambour, *Traité théorique et pratique des machines locomotives.* — *Théorie de la machine à vapeur.*

La gran perdita di forza delle macchine attuali, il cui prodotto reale non oltrepassa la metà della forza del vapore impiegato, ha fatto dirigere l'attenzione dei dotti alla ricerca di mezzi che sostituiscano al loro moto alternativo un moto continuo proveniente da un moto continuo del vapore; ma gli apparecchi ingegnosissimi che in questa veduta sono stati immaginati, come quello di Cartwrigt, e più recentemente quello di Dietz non hanno ancora presentato una perfezione sufficiente da farli adottare, e si continua generalmente a fare uso delle antiche macchine a stantuffo. Nel 1829, il sig. Wronski pubblicò un'opera sulle macchine a vapore, nella quale dopo avere accennato i progressi successivi di queste macchine annunziava di avere scoperto un nuovo sistema di apparecchi, capace di ridurre l'uso del vapore, come motore meccanico, al suo più alto grado di perfezione. In seguito, nel 1835, in un'opera intitolata: *Nouveau système de machines à vapeur*, questo dotto ha fatto conoscere le leggi matematiche che servono di base alla sua scoperta. Noi non possiamo che rinviare i nostri lettori a queste opere, che presentano vedute talmente nuove sulla teoria dei fluidi e sulle forze meccaniche in generale, che ci sarebbe impossibile di darne un'idea esatta senza entrare in particolarità molto più estese dello spazio che abbiamo ancora a nostra disposizione.

Per la descrizione completa e dettagliata delle principali macchine a vapore si veda il tomo 2 della *Nouvelle architecture hydraulique* di Prony, il tomo III della *Richesse minérale* di Villefosse, il *Traité des machines à vapeur* di Tredgold, tradotto dall'inglese con note da Millet, e il *Manuel de l'ingénieur mécanicien* di Oliviero Evans, tradotto dall'inglese da Doolityle.

VARIABILE (*Alg.*). Si dicono *quantità variabili* le quantità che ammettono più valori o che sono suscettibili di crescere o scemare. Si chiamano in questo modo in opposizione delle quantità che non cangiano e che perciò si dicono *costanti*. Per esempio, nell'equazione di una curva come $y^2 = px$, x e y sono *quantità variabili*, perchè hanno dei valori differenti per ogni punto della curva, mentre p è una *quantità costante*, perchè resta la stessa in tutti questi punti.

VARIATO. Moto variato (*Mecc.*). S'indica con questo nome qualunque moto che non sia uniforme. *Vedi* Moto.

VARIAZIONE. Metodo delle Variazioni. (*Alg.*) Sotto questo nome s' indica un calcolo particolare scoperto dal Lagrange, e che forma uno dei rami del calcolo generale delle differenze.

1. Il metodo delle variazioni ha preso origine dalle questioni dei massimi e minimi considerati sotto il punto di vista più esteso; ma la sua principale utilità consiste nell' applicazioni alla meccanica. I limiti che ci siamo imposti nella compilazione di questo Dizionario non ci permattono che di presentare in questo punto che i primi elementi di questo metodo e i suoi usi più semplici.

Bisogna distinguere in primo luogo in che cosa le questioni dei massimi o minimi che dipendono dal calcolo delle variazioni differiscono dalle questioni ordinarie dello stesso genere. Nelle questioni ordinarie, una quantità u è data in funzione di una o più variabili indipendenti x, y, z, ec., in modo che per ciascun sistema di valori attribuiti a queste variabili, ne resulta un valore determinato per u. Si domanda di fissare i valori di x, y, z, ec., che renderanno u il più grande o il più piccolo che sia possibile. Questa questione, come già l' abbiamo veduto nel calcolo delle differenze, si risolve ponendo

$$\frac{du}{dx}=0,$$

$$\frac{du}{dy}=0,$$

$$\frac{du}{dz}=0,$$

$$\text{ec.}=\text{ec.},$$

alle quali debbono soddisfare i valori domandati delle variabili x, y, z, ec. Quanto alla distinzione dei casi in cui i valori che soddisfanno a queste equazioni corrispondono effettivamente ad un maximum o ad un minimum, essa si fonda, come l'abbiamo veduto nell' articolo citato, sul considerare i coefficienti differenziali del second' ordine della funzione u.

Nelle questioni che dipendono dal calcolo delle variazioni, si concepisce tra diverse quantità variabili una relazione esistente, ma indeterminata, e si domanda di determinare questa relazione in modo che il valore di una data funzione, valore che dipende dalla relazione di cui si tratta, sia il più grande possibile.

Per esempio una curva essendo tracciata tra due punti fissi, la grandezza dell' area compresa tra la curva, l' asse delle ascisse, e le ordinate dei punti estremi, è determinata, e il suo valore resulta dalla relazione

$$y=f(x)$$

che è l' equazione della curva. Rappresentiamoci tra i due punti fissi diverse curve che tutte avessero delle lunghezze uguali: l' equazione

$$y=f(x)$$

sarà differente per ciascuna, e l' area, rappresentata da

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \cdot y,$$

avrà ugualmente dei valori differenti. La lunghezza della curva d' altra parte è

espressa da

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Si può domandare questa lunghezza rimanendo la medesima, di determinare la figura della curva, vale a dire la forma della funzione $f(x)$, in modo che l'area

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \cdot y$$

sia la più grande o la minore possibile.

Concepiamo ancora una curva tracciata tra due punti fissi, e consideriamo un corpo che scenda lungo di questa curva cadendo liberamente mediante l'azione della gravità. Il tempo che questo corpo impiegherà a giungere da un punto all'altro dipende dalla figura della curva di cui si tratta, e il suo valore è espresso, supponendo l'asse delle x verticale, da

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{2g(x-x_0)}}.$$

Si può domandare di determinare la relazione

$$y=f(x)$$

che dia la figura della curva in modo che questo tempo sia il minimo possibile.

Questa questione sarà più estesa, se si ammette che la *curva della più pronta discesa*, o *brachistocrona*, debba tracciarsi, non tra due punti fissi, ma tra due linee curve date, o tra due superficie curve date. I limiti x_0 e x_ω dell'integrale diventano allora variabili, come pure l'ascissa x_0 del primo punto della curva che si trova sotto il segno d'integrazione definito.

Una ricerca dello stesso genere è quella della linea la più corta che possa esser tracciata sopra una data superficie, tra due punti fissi, o tra due linee segnate sopra questa superficie.

2. Questi esempii bastano per indicare qual è la natura delle questioni di cui si tratta, e a quali ricerche analitiche siamo condotti per trovarne la soluzione. L'espressione della quantità che bisogna rendere un maximum o un minimum si forma, mediante le regole conosciute, per mezzo degli elementi differenziali della curva cercata. Quest'espressione è sempre un integrale definito preso tra limiti dati, fissi o variabili con certe condizioni. Si deve rendere il valore di quest'integrale il più grande o il minimo possibile, determinando in conseguenza la relazione analitica dalla quale dipendono i coefficienti differenziali che si trovano sotto il segno d'integrazione. Questa questione si risolve d'altra parte per mezzo dei principii che si applicano alle questioni ordinarie dei massimi e minimi. Si suppone che tutte le quantità variabili dalla quali dipende il valore della funzione proposta aumentino di quantità arbitrarie che possano supporsi tanto piccole quanto si vuole, e nello sviluppo del valore che ne resulta per questa funzione, si uguaglia a zero il termine che contiene le prime potenze di questi accrescimenti; ovvero, se vogliamo, si uguaglia a zero la differenziale totale della funzione proposta presa rapporto a tutte le quantità variabili che essa contiene. L'equazione che ne resulta deve sussistere per tutti i va-

lori che possano attribuirsi agli accrescimenti infinitamente piccoli di queste quantità variabili. Essa esprime la condizione necessaria del maximum o minimum. Quanto alla distinzione dei casi in cui vi è un maximum o un minimum, e di quelli in cui, benchè questa condizione sia soddisfatta, il maximum o minimum non esiste, essa dipende dalla considerazione del termine che contiene le seconde potenze degli accrescimenti. Il maximum e il minimum hanno respettivamente luogo quando questo termine è sempre negativo o positivo, qualunque siano i valori degli accrescimenti.

3. In primo luogo considereremo, il caso in cui non si ha che una variabile indipendente x, e una funzione y il cui valore dipende da quello di x, y rappresenterà dunque l'ordinata di una curva di cui x è l'ascissa. Si tratta di determinare la figura della curva in modo che l'integrale definito

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, V$$

sia un massimo o un minimo. I limiti x_0 e x_ω dell'integrale possono avere un valore costante dato. Questi limiti possono ancora, in alcuni casi, variare mediante certe condizioni. V è una funzione qualunque di un numero determinato delle quantità

$$x\,,\, y\,,\, \frac{dy}{dx}\,,\, \frac{d^2y}{dx^2}\,,\, \frac{d^3y}{dx^3}\,,\ \text{ec.}$$

x essendo la variabile indipendente, l'elemento dx vien supposto costante.

Premesso ciò, cominceremo dall'ammettere che i limiti x_0, x_ω hanno un valore costante. In questo caso, i punti estremi della porzione di curva che consideriamo debbono trovarsi sempre sopra le perpendicolari all'asse delle ascisse, condotte alle distanze x_0, x_ω dall'origine; e faremo variare in un modo tanto generale quanto sia possibile la funzione proposta

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, V\,,$$

e supponiamo che la curva cercata si cangi in una curva qualunque infinitamente vicina che sia soggetta a questa condizione. Ora, non è necessario, per operare un tale cambiamento, di far variare x nella funzione V; basta attribuire in questa funzione alle quantità

$$y\,,\, \frac{dy}{dx}\,,\, \frac{d^2y}{dx^2}\,,\, \frac{d^3y}{dx^3}\,,\ \text{ec.}\,,$$

delle variazioni qualunque indipendenti le une dall'altre, che indichiamo con

$$\delta y\,,\, \delta\frac{dy}{dx}\,,\, \delta\frac{d^2y}{dx^2}\,,\, \delta\frac{d^3y}{dx^3}\,,\ \text{ec.}$$

La caratteristica δ, rappresenta, come ancora la caratteristica d, un accrescimento infinitamente piccolo attribuito alla quantità variabile affetta da questa caratteristica; ma in questo caso vi è questa differenza che il segno d indica un accrescimento resultante dal passaggio di un punto della curva cercato al punto seguente della stessa curva, nel mentre che il segno δ indica un accrescimento che resulta quando si passa da un punto della curva cercato al punto seguente

della curva qualunque infinitamente vicina. Di più chiameremo *variazioni* gli accrescimenti indicati da δ, il nome di *differenziali* conservandosi agli accrescimenti indicati da d. La variazione della funzione V resultando dalle variazioni attribuite alle quantità

$$y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \text{ec.},$$

che ei sono contenute, sarà espressa da δV; ed avremo

$$\delta V = N\delta y + P\delta\frac{dy}{dx} + Q\delta\frac{d^2y}{dx^2} + R\delta\frac{d^3y}{dx^3} + \text{ec.},$$

se rappresentiamo con N, P, Q, R, ec., i coefficienti differenziali della funzione V presi respettivamente rapporto alle quantità variabili

$$y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \text{ec.}$$

La condizione del massimo o minimo esige che la variazione

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\,.\,\delta V$$

dell' integrale definito proposto sia nulla. Questa condizione è dunque espressa dall' equazione

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\left(N\delta y + P\delta\frac{dy}{dx} + Q\delta\frac{d^2y}{dx^2} + R\delta\frac{d^3y}{dx^3} + \text{ec.}\right) = 0.$$

4. Osserveremo ora che nei termini

$$\frac{\delta dy}{dx},\ \frac{\delta d^2y}{dx^2},\ \frac{\delta d^3y}{dx^3},\ \text{ec.},$$

l' ordine dei segni d e δ può essere invertito a piacere. Infatti, l' ordinata del punto della curva cercata essendo y, l' ordinata del punto seguente della stessa curva è $y+dy$, e quella del punto corrispondente della curva vicina, e $y+\delta y$. Dunque l' ordinata del punto seguente di quest' ultima curva è ugualmente

$$y+dy+\delta\left(y+dy\right),$$

ovvero

$$y+\delta y+d\left(y+\delta y\right).$$

Dunque

$$\delta\,dy = d\,\delta y.$$

La stessa osservazione può applicarsi alla funzione $\frac{d^2y}{dx^2}$ a alle funzioni seguenti. Si ha ugualmente

$$\frac{\delta d^2y}{dx^2} = \frac{d\,\delta\,dy}{dx^2} = \frac{d^2\delta y}{dx^2},$$

e così di seguito. Possiamo dunque scrivere in luogo della precedente equazione,

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\left(N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{d^2\delta y}{dx^2} + R\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{ec.}\right) = 0.$$

Ora, se si considera a parte ciascuno dei termini del secondo membro, si vede che per mezzo dell'integrazione per parti essi possono trasformarsi nella seguente maniera. Si avrà

$$\int dx\,.\,P\frac{d\,\delta y}{dx}=\text{cost.}+P\,\delta y-\int dx\,.\,\frac{dP}{dx}\,\delta y;$$

quindi dando successivamente alle quantità che entrano in quest'equazione i valori che corrispondono ai limiti x_0 e x_ω dell'integrale,

$$0=\text{cost.}+P_0\,\delta y_0,$$

$$\int_{x_0}^{x_\omega}dx\,.\,P\frac{d\,\delta y}{dx}=\text{cost.}+P_\omega\,\delta\,dy_\omega-\int_{x_0}^{x_\omega}dx\,.\,\frac{dP}{dx}\,\delta y;$$

e sottraendo il primo resultamento dal secondo,

$$\int_{x_0}^{x_\omega}dx\,.\,P\frac{d\,\delta y}{dx}=\left\{\begin{matrix}-P_0\,\delta y_0-\int_{x_0}^{x_\omega}dx\,.\,\frac{dP}{dx}\,\delta y\\ +P_\omega\,\delta y_\omega\end{matrix}\right\}.$$

Si troverà ugualmente per il termine seguente

$$\int dx\,.\,Q\frac{d^2\delta y}{dx^2}=\text{cost.}+Q\,\delta\frac{dy}{dx}-\int dx\,.\,\frac{dQ}{dx}\,.\,\frac{\delta\,dy}{dx}$$

$$=\text{cost.}+Q\,\delta\frac{dy}{dx}-\frac{dQ}{dx}\,\delta y+\int dx\,.\,\frac{d^2Q}{dx^2}\,\delta y;$$

e per conseguenza

$$\int_{x_0}^{x_\omega}dx\,.\,Q\frac{d^2\delta y}{dx^2}=\left\{\begin{matrix}-Q_0\,\delta\frac{dy_0}{dx}+\frac{dQ_0}{dx}\,\delta y_0+\int_{x_0}^{x_\omega}dx\,\frac{d^2Q}{dx^2}\,\delta y\\ +Q_\omega\,\delta\frac{dy_\omega}{dx}-\frac{dQ_\omega}{dx}\,\delta y_\omega\end{matrix}\right\}.$$

Il termine che verrà in seguito darà

$$\int dx\,.\,R\frac{d^3\delta y}{dx^3}=\text{cost.}+R\,\delta\frac{d^2y}{dx^2}-\int dx\,.\,\frac{dR}{dx}\,\frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

$$=\text{cost.}+R\,\delta\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dR}{dx}\,\delta\frac{dy}{dx^2}+\frac{d^2R}{dx^2}\,\delta y-\int dx\,.\,\frac{d^3R}{dx^3}\,\delta y;$$

e per conseguenza

$$\int_{x_0}^{x_\omega}dx\,.\,R\frac{d^3\delta y}{dx^3}=$$

$$\left\{\begin{matrix}-R_0\,\delta\frac{d^2y_0}{dx^2}+\frac{dR_0}{dx}\,\delta\frac{dy_0}{dx}-\frac{d^2R_0}{dx^2}\,\delta y_0-\int_{x_0}^{x_\omega}dx\,.\,\frac{d^3R}{dx^3}\,\delta y\\ +R_\omega\,\delta\frac{d^2y_\omega}{dx^2}-\frac{dR_\omega}{dx}\,\delta\frac{dy_\omega}{dx}+\frac{d^2R_\omega}{dx^2}\,\delta y_\omega\end{matrix}\right\};$$

E così di seguito, per gli altri termini.

Mediante queste trasformazioni, l' equazione precedente la quale esprime la condizione del massimo o del minimo si trova cangiata in

$$\left\{\begin{array}{l} -\left(P_0-\frac{dQ_0}{dx}-\text{ec.}\right)\delta y_0-\left(Q_0-\frac{dR_0}{dx}+\text{ec.}\right)\delta\frac{dy_0}{dx} \\ \qquad -\left(R_0-\text{ec.}\right)\delta\frac{d^2y_0}{dx^2}-\text{ec.} \\ +\left(P_\omega-\frac{dQ_\omega}{dx}-\text{ec.}\right)\delta y_\omega+\left(Q_\omega-\frac{dR_\omega}{dx}+\text{ec.}\right)\delta\frac{dy_\omega}{dx} \\ \qquad +\left(R_\omega-\text{ec.}\right)\delta\frac{d^2y_\omega}{dx^2}+\text{ec.} \\ +\int_{x_0}^{x_\omega}dx\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\text{ec.}\right)\delta y \end{array}\right\}=0.$$

Quest' equazione deve sussistere, affinchè la condizione del massimo o del minimo dell' integrale definito proposto sia soddisfatta, qualunque siano le variazioni indicate dal segno δ. Le due prime linee contengono le variazioni delle quantità

$$y_0,\quad \frac{dy_0}{dx},\quad \frac{d^2y_0}{dx},\quad \text{ec.},$$

ovvero

$$y_\omega,\quad \frac{dy_\omega}{dx},\quad \frac{d^2y_\omega}{dx^2},\quad \text{ec.},$$

che rappresentano i valori che prendono le funzioni

$$y,\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \text{ec.},$$

quando si attribuisce all' ascissa x, i valori y_0 ovvero y_ω che corrispondono ai limiti dell' integrale definito proposto. L' ultima linea contiene sotto il segno d' integrazione la variazione δy di una qualunque delle coordinate della curva, variazione che è interamente arbitraria. Quest' ultima linea dev' essere uguagliata separatamente a zero; e segue lo stesso delle due altre.

5. Avremo dunque in primo luogo l' *equazione indefinita*

$$N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\text{ec.}=0,$$

la quale appartiene a tutti i punti della curva, e che in principio dev' essere verificata dall' espressione di y in x che risolverà la questione. Quest' equazione sarà un' equazione differenziale tra le variabili x ed y, di cui si tratterà di trovare l' integrale generale.

Avremo in seguito, se le variazioni relative al primo limite dell' integrale sono indipendenti dalle variazioni relative al secondo limite, le *equazioni determinate*.

$$0=-\left(P_0-\frac{dQ_0}{dx}-\text{ec.}\right)\delta y_0-\left(Q_0-\frac{dR_0}{dx}+\text{ec.}\right)\delta\frac{dy_0}{dx}$$
$$-\left(R_0-\text{ec.}\right)\delta\frac{d^2y_0}{dx^2}-\text{ec.},$$

$$o=\left(P_\omega-\frac{dQ_\omega}{dx}-\text{ec.}\right)\delta y_\omega+\left(Q_\omega-\frac{dR_\omega}{dx}+\text{ec.}\right)\delta\frac{dy_\omega}{dx}$$

$$+\left(R_\omega-\text{ec.}\right)\delta\frac{d^2y_\omega}{dx^2}+\text{ec.};$$

che appartengono ai due limiti dell' integrale, e che debbono ugualmente esser soddisfatte dall' espressione di y in x che risolve la questione, quando si danno ad x i valori estremi x_0, x_ω.

Se i punti estremi fossero dati di posizione, ovvero se i valori dell' ordinate y_0 e y_ω fossero costanti, come pure x_0 e x_ω, si avrebbe allora

$$\delta y_0=o \qquad \delta y_\omega=o,$$

e i primi termini dell' equazione di cui si tratta sparirebbero. Basterebbe dunque, per soddisfarei, di uguagliare separatamente a zero i termini seguenti. Ugualmente se i valori di alcuni dei coefficienti differenziali $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ec., appartenendo all' uno o all' altro dei punti estremi, fossero dati dalla natura della questione, si avrebbe

$$\delta\frac{dy_0}{dx}=o, \qquad \delta\frac{d^2y_0}{dx^2}=o, \text{ ec.},$$

per uno di questi punti; ovvero

$$\delta\frac{dy_\omega}{dx}=o, \qquad \delta\frac{d^2y_\omega}{dx^2}=o, \text{ ec.},$$

per l' altro; e i termini affetti da queste variazioni sparirebbero da se stessi. Quanto ai termini che non sparissero mediante ciò da se stessi in conseguenza dei valori determinati che debbono conservare l' ordinata y o alcuni dei suoi coefficienti differenziali nei punti estremi della curva, dobbiamo uguagliarli separatamente a zero. L' equazioni che si ottengono con questo metodo servono in generale a determinare le costanti arbitrarie introdotte, mediante l' integrazione dell' equazione indefinita del n.° precedente.

6. Avanti di andare più avanti, osserveremo che uguagliando a zero il termine che rimane affetto dal segno d' integrazione nell' espressione di

$$\int dx\,.\,\delta V,$$

si esprime la condizione necessaria perchè l' integrazione indicata possa effettuarsi; o perchè la funzione $dx\,.\,\delta V$ sia una differenziale esatta, il che resulterebbe dal sapere che la funzione Vdx sarebbe essa stessa una differenziale esatta. Poichè la supposizione

$$V\,dx=du,$$

conduce a

$$\delta\,Vdx=\delta\,du=d\,\delta\,u.$$

D' altra parte, mettendo

$$y',\ y'',\ y''',\text{ ec.}$$

in luogo di

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \text{ec.},$$

l' equazione di condizione

$$N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\text{ec.}=o$$

di cui si tratta, può scriversi come segue

$$\frac{dV}{dy}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dV}{dy''}\right)-\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dV}{dy'''}\right)+\text{ec.}=o.$$

Se essa è soddisfatta, la funzione Vdx, nella quale V contiene x, y, y', y'', ec., sarà una differenziale esatta di una funzione dell' ordine immediatamente inferiore.

Possiamo verificare questa proposizione per le funzioni del prim' ordine. L' equazione di condizione si riduce allora a

$$\frac{dV}{dy}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right)=o.$$

Siccome essa dev' essere identica i due termini debbono essere dello stesso ordine. Dunque, poichè $\frac{dV}{dy}$ non può contenere che y', ne segue che $\frac{dV}{dy'}$, non deve contenere y', poichè diversamente $\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right)$ conterrebbe y''; donde si conclude in primo luogo che la funzione differenziale del prim' ordine di cui si tratta, che dev' essere una differenziale esatta, non può essere che della forma

$$\left(A+By'\right)dx,$$

vale a dire

$$Adx+Bdy,$$

A e B essendo delle funzioni di x e di y solamente. Questa funzione darà

$$\frac{dV}{dy}=\frac{dA}{dy}+\frac{dB}{dy}\cdot\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dV}{dy'}=B;$$

e sostituendo nell' equazione di condizione, verrà

$$\frac{dA}{dy}+\frac{dB}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}-\left(\frac{dB}{dx}+\frac{dB}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}=o,$$

7. Abbiamo supposto nel n.° 3, col fine di cominciare a considerare il caso più semplice, che nell' integrale definito proposto

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\,.\,V,$$

che si tratta di rendere un massimo o un minimo, i limiti x_0, x_ω fossero costanti, dimodochè in tutti i cambiamenti che si poteva far subire alla curva che rappresenta la relazione di y a x, i punti estremi dovevano rimanere costantemente sopra le medesime parallele all' asse delle y. Supporremo ora questi limiti variabili. In questo caso, faremo variare la funzione

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, V$$

nella maniera più generale che sia possibile, ammettendo che tutte le ascisse x aumentino della quantità arbitraria δx, nel medesimo tempo che l' ordinata y e le sue derivate aumenteranno come sopra, delle quantità

$$\delta y, \quad \delta \frac{dy}{dx}, \quad \delta \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ ec.}$$

La curva che esprime la relazione di y a x si cangerà allora in una curva infinitamente vicina. La variazione che ne resulterà nell' integrale

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, V$$

sarà espressa da

$$-V_0 \delta x_0 + V_\omega \delta x_\omega + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \delta V.$$

Ma bisogna osservare in questo punto che, per l' effetto della variazione supposta dell' ascissa x, un punto qualunque della prima curva essendo trasportato nella curva variata, la sua ordinata diventa

$$y + \delta y.$$

Dunque, l' ordinata che corrisponde all' ascissa x nella curva variata, ha per espressione

$$y + \delta y - \left(\frac{dy}{dx} + \delta \frac{dy}{dx}\right)\delta x,$$

ovvero

$$y + \delta y - \frac{dy}{dx}\delta x,$$

trascurando le quantità del second' ordine. Si conclude da ciò che formando δV nella precedente espressione, dobbiamo considerare y come se aumentasse non di δy, ma di $\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x$. La stessa osservazione si applicherà alle funzioni derivate di y. Dobbiamo considerare $\frac{dy}{dx}$ come se avesse variato solamente di

$$\delta \frac{dy}{dx} - \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\delta x,$$

ovvero

$$\delta\,\frac{dy}{dx}-\frac{d^2y}{dx^2}\,\delta\,x.$$

Si considererà ugualmente $\frac{d^2y}{dx^2}$ come se avesse variato solamente di

$$\delta\,\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^3y}{dx^3}\,\delta\,x,$$

e così degli altri. Per conseguenza, se rappresentiamo come nel n.° 3; con N, P, Q, ec., i coefficienti differenziali parziali della funzione V presi respettivamente rapporto ad y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ec. dovremo scrivere in questo caso,

$$\delta\,V=N\left(\delta\,y-\frac{dy}{dx}\,\delta\,x\right)+P\left(\delta\,\frac{dy}{dx}-\frac{d^2y}{dx^2}\,\delta\,x\right)$$
$$+Q\left(\delta\,\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^3y}{dx^3}\,\delta\,x\right)+\text{ec.}$$

Si osserverà di più che ponendo

$$dy-\frac{dy}{dx}\,\delta\,x=du,$$

e differenziando quest' equazione, viene

$$\frac{d\,\delta\,y}{dx}-\frac{d^2y}{dx^2}\,\delta\,x-\frac{dy}{dx}\,\frac{d\,\delta\,x}{dx}=\frac{d\,\delta\,u}{dx};$$

quindi aggiongendo l' equazione identica

$$\delta\,\frac{dy}{dx}=\frac{\delta\,dy}{dx}-\frac{dy}{dx}\,\frac{\delta\,dx}{dx},$$

si trova (poichè l' ordine dei segni d e δ può cangiarsi a piacere)

$$\delta\,\frac{dy}{dx}-\frac{d^2y}{dx^2}\,\delta\,x=\frac{d\,\delta\,u}{dx}.$$

Differenziando ugualmente quest' ultima equazione, il che dà

$$\frac{d\,\delta\,\frac{dy}{dx}}{dx}-\frac{d^3y}{dx^3}\,\delta\,x-\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{d\,\delta\,x}{dx}=\frac{d^2\,\delta\,u}{dx^2};$$

quindi aggiungendo l' equazione identica

$$\delta\,\frac{d^2y}{dx^2}=\delta\,\frac{d\,\frac{dy}{dx}}{dx}=\frac{\delta\,d\,\frac{dy}{dx}}{dx}-\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{\delta\,dx}{dx},$$

si trova ugualmente

$$\delta\,\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^3y}{dx^3}\,\delta\,x=\frac{d^2\,\delta\,u}{dx^2}.$$

Si otterrà nella stessa maniera

$$\delta \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{d^4 y}{dx^4}\delta x = \frac{d^3 \delta u}{dx^3};$$

e così di seguito. Ne resulta che l'espressione precedente di δV può scriversi

$$\delta V = N\delta u + P\frac{d\delta u}{dx} + Q\frac{d^2\delta u}{dx^2} + R\frac{d^3\delta u}{dx^3} + \text{ec.}$$

L'equazione esprimente la condizione del massimo o del minimo sarà dunque

$$\left\{\begin{array}{l} -V_0\delta x_0 + V_\omega \delta x_\omega \\ + \int_{x_0}^{x_\omega} dx\left(N\delta u + P\frac{d\delta u}{dx} + Q\frac{d^2\delta u}{dx^2} + R\frac{d^3\delta u}{dx^3} + \text{ec.}\right)\end{array}\right\} = 0;$$

e operando sul secondo termine le trasformazioni indicate n.° 4, quest'equazione si cangerà in

$$\left\{\begin{array}{l} -V_0\delta x_0 - \left(P_0 - \frac{dQ_0}{dx} + \frac{d^2R_0}{dx^2} - \text{ec.}\right)\left(\delta y_0 - \frac{dy_0}{dx}\delta x_0\right) \\ -\left(Q_0 - \frac{dR_0}{dx} + \text{ec.}\right)\left(\delta\frac{dy_0}{dx} - \frac{d^2y_0}{dx^2}\delta x_0\right) - \text{ec.} \\ +V_\omega dx_\omega + \left(P_\omega - \frac{dQ_\omega}{dx} + \frac{d^2R_\omega}{dx^2} - \text{ec.}\right)\left(\delta y_\omega - \frac{dy_\omega}{dx}\delta x_\omega\right) \\ +\left(Q_\omega - \frac{dR_\omega}{dx} + \text{ec.}\right)\left(\delta\frac{dy_\omega}{dx} - \frac{d^2y_\omega}{dx^2}\delta x_\omega\right) + \text{ec.} \\ + \int_{x_0}^{x_\omega} dx\left[N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{ec.}\right]\left(\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x\right)\end{array}\right\} = 0.$$

Paragonando questo resultamento a quello del n.° 4, si vede in primo luogo che in questo punto siamo condotti alla medesima equazione indefinita

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{ec.},$$

la quale deve sussistere per tutti i punti dell'curva. Quanto all'equazioni determinate, esse differiscono da quelle che sono scritte n.° 5, mediante l'introduzione dei termini $-V_0\delta x_0$ e $V_\omega \delta x_\omega$; e poichè invece della quantità δy_0 e δy_ω vi è stato messo

$$\delta y_0 - \frac{dy_0}{dx}\delta x_0, \quad \text{e} \quad \delta y_\omega - \frac{dy}{dx}\delta x_\omega;$$

e in luogo delle quantità $\delta\frac{dy_0}{dx}$ e $\delta\frac{dy_\omega}{dx}$ è stato sostituito con

$$\delta\frac{dy_0}{dx} - \frac{d^2y_0}{dx^2}\delta x_0,$$

e

$$\delta \frac{dy_\omega}{dx} - \frac{d^2y_\omega}{dx^2}\delta x_\omega ;$$

e così di seguito. Se le variazioni

$$\delta x_0,\ \delta y_0,\ \delta \frac{dy_0}{dx},\ \text{ec.}$$

e

$$\delta x_\omega,\ \delta y_\omega,\ \delta \frac{dy_\omega}{dx},\ \text{ec.},$$

sono arbitrarie, il coefficiente di ciascuna di queste variazioni dev' essere uguagliato separatamente a zero, il che darà tante equazioni distinte alle quali l'espressione cercata di y in x deve soddisfare quando si dà ad x i valori estremi x_0 ed x_ω. Se alcune delle quantità

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \text{ec.},$$

hanno dei valori determinati per l' uno o l' altro dei punti estremi della curva, i termini affetti dalle variazioni di queste quantità spariscono da se stessi, e dobbiamo oguagliare solamente a zero i termini affetti dall' altre variazioni. D' altra parte bisogna osservare che se la posizione dei punti estremi è interamente arbitraria, ciascuno di questi punti può essere situato dove vogliamo sul piano della curva, senza che perciò essa cessi di soddisfare alla condizione del massimo o minimo dell' integrale definito proposto. Dunque siamo allora in facoltà di supporre

$$\delta x_0 = 0 \quad \text{e} \quad \delta y_0 = 0$$

e, per conseguenza, di non porre l' equazioni che esprimono l' uguaglianza a zero dei coefficienti dai quali queste due variazioni sono affette nell' equazione precedente; dimodochè nel caso di cui si tratta, si hanno due equazioni almeno per la determinazione delle costanti.

8. Dobbiamo osservare che la funzione indicata da V nell' integrale definito

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \text{V},$$

che si tratta di rendere un massimo o un minimo potrebbe contenere una o più quantità

$$x_0,\ y_0,\ \frac{dy_0}{dx},\ \frac{d^2y_0}{dx^2},\ \text{ec.},$$

ovvero

$$x_\omega,\ y_\omega,\ \frac{dy_\omega}{dx},\ \frac{d^2y_\omega}{dx^2},\ \text{ec.},$$

le quali appartenessero ai punti estremi della curva. Se ne vede un esempio nella questione della brachistocrona citata al n.° 1, dove la funzione sotto il segno d' integrazione contiene l' ascissa del primo di questi punti. Si deve in questo caso, formando la variazione δ V, far variare le quantità di cui si tratta, se i loro valori non sono costanti in virtù dell' enunciato della questione.

Se, per esempio, V, contenesse x_0 e che la variazione di V presa rapporto a questa quantità fosse $\mu \delta x_0$ l' espressione di δV del n.° 7 dovrebbe essere aumentata del termine $\mu \delta x_0$. Dunque il termine affetto dal segno d' integrazione nell' equazione che esprime la condizione del massimo o del minimo dovrebbe essere aumentata della quantità

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \mu \delta x_0 ,$$

ovvero

$$\delta x_0 \int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \mu .$$

Ne segue che si dovrebbe aggiungere questa quantità al secondo membro di quella fra l' equazioni determinate che si riferisce al primo limite, dimodochè il termine affetto da δx_0 in quest' equazione diventerebbe

$$\left(-V_0 + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \mu\right) \delta x_0 .$$

Si avrebbe riguardo nella stessa maniera alla variazione dell' altre funzioni di cui si tratta, se esse entrassero nella composizione della funzione V.

9. Fin qui abbiamo considerato il caso in cui si aveva una sola variabile indipendente x, e una funzione y dipendente da questa variabile, come ciò segue nei problemi che si riferiscono ad una curva piana. Nelle questioni relative ad una curva a doppia curvatura, bisogna considerare una variabile indipendente x, e due funzioni y e z, le quali dipendono da questa variabile.

L' integrale definito che si tratta di rendere un massimo essendo sempre

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, V ,$$

la funzione V contiene allora in generale, oltre la variabile x, le funzioni

$$y ,\ \frac{dy}{dx} ,\ \frac{d^2y}{dx^2} ,\ \frac{d^3y}{dx^3} ,\ \text{ec.}$$

e

$$z ,\ \frac{dz}{dx} ,\ \frac{d^2z}{dx^2} ,\ \frac{d^3z}{dx^3} ,\ \text{ec.},$$

Prima di tutto supponiamo, i limiti x_0 ed x_ω dell' integrale costanti. La variazione di quest' integrale è

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \,.\, \delta V .$$

Ammettiamo che differenziando la funzione V rapporto alle quantità y e z e alle loro funzioni derivate, e indicando le differenziali con δ, si trovi

$$\delta V = \left\{ \begin{array}{l} N \delta y + P \delta \frac{dy}{dx} + Q \delta \frac{d^2y}{dx^2} + R \delta \frac{d^3y}{dx^3} + \text{ec.} \\ + n \delta z + p \delta \frac{dz}{dx} + q \delta \frac{d^2z}{dx^2} + r \delta \frac{d^3z}{dx^3} + \text{ec.} \end{array} \right\} ;$$

l' equazione esprimente la condizione del massimo o minimo dell' integrale definito proposto sarà

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \left\{ \begin{array}{l} N\delta y + P\delta \frac{dy}{dx} + Q\delta \frac{d^2y}{dx^2} + R\delta \frac{d^3y}{dx^3} + \text{ec.} \\ + n\delta z + p\delta \frac{dz}{dx} + q\delta \frac{d^2z}{dx^2} + r\delta \frac{d^3z}{dx^3} + \text{ec.} \end{array} \right\} = 0.$$

Applicando dunque a quest' equazione l' analisi esposta n.° 4, si vedrà come nei numeri 5 e 6: che si deve avere per tutti i punti della curva l' equazione indefinita

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{ec.}\right)\delta y \\ + \left(n - \frac{dp}{dx} + \frac{d^2q}{dx^2} - \frac{d^3r}{dx^3} + \text{ec.}\right)\delta z \end{array} \right\} = 0$$

la quale, se le variazioni δy e δz sono interamente indipendenti l' una dall' altra, dà le due equazioni distinte

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{ec.} = 0,$$

$$n - \frac{dp}{dx} + \frac{d^2q}{dx^2} - \frac{d^3r}{dx^3} + \text{ec.} = 0.$$

2.° Che si ha ugualmente per i punti estremi della curva le seguenti equazioni determinate, cioè: per il primo punto

$$\left(\begin{array}{l} \left(P_0 - \frac{dQ_0}{dx} + \frac{d^2R_0}{dx^2} - \text{ec.}\right)\delta y_0 + \left(Q_0 - \frac{dR_0}{dx} + \text{ec.}\right)\delta \frac{dy_0}{dx} \\ + \left(R_0 - \text{ec.}\right)\delta \frac{d^2y_0}{dx^2} + \text{ec.} \\ \left(p_0 - \frac{dq_0}{dx} + \frac{d^2r_0}{dx^2} - \text{ec.}\right)\delta z_0 + \left(q_0 - \frac{dr_0}{dx} + \text{ec.}\right)\delta \frac{dz_0}{dx} \\ + \left(r_0 - \text{ec.}\right)\delta \frac{d^2z_0}{dx^2} + \text{ec.} \end{array} \right) = 0;$$

e per il secondo punto

$$\left(\begin{array}{l} \left(P_\omega - \frac{dQ_\omega}{dx} + \text{ec.}\right)\delta y_\omega + \left(Q_\omega - \frac{dR_\omega}{dx} + \text{ec.}\right)\delta \frac{dy_\omega}{dx} \\ + \left(R - \text{ec.}\right)\delta \frac{d^2y_\omega}{dx^2} + \text{ec.} \\ + \left(p_\omega - \frac{dq_\omega}{dx} + \text{ec.}\right)\delta z_\omega + \left(q_\omega - \frac{dr_\omega}{dx} + \text{ec.}\right)\delta \frac{dz_\omega}{dx} \\ + \left(r_\omega - \text{ec.}\right)\delta \frac{d^2y_\omega}{dx^2} + \text{ec.} \end{array} \right) = 0.$$

Si debbono applicare a queste due equazioni le osservazioni fatte n.° 8, relativamente alle condizioni che possono essere date per le estremità della curva.

Dobbiamo ugualmente applicare al caso di cui si tratta, le osservazioni fatte n.° 8, relativamente alla necessità di tener conto nell' espressione di δV delle variazioni delle quantità relative ai limiti, quando queste quantità sono variabili e entrano nella composizione della funzione V.

E facile l' estendere quest' analisi ai casi in cui si avesse un maggior numero di funzioni dipendenti dalla variabile x.

10. In questo punto possiamo osservare, come nel n.° 6, che l' equazioni

$$N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\text{ec.}=0$$

$$n-\frac{dp}{dx}+\frac{d^2q}{dx^2}-\frac{d^3r}{dx^3}+\text{ec.}=0,$$

Si possono scrivere come segue, cioè:

$$\frac{dV}{dy}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dV}{dy''}\right)-\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dV}{dy'''}\right)+\text{ec.}=0$$

$$\frac{dV}{dz}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dz'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dV}{dz''}\right)-\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dV}{dz'''}\right)+\text{ec.}=0,$$

mettendo

$$y',\ y'',\ y'',\ \text{ec.},$$

in luogo di

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \text{ec.},$$

e

$$z',\ z'',\ z''',\ \text{ec.},$$

in luogo di

$$\frac{dz}{dx},\ \frac{d^2z}{dx^2},\ \frac{d^3z}{dx^3},\ \text{ec.},$$

che esprimono le condizioni necessarie perchè la funzione Vdx sia una differenziale esatta.

Nel caso in cui questa funzione fosse del prim' ordine, quest' equazioni si riducono a

$$\frac{dV}{dy}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dy'}\right)=0,$$

$$\frac{dV}{dz}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dz'}\right)=0.$$

Si comincerebbe dal concludere, come nel n.° citato, che la funzione di cui si tratta deve, per essere una differenziale esatta, essere della forma

$$\left(A+By'+Cz'\right)dx,$$

vale a dire

$$Adx+Bdy+Cdz,$$

A, B, C indicando delle funzioni le quali non contengono che x, y, e z. Questa

funzione darebbe dunque

$$\frac{dV}{dy}=\frac{dA}{dy}+\frac{dB}{dy}y'+\frac{dC}{dy}z',$$

$$\frac{dV}{dy'}=B,$$

$$\frac{dV}{dz}=\frac{dA}{dz}+\frac{dB}{dz}y'+\frac{dC}{dz}z',$$

$$\frac{dV}{dz'}=C;$$

e sostituendo nell' equazioni di condizione si troverebbe

$$\frac{dA}{dy}+\frac{dB}{dy}y'+\frac{dC}{dy}z'-\left(\frac{dB}{dx}+\frac{dB}{dy}y'+\frac{dB}{dz}z'\right)=0,$$

$$\frac{dA}{dz}+\frac{dB}{dz}y'+\frac{dC}{dz}z'-\left(\frac{dC}{dx}+\frac{dC}{dy}y'+\frac{dC}{dx}z'\right)=0;$$

ovvero

$$\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}-\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)z'=0,$$

$$\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}+\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)y'=0.$$

Siccome quest' equazioni non debbono determinare y' e z' poichè y e z sono funzioni qualunque di x, se ne concludono le tre equazioni distinte

$$\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}=0,$$

$$\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}=0,$$

$$\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}=0,$$

conformemente a quanto si è veduto nel calcolo delle differenze.

11. Se ora si ammette, come nel n.° 7, che i limiti x_0 e x_ω dell' integrale definito proposto possano variare, sarà necessario di far variare l' ascissa x. Si riconoscerà che le variazioni delle coordinate corrispondenti a quest' ascissa non sono più allora δy e δz, ma

$$\delta y-\frac{dy}{dx}\delta x$$

e

$$\delta z-\frac{dz}{dx}\delta x.$$

Per conseguenza, l' equazione indefinita che deve sussistere per tutti i punti

della curva diventa

$$\left\{\begin{array}{l}\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+ec.\right)\left(\delta y-\frac{dy}{dx}\delta x\right)\\+\left(n-\frac{dp}{dx}+\frac{d^2q}{dx^2}-\frac{d^3r}{dx^3}+ec.\right)\left(\delta z-\frac{dz}{dx}\delta x\right)\end{array}\right\}=o;$$

e se le variazioni δx, δy, δz sono interamente indipendenti le une dall'altre, avremo come sopra l'equazioni distinte

$$N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+ec.=o,$$

$$n-\frac{dp}{dx}+\frac{d^2q}{dx^2}-\frac{d^3r}{dx^3}+ec.=o.$$

Riguardo all'equazioni determinate si vedrà ugualmente che siamo bbligati di aggiungere al secondo membro dell'equazione relativa al primo mite, il termine $-V_0\delta x_0$; e di porre invece di δy_0 e δz_0

$$\delta y_0-\frac{dy_0}{dx}\delta x_0 \quad e \quad \delta z_0-\frac{dz_0}{dx}\delta x_0$$

e invece di $\delta\frac{dy_0}{dx}$ e $\delta\frac{dz_0}{dx}$

$$\delta\frac{dy_0}{dx}-\frac{d^2y_0}{dx^2}\delta x_0 \quad e \quad \delta\frac{dz_0}{dx}-\frac{d^2z_0}{dx^2}\delta x_0,$$

e così di seguito. Si aggiungerà ugualmente all'equazione determinata relativa al secondo limite, il termine $V_\omega\delta_\omega$; e si metterà invece di δy_ω e δz_ω

$$\delta y-\frac{dy_\omega}{dx}\delta y_\omega \quad e \quad \delta z-\frac{dz_\omega}{dx}\delta x_\omega,$$

e invece di

$$\delta\frac{dy_\omega}{dx} \quad e \quad \delta\frac{dz_\omega}{dx}$$

$$\delta\frac{dy_\omega}{dx}-\frac{d^2y_\omega}{dx^2}\delta x_\omega \quad e \quad \delta\frac{dz_\omega}{dx}-\frac{d^2z_\omega}{dx^2}\delta x_\omega,$$

e così di seguito.

12. Nell'equazioni che si riferiscono alle superficie, per esempio nella ricerca della superficie che, terminandosi ad un perimetro dato avrebbe la più piccola area possibile, dobbiamo considerare due variabili indipendenti x, y, e una funzione z dipendente da queste variabili. Si tratta allora di esprimere le condizioni del massimo o minimo di un integrale doppio come

$$\int_{x_0}^{x_\omega}dx\int_{y_0}^{y_\omega}dy\,.\,V,$$

nella quale V può contenere in generale le variabili indipendenti x, y, come

pure la funzione z e le sue derivate

$$\frac{dz}{dx},\quad \frac{dz}{dy},\quad \frac{d^2z}{dx^2},\quad \frac{d^2z}{dxdy},\quad \frac{d^2z}{dy^2},\quad \text{ec.}$$

Considereremo solamente il caso in cui la projezione sul piano delle x y del perimetro al quale si termina la superficie è un rettangolo i cui lati sono respettivamente paralleli agli assi delle x e delle y. I limiti x_0, x_ω indicano le ascisse estreme; i limiti y_0 e y_ω indicano ugualmente le ordinate estreme. Di più, supporremo che questi limiti abbiano dei valori dati e invariabili; dimodochè il perimetro della porzione di superficie di cui si tratta abbia sempre per projezione i lati del rettangolo. Allora non sarà necessario di far variare le ascisse x ed y. La variazione dell' integrale definito proposto sarà

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \,.\, \delta V,$$

e se si suppone

$$\delta V = L\,\delta z + M\,\delta\frac{dz}{dx} + N\,\delta\frac{dz}{dy} + P\,\delta\frac{d^2z}{dx^2}$$
$$+ Q\,\delta\frac{d^2z}{dxdy} + R\,\delta\frac{d^2z}{dx^2} + \text{ec.}$$

avremo, per esprimere la condizione del massimo o del minimo di quest' integrale, l' equazione

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \Big[L\,\delta z + M\,\delta\frac{dz}{dx} + N\,\delta\frac{dz}{dy}$$
$$+ P\,\delta\frac{d^2z}{dx^2} + Q\,\delta\frac{d^2z}{dxdy} + R\,\delta\frac{d^2z}{dx^2} + \text{ec.}\Big] = 0.$$

13. Applicando dunque le regole del calcolo delle variazioni come si è fatto n.° 4, vale a dire facendo passare nei termini compresi sotto il doppio segno d' integrazione il d davanti il δ, e integrando per parti, si trasformeranno questi termini nella seguente maniera

$$1.^\circ \int\!\!\int dxdy\, M\,\frac{d\,\delta z}{dx} = \int dy \,.\, M\delta z - \int\!\!\int dxdy\,\frac{dM}{dx}\,\delta z + \text{cost.};$$

e per conseguenza

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \,.\, M\,\frac{d\,\delta z}{dx} = -\int_{y_0}^{y_\omega} dy \Big(M\,\delta z\Big)_{(x_0)} + \int_{y_0}^{y_\omega} dy \Big(M\,\delta z\Big)_{(x_\omega)}$$
$$- \int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy\,\frac{dM}{dx}\,\delta z.$$

I segni (x_0), (x_ω) messi al basso delle parentesi, indicano che nelle quantità contenute in queste parentesi, si danno ad x i valori

$$x = x_0,\quad x = x_\omega,$$

vale a dire che queste quantità hanno i valori che convengono ai limiti della superficie rapporto al piano delle y z.

La medesima trasformazione dà

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \,.\, \mathrm{N}\frac{d\,\delta z}{dy} = -\int_{x_0}^{x_\omega} dx\left(\mathrm{N}\,\delta z\right)_{(y_0)} + \int_{x_0}^{x_\omega} dx\left(\mathrm{N}\,\delta z\right)_{(y_\omega)}$$

$$-\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \frac{d\mathrm{N}}{dy}\,\delta z.$$

I segni (y_0), (y_ω) indicando che le quantità contenute nelle parentesi hanno i valori che convengono ai limiti della superficie paralleli al piano delle x, z.

$$2.^\circ \int\int dx dy \mathrm{P}\frac{d^2\delta z}{dx^2} = \int dy \mathrm{P}\,\delta \cdot \frac{dz}{dx} - \int dy \frac{d\mathrm{P}}{dx}\,\delta z$$

$$+\int\int dx dy \frac{d^2\mathrm{P}}{dx^2}\,\delta z + \text{cost.},$$

donde

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \mathrm{P}\frac{d^2\delta z}{dx^2} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} -\int_{y_0}^{y_\omega} dy\left(\mathrm{P}\,\delta\frac{dz}{dx}\right)_{(x_0)} + \int_{y_0}^{y_\omega} dy\left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\right)_{(x_0)} \\ +\int_{y_0}^{y_\omega} dy\left(\mathrm{P}\,\delta\frac{dz}{dx}\right)_{(x_\omega)} - \int_{y_0}^{y_\omega} dy\left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\,\delta z\right)_{(x_\omega)} \\ +\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \frac{d^2\mathrm{P}}{dx^2}\,\delta z \end{array}\right\}$$

$$3.^\circ \int\int dx dy \mathrm{Q}\frac{d^2\delta z}{dx dy}$$

$$= \int dx \,.\, \mathrm{Q}\frac{d\,\delta z}{dx} - \int dx \int dy \frac{d\mathrm{Q}}{dy}\frac{d\,\delta z}{dx} + \text{cost.}$$

$$= \int dx \,.\, \mathrm{Q}\frac{d\,\delta z}{dx} - \int dy \frac{d\mathrm{Q}}{dy}\,\delta z + \int\int dx dy \frac{d^2\mathrm{Q}}{dx dy}\,\delta z + \text{cost.};$$

e per conseguenza

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \mathrm{Q}\frac{d^2\delta z}{dx dy} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} -\int_{x_0}^{x_\omega} dx\left(\mathrm{Q}\frac{d\,\delta z}{dx}\right)_{(y_0)} - \int_{y_0}^{y_\omega} dy\left(\frac{d\mathrm{Q}}{dy}\,\delta z\right)_{(x_0)} \\ +\int_{x_0}^{x_\omega} dx\left(\mathrm{Q}\frac{d\,\delta z}{dx}\right)_{(y_\omega)} - \int_{y_0}^{y_\omega} dy\left(\frac{d\mathrm{Q}}{dy}\,\delta z\right)_{(x_\omega)} \\ +\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \frac{d^2\mathrm{Q}}{dx dy}\,\delta z \end{array}\right\}.$$

Ma si ha

$$\int dx Q \frac{d\,\delta z}{dx} = Q dz - \int dx \frac{dQ}{dx} \delta z + \text{cost.}$$

Così l' espressione precedente può cangiarsi in

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy\, Q \frac{d^2 \delta z}{dx dy} =$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\left(Q\delta z\right)_{(x_0, y_0)} + \left(Q\delta z\right)_{(x_\omega, y_0)} - \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(\frac{dQ}{dx}\delta z\right)_{(y_0)} \\
&+ \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{dQ}{dy}\delta z\right)_{(x_0)} \\
&- \left(Q\delta z\right)_{(x_0, y_\omega)} + \left(Q\delta z\right)_{(x_\omega, y_\omega)} + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left(\frac{dQ}{dx}\delta z\right)_{(y_\omega)} \\
&- \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(\frac{dQ}{dy}\delta z\right)_{(x_\omega)} + \int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \frac{d^2 Q}{dx dy} \delta z
\end{aligned}\right\}.$$

Il termine seguente contenente R subirà la stessa trasformazione che il termine contenente P: basta cambiare in quest' ultimo caso x in y.

Sostituendo questi valori nell' equazione che esprime la condizione del massimo o minimo, essa diventerà

$$\left\{\begin{aligned}
&\left(Q\delta z\right)_{(x_0, y_0)} - \left(Q\delta z\right)_{(x_\omega, y_0)} - \left(Q\delta z\right)_{(x_0, y_\omega)} + \left(Q\delta z\right)_{(x_\omega, y_\omega)} \\
&- \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left[\left(M - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} + \text{ec.}\right)\delta z + \left(P - \text{ec.}\right)\delta \frac{dz}{dx} + \text{ec.}\right]_{(x_0)} \\
&+ \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left[\left(M - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} + \text{ec.}\right)\delta z + \left(P - \text{ec.}\right)\delta \frac{dz}{dx} + \text{ec.}\right]_{(x_\omega)} \\
&- \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left[\left(N - \frac{dQ}{dx} - \frac{dR}{dy} + \text{ec.}\right)\delta z + \left(R - \text{ec.}\right)\delta \frac{dz}{dy} + \text{ec.}\right]_{(y_0)} \\
&+ \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left[\left(N - \frac{dQ}{dx} - \frac{dR}{dy} + \text{ec.}\right)\delta z + \left(R - \text{ec.}\right)\delta \frac{dz}{dy} + \text{ec.}\right]_{(y_\omega)} \\
&+ \int_{x_0}^{x_\omega} \int_{y_0}^{y_\omega} dy \left(L - \frac{dM}{dx} - \frac{dN}{dy} + \frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dx dy} + \frac{d^2R}{dy^2} - \text{ec.}\right)\delta z
\end{aligned}\right\}$$

$$= o.$$

Quest' equazione deve sussistere per tutti i valori che possano essere attribuiti alle variazioni delle coordinate dei punti interni o dei punti appartenenti ai limiti.

24. Avremo dunque in primo luogo, l' equazione indefinita

$$L - \frac{dM}{dx} - \frac{dN}{dy} + \frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2R}{dx dy} + \frac{d^2R}{dy^2} + \text{ec.} = o,$$

che dev' essere soddisfatta per tutti i valori delle coordinate comprese tra i limiti.

15. Vediamo in secondo luogo che dobbiamo porre

$$\left(Q\,\delta z\right)_{(x_0,y_0)}-\left(Q\,\delta z\right)_{(x_\omega,y_0)}-\left(Q\,\delta z\right)_{(x_0,y_\omega)}+\left(Q\,\delta z\right)_{(x_\omega,y_\omega)}=0,$$

dimodochè se le variazioni δz dell'ordinata ai quattro vertici del rettangolo, projezione della superficie, sono arbitrari, bisognerà che Q sia nullo per i valori delle coordinate che appartengono a questi punti.

Di più abbiamo l' equazione

$$\left(M-\frac{dP}{dx}-\frac{dQ}{dy}+\text{ec.}\right)\delta x+\left(P-\text{ec.}\right)\delta\frac{dz}{dx}+\text{ec.}=0,$$

la quale deve sussistere per tutti i valori appartenenti ai punti situati sopra i limiti della superficie, paralleli alle yz; e finalmente l' equazione

$$\left(N-\frac{dQ}{dx}-\frac{dR}{dy}+\text{ec.}\right)\delta z+\left(R-\text{ec.}\right)\delta\frac{dz}{dy}+\text{ec.}=0,$$

la quale deve sussistere per tutti i valori appartenenti ai punti situati sopra i limiti paralleli alle yz. Se le variazioni

$$\delta z,\quad \delta\frac{dz}{dx},\quad \delta\frac{dz}{dy},\quad \text{ec.},$$

sono arbitrarie, ciascun termine di quest' equazioni dev' essere uguagliato separatamente a zero.

Casi in cui esistono delle relazioni date tra le variabili.

16. Abbiamo generalmente supposto in ciò che precede che anticipatamente non esistessero relazioni date tra le quantità che entrano nell' espressione della funzione V. Ciò non ostante la natura della questione stabilisce molto spesso delle condizioni alle quali è necessario di aver riguardo, nello stesso tempo che si soddisfà alla condizione del massimo o minimo dell' integrale definito proposto. L' effetto delle condizioni di cui si tratta, è di ristringere l' estensione dei valori che possano essere attribuiti alle variazioni affette dal segno δ.

Se per esempio, il valore dell' integrale definito proposto dipende dalla figura di una curva, può succedere che i punti estremi di questa curva sieno soggetti a trovarsi sopra due linee date, che abbiano per equazioni

$$y=\varphi(x),\quad y=\psi(x).$$

Le variazioni δx_0 e δy_0 delle coordinate del primo punto, e le variazioni δx_ω e δy_ω delle coordinate dell' ultimo punto, dovranno allora avere tra loro i rapporti convenienti perchè esse possano soddisfare respettivamente a queste equazioni. Avremo dunque in questo caso

$$\delta y_0=\frac{d\,.\,\varphi(x_0)}{dx}\delta x_0,$$

e

$$\delta y_{\omega} = \frac{d \cdot \psi(x_{\omega})}{dx} \delta x_{\omega},$$

equazioni che dovrebbero sussistere nello stesso tempo che l' equazioni determinate ottenute conformemente a ciò che abbiamo detto nei numeri 5 e 7.

Se di più la direzione della tangente all' estremità della curva cercata doveva accordarsi ancora con la direzione della tangente delle curve che hanno per equazioni

$$y = \varphi(x), \quad y = \psi(x),$$

si avrebbero ancora l' equazioni

$$\delta \frac{dy_{0}}{dx} = \frac{d^2 \cdot \varphi(x_0)}{dx^2} \delta x_0,$$

e

$$\delta \frac{dy_{\omega}}{dx} = \frac{d^2 \cdot \psi(x_{\omega})}{dx^2} \delta x_{\omega}.$$

E così di seguito per le altre funzioni differenziali. Per mezzo di queste *equazioni di condizione*, si eliminerebbe una parte delle variazioni che si troverebbero nell' equazioni determinate. Dopo quest' eliminazione, le variazioni che restano in quest' equazioni trovandosi interamente arbitrarie, si eguaglierebbe separatamente a zero ciascuno dei loro coefficienti.

17. Alcune volte esistono dell' equazioni di condizione che debbono sussistere per tutti i valori delle variabili comprese nei limiti dell' integrale definito proposto. Per esempio, se si domanda di tracciare sopra una superficie data, la linea la più corta tra due punti presi sopra questa superficie, è evidente che indicando la sua equazione con

$$F\left(x, y, z\right) = 0,$$

l' ordinata della linea cercata deve sempre soddisfare a quest' equazione. In un caso simile, le variazioni delle quantità che entrano nella funzione V essendo ristrette dalla condizione che i valori di queste quantità soddisfacciano all' equazione data, quest' equazione deve sussistere quando ci si mette queste quantità per i loro valori aumentati da questa variazione. Si può dunque differenziare l' equazione proposta rapporto alle quantità di cui si tratta, indicando le differenziali con δ. Così

$$L = 0,$$

essendo in generale un' equazione di condizione, nella quale L indica una funzione qualunque delle variabili indipendenti, funzioni dipendenti da queste variabili e dalle loro funzioni derivate, si formerà l' equazione

$$\delta L = 0,$$

δ indicando una differenziale applicata rapporto a tutte queste quantità. Quest' equazione servirà ad eliminare una delle variazioni che si troveranno nell' equazione indefinita che si forma uguagliando a zero il termine che rimane

sotto il segno d' integrazione nell' equazione generale che esprime la condizione del massimo o minimo.

Seguirebbe lo stesso se esistessero altre equazioni di condizione

$$\mathrm{M}=0,\quad \mathrm{N}=0,\quad \text{ec.},$$

analoghe alla precedente. Si formerebbero ugualmente l' equazioni

$$\delta\mathrm{M}=0,\quad \delta\mathrm{N}=0,\quad \text{ec.},$$

che si riunirebbero all' equazione indefinita della quale abbiamo parlato, col fine di eliminare tante variazioni quante fosse possibile. I coefficienti delle rimanenti variazioni sarebbero quindi ugagliati a zero separatamente.

18. In altre questioni il massimo o minimo cercato non deve aver luogo fintantochè un certo integrale definito conservi un valore determinato. Questo è ciò che si chiama massimo o minimo *relativo*. La ricerca della curva che con un perimetro dato, racchiude l' area la più grande o la minima possibile, è di questo genere. Si tratta dunque di rendere l' integrale

$$\int_{x_0}^{x\,\omega} dx\,.\,\mathrm{V},$$

il più grande o il minimo possibile, nello stesso tempo che si ha l' equazione

$$\int_{x_0}^{x\,\omega} dx\,.\,u=\text{cost.},$$

u essendo, come V, una funzione di

$$x,\quad y,\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \text{ec.}$$

Le condizioni del problema danno le due equazioni

$$\delta\int_{x_0}^{x\,\omega} dx\,.\,\mathrm{V}=0,$$

e

$$\delta\int_{x_0}^{x\,\omega} dx\,.\,u=0.$$

Ora, l' espressione di queste condizioni non sarà alterata se si aggiunge la seconda equazione alla prima, dopo averla moltiplicata per una costante arbitraria a. Possiamo dunque scrivere

$$\delta\int_{x_0}^{x\,\omega} dx\,.\,\mathrm{V}+a\,\delta\int_{x_0}^{x\,\omega} dx\,.\,u=0,$$

ovvero

$$\delta\int_{x_0}^{x\,\omega} dx\,.\left(\mathrm{V}+au\right)=0.$$

Si tratterà quest' ultima equazione secondo le regole esposte sopra, come se

si volesse rendere un massimo o un minimo assoluto la funzione

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\left(\mathrm{V}+au\right).$$

Infatti, la relazione tra y e z che renderà questa funzione un massimo ovvero un minimo assoluto, soddisfà evidentemente alla condizione di rendere

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\,.\,\mathrm{V}$$

un massimo o un minimo per il caso in cui

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\,.\,u$$

prenda un valore dato; poichè se fosse diversamente, vi sarebbero dunque dei valori della somma delle due funzioni che sarebbero, più grandi o minori dei valori dati per il massimo o minimo assoluto, il che è impossibile. La costante a si determina in modo da dare all'integrale

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\,.\,u$$

il valore che si è fissato in ciascun caso particolare.

Esempii d'applicazione del calcolo delle variazioni.

19. In primo luogo si proporrà di determinare la linea la più corta che possa essere tracciata tra due linee curve date. Le coordinate della linea cercata essendo rappresentate da x, y, z, si tratta dunque di rendere un minimo la funzione

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\,.\,\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

i limiti x_0, x_ω essendo variabili. Applicando a quest'espressione ciò che è stato detto nei n.i 10 e 11, si comincerà dal vedere che si hanno le due equazioni indefinite

$$\frac{d}{dx}\,.\left\{\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}\right\}=0,$$

$$\frac{dz}{dx}\,.\left\{\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}\right\}=0,$$

donde resulta

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=costante,$$

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=costante.$$

Da ciò si conclude che i coefficienti differenziali

$$\frac{dy}{dx},\quad \frac{dz}{dx}$$

debbono avere dei valori costanti, proprietà la quale non appartiene che alla linea retta. Ponendo dunque

$$\frac{dy}{dx}=b,\quad \frac{dz}{dx}=c,$$

avremo

$$y=bx+m,$$
$$z=cx+n,$$

per l' equazioni della linea cercata, b, c, m ed n essendo costanti arbitrarie.

Rigoardo alle condizioni relative ai limiti, l' equazione determinata appartenente al primo ponto della linea cercata è in questo caso

$$-\sqrt{1+\left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz_0}{dx}\right)^2}\,.\,\delta x_0-\frac{\frac{dy_0}{dx}\left(\delta y_0-\frac{dy_0}{dx}\delta x_0\right)+\frac{dz_0}{dx}\left(\delta z_0+\frac{dz_0}{dx}\delta x_0\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz_0}{dx}\right)^2}}=0,$$

la quale si riduce a

$$\delta x_0+\frac{dy_0}{dx}\delta y_0+\frac{dz_0}{dx}\delta z_0=0.$$

Osserviamo che in quest' equazione

$$\delta x_0,\quad \delta y_0,\quad \delta z_0$$

rappresentano respettivamente le projezioni sopra gli assi delle x, delle y e delle z, mediante gli spostamenti che possono essere attribuiti al primo punto di questa linea. Ora, mediante la supposizione, questo punto deve in questo caso trovarsi costantemente sopra la prima delle due curve tra le quali la linea

della più corta distanza dev'essere tracciata. Dunque le variazioni

$$\delta x_0, \ \delta y_0, \ \delta z_0$$

possano considerarsi come le projezioni sopra gli assi dell'elemento di questa curva, vicino al primo punto di cui si tratta. Donde si conclude che la precedente equazione esprime la condizione che la linea della più corta distanza dev'essere perpendicolare a quest'elemento.

Otterremo una simile equazione per l'altra estremità della linea cercata. La linea più corta è dunque una retta perpendicolare alle due curve tra le quali essa è tracciata.

Ci troveremmo condotti ad un simile resultamento se la linea della più corta distanza dovesse esser condotta tra due superficie curve date. Le variazioni

$$\delta x_0, \ \delta y_0, \ \delta z_0$$

della precedente equazione dovrebbero allora essere considerate come esprimenti le projezioni sopra gli assi di un elemento lineare qualunque tracciato a partire dal primo punto di questa linea sopra la superficie curva. Quest'equazione esprimerebbe dunque che la linea della più corta distanza dev'essere perpendicolare alla superficie.

Seguirebbe ancora lo stesso se la linea della più corta distanza dovesse essere tracciata tra una curva e una superficie curva data, essa dovrebbe sempre incontrare l'una e l'altra ad angolo retto.

20. Ammettiamo ora che la linea la più corta dev'essere tracciata sopra una superficie data. L'integrale che si tratta di rendere un minimo essendo sempre

$$\int_{x_0}^{x\omega} dx \, . \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

si deve conformemente al n.° 11, porre in primo luogo [scrivendo per abbreviare V invece di

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\Bigg],$$

l'equazione indefinita

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dy}{dx}\right)\left(\delta y-\frac{dy}{dx}\delta x\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dz}{dx}\right)\left(\delta z-\frac{dz}{dx}\delta x\right)=0;$$

e le variazioni

$$\delta x, \ \delta y, \ \delta z$$

sono soggette a soddisfare all'equazione della superficie che rappresentiamo con

$$z=F\left(x,y\right).$$

Si ha dunque tra queste variazioni l'equazione di condizione

$$\delta z=\frac{dF}{dx}\delta x+\frac{dF}{dy}\delta y;$$

a se, dopo aver messo in luogo di δz questo valore nell' equazione precedente, si oguagliano separatamente a zero i coefficienti di δy e δx, che rimangono indeterminati, verrà

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dy}{dx}\right)+\frac{dF}{dy}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dz}{dx}\right)=0,$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dx}-\frac{dF}{dx}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dz}{dx}\right)=0.$$

La linea cercata essendo tracciata sopra la superficie la cui equazione è

$$z=F\left(x,\,y\right),$$

gli elementi

$$dx,\quad dy,\quad dz$$

delle coordinate dei punti di questa linea debbono soddisfare a quest'equazione, dimodochè si ha

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\,\frac{dy}{dx}.$$

Questo valore, sostituito nella seconda delle due equazioni di sopra, la rende identica con la prima, come ciò dev' essere.

Questa prima equazione determina la natura della linea della più corta distanza che è l' oggetto della questione: essa ne esprime una proprietà geometrica la quale consiste nel far conoscere che il suo piano osculatore è costantemente perpendicolare alla superficie sopra la quale questa linea è tracciata.

Infatti, l' equazione del piano osculatore essendo

$$z=\frac{\left(\frac{dz}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2z}{dx^2}\right)x+\frac{d^2y}{dx^2}\,y}{\frac{d^2y}{dx^2}}+C;$$

e l' equazione del piano tangente alla superficie la cui equazione è

$$z=F\left(x,\,y\right)$$

essendo

$$z=\frac{dF}{dx}\cdot x+\frac{dF}{dy}\cdot y+K,$$

C e K indicando delle costanti; la condizione necessaria perchè questi due piani siano perpendicolari l' uno all' altro è

$$\frac{\frac{dF}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2z}{dx^2}\right)+\frac{dF}{dy}\,\frac{d^2z}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}+1=0;$$

ovvero, eliminando $\frac{dF}{dx}$ per mezzo dell' equazione

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx},$$

$$\left(\frac{dz}{dx} - \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{dF}{dy}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

ovvero

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}$$

$$+ \frac{dF}{dy}\left[\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right] = 0,$$

resultamento identico con l' equazione

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dF}{dy}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V}\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

come possiamo verificarlo effettuando in quest' ultima le differenziazioni indicate.

Le condizioni relative ai limiti si dedurranno, come nel n.° 19, cominciando dal considerare il primo punto della curva, dell' equazione determinata

$$\delta x_0 + \frac{dy_0}{dx}\delta y_0 + \frac{dz_0}{dx}\delta z_0 = 0.$$

Se questo primo punto è dato di posizione sopra la superficie quest' equazione è soddisfatta, poichè allora si ha

$$\delta x_0 = 0, \quad \delta y_0 = 0, \quad \delta z_0 = 0.$$

Ma se la linea della più corta distanza deve partire da una linea curva data tracciata sopra la superficie, le quantità

$$\delta x_0, \quad \delta y_0, \quad \delta z_0,$$

esprimono allora le projezioni sopra gli assi delle x, delle y, e delle z, dell' elemento di questa linea curva; e per conseguenza, la precedente equazione fa conoscere che la linea della più corta distanza dev' essere perpendicolare a quest' elemento.

Si otterrebbe un resultamento analogo per l' estremità opposta. Così la linea la più corta deve tagliare ad angoli retti le due curve tra le quali essa è tracciata.

21. La ricerca della superficie la cui area è un minimo, è un problema analogo al precedente. Supporremo che questa superficie debba terminarsi ad un perimetro determinato la cui projezione sul piano delle xy è data. L' integrale che si tratta di rendere un massimo è in questo caso

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_0}^{y_\omega} dy \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1},$$

e dobbiamo applicarci le nozioni esposte nei n.° 12, e seguenti. Avremo dun-

que, conformemente al n.° 15, l' equazione indefinita

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}}\right\}$$

$$+\frac{d}{dy}\left\{\frac{\frac{dz}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}}\right\}=0;$$

vale a dire, effettuando le differenziazioni indicate,

$$\left[\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1\right]\frac{d^2z}{dx^2}-2\frac{dz}{dx}\,\frac{dz}{dy}\,\frac{d^2z}{dxdy}+\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+1\right]\frac{d^2z}{dy^2}=0.$$

Quest' equazione alle differenze parziali del second' ordine appartiene alla superficie domandata. Le funzioni arbitrarie che entreranno nel suo integrale dovrebbero essere determinate in modo da far passare la superficie per il perimetro dato. Quando questo perimetro è fissato, l' equazioni determinate relative ai limiti dell' integrale sono già verificate, e non danno luogo ad alcuna condizione particolare.

22. Consideriamo ancora il più semplice dei problemi conosciuti sotto il nome d' Isoperimetri, il cui oggetto consiste a determinare la figura della curva che, sotto un perimetro dato, comprende la più grand' area possibile. Si tratta di rendere un massimo il valore dell' integrale definito

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\,.\,y\,,$$

nel mentre che l' integrale

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

conserva un valore determinato. Questa questione si risolve, conformemente a ciò che è stato detto n.° 18, determinando le condizioni del massimo assoluto della funzione

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\left\{y+a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right\},$$

a indicando un numero indeterminato. Supporremo i limiti x_0 e x_ω invariabili.

Applicando dunque le nozioni esposte n.° 3 e seguenti, l' equazione indefinita del n.° 5, sarà in questo caso

$$1-a\frac{d}{dx}\left\{\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\right\}=0,$$

donde integrando una prima volta si ricava

$$x - \alpha - a \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = 0,$$

ovvero

$$dy = \frac{(x-\alpha)\,dx}{\sqrt{a^2 - (x-\alpha)^2}},$$

α essendo una costante arbitraria; e integrando una seconda volta

$$y - 6 = -\sqrt{a^2 - \left(x - \alpha\right)^2},$$

ovvero

$$\left(x-\alpha\right)^2 + \left(y - 6\right)^2 = a^2,$$

6 essendo la seconda costante arbitraria. Così il circolo risolve in generale la questione proposta. La posizione del centro e il raggio possano determinarsi in modo da far passare la circonferenza per due punti dati, e a dare all'arco compreso tra questi punti un valore determinato.

23. Tratteremo finalmente la questione della brachistocrona, ossia curva della più pronta discesa, supponendo che la velocità iniziale del mobile sottoposto all' azione della gravità sia nulla, e che esso debba passare nel minimo tempo possibile da un punto qualunque di una curva data ad un punto qualunque di un'altra curva ugualmente data. L'asse delle x supponendosi verticale, la funzione che si tratta di rendere un minimo è

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{x - x_0}},$$

x_0 e x_ω rappresentando le ascisse dei punti estremi della curva descritta. Queste ascisse essendo variabili, si deve operare in questo caso conformemente a quanto è stato detto nei numeri 9 e 11. Bisogna osservare di più che la quantità x_0 entra nella funzione che si trova sotto il segno $\int$. Abbiamo paragonando alle formule dei numeri citati:

$$V = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{x - x_0}},$$

$$N=0, \quad P=\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}};$$

$$n=0, \quad p=\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}.$$

L' equazioni indefinite che debbono sussistere per tutti i punti della linea cercata sono

$$\frac{dP}{dx}=0, \quad \frac{dp}{dx}=0;$$

donde si deduce

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=B,$$

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=C,$$

B e C essendo delle costanti. Quest' equazioni danno

$$\frac{dz}{dy}=\frac{C}{B},$$

donde si conclude in primo luogo che la projezione della curva cercata sul piano orizzontale delle yz è una linea retta, e per conseguenza che questa curva è contenuta in un piano verticale.

Per riconoscere la natura della curva di cui si tratta possiamo supporre che il piano verticale delle xy si confonda con quello nel quale essa è situata. La sua equazione differenziale si ridurrà allora a

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=B;$$

donde si deduce

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{x-x_0}{\frac{1}{B^2}-\left(x-x_0\right)}},$$

equazione che appartiene ad una cicloide la cui base è una linea orizzontale che passa per il punto di partenza del mobile. Il diametro del circolo generatore è rappresentato dalla costante $\frac{1}{B^2}$. Si vede che il primo elemento della curva della più pronta discesa sarà sempre verticale.

Riguardo alle condizioni relative ai limiti dell'integrale, l'equazione determinata, data dai termini che non sono punto sotto il segno d'integrazione, è in questo caso

$$\left\{\begin{array}{l}-V_0\delta x_0-P_0\left(\delta y_0-\frac{dy_0}{dx}\delta x_0\right)-p_0\left(\delta z_0-\frac{dz_0}{dx}\delta x_0\right)\\+V_\omega\delta x_\omega+P_\omega\left(\delta y_\omega-\frac{dy_\omega}{dx}\delta x_\omega\right)+p_\omega\left(\delta z_\omega-\frac{dz_\omega}{dx}\delta x_\omega\right)\\+\delta x_0\int_{x_0}^{x_\omega}dx\,.\,\mu\end{array}\right\}=0,$$

e si ha

$$\mu=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{2\left(x-x_0\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si troverà il valore dell'integrale $\int_{x_0}^{x_\omega}dx\,.\,\mu$, osservando, che la differenziale completa della funzione V, è

$$dV=-\mu dx+Pd\left(\frac{dy}{dx}\right)+pd\left(\frac{dz}{dx}\right).$$

Ma abbiamo veduto sopra, che le funzioni P e p dovevano essere costanti in tutta l'estensione della curva. Possiamo dunque scrivere P_ω e p_ω invece di P e p, il che dà

$$dV=-\mu dx+P_\omega d\left(\frac{dy}{dx}\right)+p_\omega d\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

donde si ricava integrando

$$\int_{x_0}^{x_\omega}dx\,.\,\mu=V_0-V_\omega+P_\omega\left(\frac{dy_\omega}{dx}-\frac{dy_0}{dx}\right)+p_\omega\left(\frac{dz_\omega}{dx}-\frac{dz_0}{dx}\right).$$

Sostituendo questo valore nell'equazione determinata precedente, e osservando

che

$$P_0 = P_\omega \quad e \quad p_0 = p_\omega,$$

si trova

$$\left\{\begin{array}{l} -V_\omega \delta x_0 - P_\omega\left(\delta y_0 - \frac{dy_\omega}{dx}\delta x_0\right) - p_\omega\left(\delta z_0 - \frac{dz_\omega}{dx}\delta x_0\right) \\ +V_\omega \delta x_\omega + P_\omega\left(\delta y_\omega - \frac{dy_\omega}{dx}\delta x_\omega\right) + p_\omega\left(\delta z_\omega - \frac{dz_\omega}{dx}\delta x_\omega\right) \end{array}\right\} = 0,$$

ovvero, ponendo per V_ω, P_ω e p_ω i loro valori

$$\left\{\begin{array}{l} -\delta x_0 - \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_0 - \frac{dz_\omega}{dx}\delta z_0 \\ +\delta x_\omega + \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_\omega + \frac{dz_\omega}{dx}\delta z_\omega \end{array}\right\} = 0.$$

Le variazioni delle coordinate dei due punti estremi della curva essendo respettivamente indipendenti l' una dall' altra, quest' equazione si divide nelle due seguenti

$$\delta x_0 + \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_0 + \frac{dz_\omega}{dx}\delta z_0 = 0,$$

$$\delta x_\omega + \frac{dy_\omega}{dx}\delta y_\omega + \frac{dz_\omega}{dx}\delta z_\omega = 0,$$

le quali evidentemente indicano che l' ultimo elemento della curva cercata dev' essere perpendicolare nello stesso tempo alle tangenti condotte alle due curve date nei punti di partenza e di arrivo del mobile. Ne resulta che se le due curve fossero in uno stesso piano verticale, le loro tangenti condotte ai punti estremi della brachistocrona dovrebbero essere parallele tra loro.

Così la curva domandata è una porzione di cicloide la cui base è orizzontale e la cui origine è al punto di partenza del mobile. Essa taglia ad angoli retti la curva d' arrivo, e l' origine è talmente situata sulla curva di partenza, che la tangente condotta per quest' origine a questa curva è perpendicolare alla tangente condotta all' estremità inferiore della porzione cicloidale.

Sopra questa Teoria tanto importante potranno consultarsi con vantaggio le seguenti opere; cioè:

Boucharlat — *Élemens de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*, 5.^{e} *édition*, in-8; *avec planches*, 1838.

La Croix — *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*; 2.^{e} *édition*, *revue*, *corrigée et considérablement augmentée*, 3. vol. in-4, *avec* 18 *planches*. ec. ec.

VARIAZIONE DELL' AGO MAGNETICO. Alla parola Bussola abbiamo detto che l' ago calamitato non indica esattamente il nord, ma che era soggetto a diverse variazioni che passeremo adesso a specificare più esattamente.

L' ago di una bussola si chiama particolarmente *ago di declinazione*, ed è costruito in modo da potersi muovere in un piano perfettamente orizzontale, il che richiede, come vedremo in seguito, che una delle sue estremità sia più leggera dell' altra.

Si dice *declinazione* l' angolo che fa la sua direzione di equilibrio col meri-

diano del luogo di osservazione. Per esempio, a Parigi, ove quest' angolo è di 22°, si dice che la declinazione dell' ago magnetico è di 22.°

Il piano che passa pel centro della terra e per la direzione dell' ago, o piuttosto l' intersezione di questo piano colla superficie della terra, è il *meridiano magnetico*: questo meridiano è dunque un circolo massimo terrestre che taglia in due parti eguali il meridiano geografico.

La declinazione non è la stessa in tutti i luoghi della terra, in un luogo è orientale, in un altro è occidentale, e in qualche altro è nulla. La declinazione è *orientale* quando il polo australe dell' ago, quello cioè che è rivolto verso il nord, inclina dalla parte di occidente; è *occidentale* quando questo medesimo polo inclina verso l' oriente; finalmente è *nulla* quando la direzione dell' ago coincide esattamente col meridiano geografico. I diversi punti terrestri nei quali la declinazione è nulla formano quelle che comunemente si dicono *linee senza declinazione*: queste linee sono irregolarissime: se ne conoscono quattro, di cui la prima, situata nell' Oceano tra l' antico e il nuovo mondo, ha provato un grande spostamento da un secolo e mezzo; la seconda comincia al di sotto della Nuova Olanda e si prolunga fino in Lapponia; la terza si unisce alla seconda in vicinanza del grande Arcipelago dell' Asia e si stende nella parte orientale della Siberia; la quarta si trova nell' Oceano pacifico, in vicinanza delle isole degli Amici: la posizione di nessuna di queste linee è costante.

In generale, la declinazione non è costante in uno stesso luogo che per un certo tempo: a Parigi, per esempio, era nulla nel 1663; dopo quell' epoca la sua deviazione è stata sensibilmente progressiva verso l' occidente fino al 1820, in cui il suo massimo era di 22° 29′. A cominciare da quest' epoca l' ago ha provato un moto retrogrado, perchè adesso (1829) esso non ha più che una declinazione di 22° 12′. Ecco un compendio delle osservazioni fatte in questo proposito.

QUADRO DELLA DECLINAZIONE DELL' AGO MAGNETICO A PARIGI.

Anni	declinazione	Anni	declinazione
1580	11° 30′ est	1816	22° 25′ ovest
1618	8	1817	22 19
1663	0	1818	22 22
1678	1 30 ovest	1819	22 29
1700	8 10	1822	22 11
1767	19 16	1823	22 23
1780	19 55	1824	22 23
1785	22	1825	22 22
1805	22 5	1827	22 20
1813	22 28	1828	22 6
1814	22 34	1829	22 12

Indipendentemente da queste grandi variazioni, si osservano ancora dei movimenti diurni periodici nell' ago magnetico. Così nella mattina esso declina un poco più verso occidente, e dopo il mezzo del giorno va accostandosi all' oriente. Dal principio della primavera fino alla fine dell' estate le variazioni diurne sono maggiori; nell' altra metà dell' anno sono minori. A Parigi, la massima deviazione dalla direzione ordinaria è di 16′, la minima di 10′.

Diverse cause accidentali sembrano produrre delle perturbazioni sull' ago magnetico: tali sono i terremoti, le eruzioni vulcaniche, e qualche volta ancora delle semplici tempeste. Daniele Bernoulli osservò nel 1767 una variazione di un mezzo grado prodotta da un terremoto, e il padre della Torre riconobbe dei cangiamenti di parecchi gradi nella declinazione durante un' eruzione del Vesuvio. È certo che quando il fulmine cade in prossimità dei corpi calamitati esso altera talmente il loro stato magnetico che spesso i lori poli si trovano interamente rovesciati. Le aurore boreali esercitano un' influenza singolare: appena comparisce questa meteora, e in tutta la sua durata, l' ago calamitato prova una agitazione continua e una deviazione più o meno considerabile, non solo nel luogo in cui è visibile l' aurora boreale, ma anco a grandi distanze ove non si scorga traccia nessuna di questo fenomeno atmosferico.

L' ago magnetico non varia soltanto nella sua *declinazione*, esso varia ancora nella sua *inclinazione*: ma per formarsi un' idea esatta di questa seconda specie di variazione, bisogna sapere che un ago calamitato non conserva la sua posizione orizzontale che per l' ineguaglianza del peso delle sue due punte. Immaginiamo che una verga cilindrica d' acciajo sia sospesa ad un filo che passi pel suo centro di gravità. Finchè questa verga non sarà calamitata, essa conserverà, come ognuno sa, la sua situazione orizzontale, e potrà rimanere in riposo in tutte le direzioni che le si vorranno dare, purchè siano queste orizzontali: ma subitochè essa sarà stata calamitata, non solamente prenderà da sè stessa una direzione fissa alla quale ritornerà ogni volta che ne sia stata allontanata, ma di più non prenderà in questa direzione fissa una situazione orizzontale, e non rimarrà in equilibrio stabile che in una certa inclinazione rispetto alla verticale. Questo fenomeno è stato osservato per la prima volta nel 1576 da Roberto Norman fabbricante di strumenti matematici a Londra. Fino a quel tempo erasi creduto che l' ago dovesse essere orizzontale, e quando in Europa si vedeva abbassare il suo polo australe, si supponeva che il centro di gravità fosse stato mal determinato e si toglieva l' inconveniente coll' alleggerire il lato che sembrava più pesante. Norman, da buono osservatore, dopo aver costruito degli aghi perfettamente in equilibrio nel piano orizzontale prima d' essere stati calamitati, misurò il peso che bisognava aggiungere ad uno dei lati per conservare quest' equilibrio dopo che gli aghi erano stati calamitati, e giunse così ad una delle più importanti scoperte del magnetismo.

Vi sono dunque due specie di direzioni in un ago calamitato sospeso liberamente pel suo centro di gravità, e se una soltanto di queste direzioni è sensibile nelle bussole, ciò avviene perchè i loro aghi hanno nei nostri climi il polo boreale più pesante del polo australe. Quando si vogliono osservare le inclinazioni, bisogna ricorrere all' istrumento detto *inclinatorio*.

L' *inclinatorio* si compone di una lastra d' acciajo assottigliata alle sue estremità e attraversata nel suo centro di gravità da un asse cortissimo terminato in due punte acute, che entrano in due sostegni che reggono in tal modo la lastra o ago d' acciajo libero così di girare in senso verticale. Un circolo graduato, il cui centro corrisponde col centro di gravità dell' ago è applicato verticalmente ai sostegni dell' apparecchio per misurare l' angolo che l' ago fa colla linea orizzontale; ed è quest' angolo appunto che costituisce l' inclinazione dell' ago magnetico. L' intero apparecchio è mobile sopra una piattaforma che è armata di un circolo graduato e di livelli a bolla d' aria.

Per far uso di questo stromento, si procura di collocarlo orizzontalmente per mezzo dei livelli, quindi si porta l' ago nel piano del meridiano magnetico, perchè è soltanto in questo meridiano che esso può indicare esattamente l' inclinazione; in tutte le altre posizioni l' inclinazione è troppo grande e l' ago può

prendere anco la situazione verticale; perchè, decomponendo la forza direttrice della terra in due componenti perpendicolari, l'una orizzontale e l'altra verticale, è facile vedere che la componente orizzontale diminuisce e misura che l'angolo del piano dell'ago col piano del meridiano magnetico si avvicina maggiormente a 90°. Quando quest'angolo è retto, la componente orizzontale è nulla, e per conseguenza l'ago non è sollecitato che da una forza verticale, e deve prendere una direzione perpendicolare all'orizzonte. Così, quando l'ago è verticale, non si tratta più che di far descrivere al suo piano un angolo di 90° per farlo coincidere col meridiano magnetico. Si comincia dunque dal far girare l'apparecchio sulla sua piattaforma finchè l'ago divenga verticale, quindi gli si fa descrivere un arco di 90°, che conduce l'ago nel meridiano magnetico, ove si osserva la inclinazione sul circolo graduato verticale.

Quando la declinazione, ossia la direzione del meridiano magnetico, è già conosciuta, basta semplicemente collocare il circolo verticale in questa direzione, e l'ago prende immediatamente da se stesso la sua posizione d'inclinazione.

La complicanza di questo strumento rendendo la sua costruzione assai difficile non si può per ora contar molto sulla esattezza delle osservazioni che hanno avuto luogo in diversi paesi per determinare l'inclinazione dell'ago magnetico; ma è almeno ormai stabilito incontrastabilmente che questa inclinazione è ancora più variabile della declinazione.

Ecco le inclinazioni osservate a Parigi dal 1670 al 1826.

TAVOLA DELL'INCLINAZIONE DELL'AGO MAGNETICO A PARIGI.

ANNI	INCLINAZIONE	ANNO	INCLINAZIONE
1670	75° 00′	1817	68° 38′
1754	72 15	1818	68 35
1756	72 25	1819	68 25
1780	71 48	1820	68 20
1791	70 52	1821	68 14
1798	69 51	1822	68 11
1806	69 12	1823	68 8
1810	68 50	1824	68 7
1814	68 36	1825	68 00
1816	68 40	1826	68 00

Al pari della declinazione l'inclinazione cangia da un luogo ad un altro; in alcune parti della terra è nulla, in altre è considerevolissima: in tutte però va cangiando col tempo e si crede che essa provi pure delle variazioni diurne che non sono state ancora con sufficiente esattezza osservate.

I diversi punti terrestri in cui l'inclinazione è nulla formano ciò che comunemente si dice *equatore magnetico*: questo equatore è una curva irregolarissima di cui una parte è indicata nella nostra tavola XXXVII, e che taglia almeno tre volte l'equatore terrestre. Secondo le osservazioni dei sigg. Freycinet, Sabine, e Duperrey, quest'equatore è dotato di un moto di traslazione da oriente verso

occidente che è probabilmente la causa delle variazioni che prova l'inclinazione dell'ago in un medesimo luogo. Nell'ipotesi in cui si considera la terra come una gran calamita che agisca su tutti i corpi calamitati posti sulla sua superficie, si erano attribuiti al nostro globo due poli, l'uno posto nella regione boreale che attivasse il polo australe delle calamite, l'altro posto nella regione australe che attivasse il loro polo boreale: ma non è possibile di dare una ragione delle ineguaglianze dell'equatore magnetico senza supporre ancora altri centri magnetici oltre questi poli, il che deve far rigettare interamente l'antica teoria del magnetismo. Comunque sia, da amendue le parti dell'equatore magnetico l'inclinazione va aumentando a misura che cresce la distanza da questa linea: colla sola differenza che nell'emisfero boreale è il polo australe dell'ago che va sotto l'orizzonte, mentre accade il contrario nell'emisfero australe.

VARIAZIONE della luna. Si dà questo nome in astronomia alla terza ineguaglianza della luna scoperta da Ticone Brahé. *Vedi* Luna.

VARIGNON (Pietro), uno dei matematici celebri del XVII secolo e del principio del XVIII, nacque a Caen nel 1654. Era figlio di un architetto accollatario di lavori che a stento guadagnava tanto da mantenere la sua famiglia. Destinato allo stato ecclesiastico non manifestò nella sua puerizia nessun talento che lo distinguesse dagli altri fanciulli della sua età. Avendo un giorno veduto suo padre che disegnava un quadrante solare, sospettò dell'esistenza di una teoria generale, ma nessuno potè dargli la spiegazione che domandava ed ei la cercò da se senza trovarla. Egli studiava la filosofia quando caduligli fra mano gli *Elementi* di Euclide, ne intraprese la lettura e si accorse della sua inclinazione per le alte scienze: da indi poi s'impose delle privazioni per procurarsi dei libri di matematica, cui non leggeva che all'insaputa de' suoi genitori. Le opere di Cartesio, che inseguito prese a studiare con ardore gli fecero prendere in avversione la filosofia scolastica di cui quell'uomo grande aveva per sempre spezzato il giogo dispotico. Nel 1686 si recò a Parigi coll'abate di Saint-Pierre, la cui liberalità lo mise in grado di abbandonarsi interamente alle sue inclinazioni. Sebbene non frequentasse molto la società pure strinse ben presto amicizia con dotti di primo ordine, come un Duhamel, un Duverney, un Lahire. Il suo *Progetto di una nuova meccanica* ch'ei pubblicò nel 1687 lo fece finalmente conoscere. Tale opera gli fruttò nel 1688 l'ammissione nell'Accademia delle Scienze, e la cattedra di matematica nel collegio Mazarini, la quale non era stata peranche conferita a nessuno. I doveri di tale ufizio, cui adempieva con zelo sommo, non tolsero che intervenisse alle sedute dell'Accademia dove faceva frequente lettura.

Conobbe uno dei primi in Francia i vantaggi che dovevansi ritrarre dal calcolo differenziale ed integrale, e fu uno dei più ardenti difensori della geometria degl'infinitamente piccoli impugnata allora in piena accademia. Questo dotto matematico i cui principj sulla teoria della meccanica sono ancora seguiti come una regola fondamentale in questo ramo della Scienza, morì a Parigi nel mese di Dicembre 1722 in età di sessantotto anni. Era membro della Società Reale di Londra e dell'Accademia di Berlino.

Oltre un numero grande di memorie inserite nella raccolta dall'Accademia delle Scienze di Parigi, e nei giornali scientifici del tempo e di cui si trova un elenco particolarizzato nelle *Memorie* di Niceron, si hanno di Varignon le seguenti opere separate: I *Projet d'une nouvelle mécanique*, Parigi, 1687, in-4. Tale libro, dice Montuela, gli fece molto onore per la generalità di vedute che vi regna. Vi si trova compresa tutta la statica dedotta da un principio unico, di cui l'autore fa uso con buon successo per risolvere una moltitudine di quesiti meccanici in una nuova maniera. Tale principio, presentito da Stevino e da altri, non è propriamente che quello della composizione del moto esteso al

l' equilibrio. *Vedi* Montucla, *Storia delle Matematiche*, tom. II, pag. 488. II *Nouvelles conjectures sur la pesanteur*, ivi, 1690, in-12: Il sistema di Varignon sulla gravitazione non ebbe nammeno allora quasi nessun partigiano; III *Nouvelle mécanique ou statique*, ivi, 1725, 2 vol. in-4. È l'opera della quale aveva pubblicato il Progetto quasi quarant' anni prima: ma la scienza aveva fatto da quel tempo molti progressi, per ciò non ebbe grido: Beaufort e il Camus ne furono gli editori; IV *Eclaircissements sur l'analyse des infiniment petits et sur le calcul exponentiel de Bernoulli*, ivi, 1725, in-4; V *Traité du mouvement et de la mesure des eaux courrantes et des sources*, con un trattato preliminare sul moto in generale, ivi, 1725, in-4, VI *Élémens de mathématiques*, ivi, 1732, in-4. È questa una traduzione, fatta da Cochet, delle lezioni date da Varignon al collegio Mazarino.

VEGA (Giorgio Barone di), ufficiale di artiglieria, nato nel 1754 in Sagoritz nel ducato di Carniola, studiò nel collegio di Lubiana e fece rapidi progressi nelle matematiche. Creato ingegnere in Carniola e quindi in Ungheria ebbe occasione di farsi distinguere per le sue cognizioni e pe' suoi talenti. Entrò poscia nel corpo dell' artiglieria, dove divenne poco dopo professore di matematiche. In seguito fu fatto maggiore, poi tenente colonnello, cavaliere dell' Ordine di Maria Teresa, e barone dell' impero. Era egli in tal guisa nella più brillante posizione e destinato a salire ai primi gradi dell' esercito, quando perì miseramente assassinato il 17 Settembre 1802. Vega era un matematico di primo ordine. Era membro di varie accademie e tra le altre di quelle di Gottinga, di Erfurt e di Berlino. Ha pubblicato: I *Corso di matematiche ad uso del corpo di artiglieria dell' armata imperiale* (in tedesco), Vienna 1786-1800, 4 vol. in-4; 3.ª ediz. in-fol. 1802; II *Manuale logaritmo-trigonometrico* (in tedesco), Lipsia, 1793, in-4; 2.ª ediz. 1800; III *Raccolta compiuta delle grandi tavole logaritmo-trigonometriche* (in tedesco), Lipsia, 1794, in-fol.; IV *Manuale logarithmico-trigonometricum, matheseos studiosorum commodo in minorum Ulaccii, Wolfii aliorumque hujus generis tabulorum logarithimico-trigonometricarum mendis passim quam plurimis scatentium, locum substitum. Editio secundo aucta et emendata*, Lipsia, 1800, in-4. Tale seconda edizione, a cui ha tenuto dietro una terza, nel 1814, è dedicata a Giuseppe Maffei, vescovo di Buntzlau in Boemia. Nella prefazione, Vega testifica a tal prelato una viva riconoscenza per le lezioni di matematiche che aveva ricevute da quell' eccellente maestro nel collegio di Lubiana. L'opera è divisa in quattro parti. Nell'introduzione l'autore spiega le proprietà dei logaritmi. La seconda e la terza parte contengono i logaritmi ordinarj e i logaritmi trigonometrici. Nella quarta dà la soluzione dei triangoli rettilinei e sferici, la tavola delle longitudini, degli archi circolari, varie tavole di ragguaglio dei pesi e delle misure dei diversi paesi; il sistema metrico di Francia; quello dei pesi e delle misure dell' Austria; V *Introduzione alla cronologia*, (in Tedesco), Vienna, 1801, in-8; VI *Sistema naturale delle misure, dei pesi e delle monete*, Vienna, 1803, in-4.

VEIGA (Eusebio di), astronomo nato il primo Giugno 1718 a Revelles nella diocesi di Coimbra, entrò giovanissimo nella regola di S. Ignazio, e finiti che ebbe gli studj fu fatto professore di matematiche nel collegio di Lisbona. Quando i gesuiti furono cacciati dal Portogallo, il p. Veiga si recò a Roma, dove i suoi talenti lo fecero presto conoscere. Il duca di Sulmona avendolo scelto per direttore della specola che aveva fatto costruire nel suo palazzo, il p. Veiga potè appagare il suo genio per l'astronomia e per più anni cooperò alla compilazione delle *Effemeridi astronomiche*, opera fatta sul disegno della *Connaissance des temps*. Ignorasi i motivi che lo indussero a interrompere tale utile lavoro. Fatto rettore dello spedale reale dei Portoghesi a Roma, vi si ritirò e quivi morì ai 9

Aprile 1798 in età di ottanta anni. Scrisse: I *Planetorio lusitano explicado com problemas ..... poro uso de nautico e astronomia em Portugal e suas conquistos*, Lisbona, 1758, in-8. In tale opera si trova l'osservazione di un'ecclisse di sole fatta a Lisbona dal p. Veiga il 28 Ottobre 1753. Quest' opera fu ristampata con aggiunte; II *Planetario romano*, *cioè Effemeridi astronomiche*, Roma, 1786-94, otto volumi in-8, III *Trigonometria sphoerica*, ivi, 1745. Havvi una breve notizia del p. Veiga a Caballero, *Bibliotheca scriptorum societatis Jesu supplementum*, pag. 274.

VELOCITÀ. *Vedi* CELERITÀ.

VELOCITÀ. (*Mec.*) Rapidità più o meno grande con la quale un mobile percorre uno spazio determinato. Per esempio, se due mobili percorrono lo stesso spazio uno in un'ora e l'altro in due, la velocità del primo sarà due volte maggiore di quella del secondo.

Si misura, in generale, la *velocità* dallo *spazio* percorso nell' *unità* di tempo; così quando un mobile percorre, in quest' unità, uno spazio doppio, triplo, ec. di quello che un altro mobile percorre nello stesso tempo, si dice che la sua velocità è doppia, tripla, ec. della velocità di questo secondo mobile.

Nel *moto uniforme* (*vedi* QUESTA PAROLA) la velocità è costantemente la stessa, e siccome essa fa percorrere al mobile spazj uguali in tempi uguali, vien rappresentata dal quoziente dello spazio diviso per il tempo. Se indichiamo, infatti, con E lo spazio descritto da un mobile in un tempo T, il quoziente $\frac{E}{T}$ rappresenta lo spazio descritto nell' unità di tempo, e indicando con V la velocità, le due quantità V ed $\frac{E}{T}$ sono identiche. Ben inteso però che con questo quoziente dello *spazio* diviso per il *tempo* s' intende quello dei numeri che esprimono i rapporti dello spazio e del tempo alle loro unità respettive. Per esempio se lo spazio è di 8 metri e il tempo di 2 secondi, la velocità è di $\frac{8}{2}=4$, vale a dire, 4 metri per secondo.

Nel *moto variato*, la velocità aumenta o diminuisce successivamente e allora, per misurarla, si prende un intervallo infinitamente piccolo e si chiama, a ciascun' istante, *velocità* del mobile, il rapporto dello spazio infinitamente piccolo percorso in quest' istante alla durata di questo stesso istante. (*Vedi* ACCELERATO.)

Si distingue la velocità in *velocità assoluta* e *velocità relativa*. La velocità assoluta di un mobile è la sua velocità reale ed effettiva; vale a dire quella che serve a misurare la quantità la quale si avvicina o si allontana dagli oggetti che sono considerati come fissi nello spazio. La velocità relativa di due mobili è quella che serve a misurare la quantità di cui questi mobili si avvicinano o si allontanano l' uno dall' altro in un tempo dato. (*Vedi* MOTO.)

VELOCITÀ VIRTUALE. (*Mec.*) Si chiama *velocità virtuale* lo spazio infinitamente piccolo che descriverebbe il punto d' applicazione di una forza se l'equilibrio del sistema di cui questa forza fa parte fosse infinitamente poco turbato.

Sia P una forza rappresentata in grandezza e in direzione dalla retta A*m* (*Tav.* CCII, *fig.* 1) e applicata al punto *m*; supponiamo che si comunichi un moto infinitamente piccolo al sistema dei punti con i quali *m* è legato, in modo che questi punti descrivano degli spazj infinitamente piccoli, senza però che le loro distanze respettive provino cangiamento; rappresentiamo con la linea *mn* lo spazio percorso dal punto *m* in virtù di questo piccolo moto: questo spazio sarà la *velocità virtuale* del punto *m*, e se dal punto *n* abbassiamo la retta *na* perpendicolare sopra A*m* o sul suo prolungamento (*Tav.* CCII, *fig.* 2),

la parte am, projezione di mn sulla direzione della forza P sarà ciò che si chiama la velocità virtuale del punto m *valutato* seguendo la direzione della sua forza.

Premesso ciò, se chiamiamo P, P', P'', ec., differenti forze applicate ad un sistema in equilibrio, e p, p', p'', ec., le loro velocità virtuali valutate respettivamente seguendo la loro direzione, esisterà tra queste quantità una relazione importantissima la quale stabilisce il celebre *principio delle velocità virtuali*, e di cui ecco l' enunciato il più generale:

Se le forze P, P', P'', ec., *sono in equilibrio, la somma di queste forze moltiplicate respettivamente per le velocità virtuali* p, p', p'', ec., *valutate, nelle loro direzioni, è uguale a zero, vale a dire che si ha*

$$Pp+P'p'+P''p''+\text{ec.} \ldots = 0 \ldots \ldots (1),$$

e, reciprocamente, le forze P, P', P'', ec., *sono in equilibrio quando quest' equazione ha luogo per tutti i moti infinitamente piccoli che possiamo dare al sistema dei punti d' applicazione delle forze.*

Prima di tutto faremo osservare, per l' intelligenza dell' equazione (1), che le quantità P, P', P'', ec., sono sempre positive, ma che le velocità virtuali p, p', p'', ec., possono essere positive o negative: esse sono positive quando cadono sulla direzione stessa delle forze; negative quando cadono sul suo prolungamento. Per esempio, la velocità virtuale am del punto m, valutata nella direzione Am, è positiva nella (*Tav.* CCII, *fig.* 1) e negativa nella (*Tav.* CCII, *fig.* 2), perchè nel primo caso essa cade sopra Am, e nel secondo cade sul prolungamento di questa retta.

Il principio delle velocità virtuali si deve al Galileo, ma è il Lagrange che ne ha dimostrato tutta la sua fecondità prendendolo per base della sua *meccanica analitica* e riportandovi la soluzione di tutti i problemi che riguardano l' equilibrio. Non si tratta infatti, per risolvere questi problemi, che di distinguere, in ciascun caso particolare, i differenti moti infinitamente piccoli che il sistema dei punti d' applicazione delle forze è capace di prendere, quindi di determinare, per ciascuno di questi moti, le velocità virtuali valutate seguendo la direzione delle forze date; queste velocità essendo conosciute, la relazione (1) dà immediatamente tutte l' equazioni d' equilibrio, le quali sono in numero uguale a quello dei moti possibili. Questo è ciò che faremo meglio comprendere mediante alcuni esempii, dopo aver prima di tutto dimostrato il principio.

Consideriamo, in primo luogo, un sistema di forze concorrenti ad uno stesso punto.

Siano P, P', P'', ec. (*Tav.* CLXXXVII, *fig.* 11), diverse forze applicate ad un punto m seguendo le direzioni mP, mP', mP'', ec., qualunque nello spazio; sia di più mR, la direzione della resultante R di queste forze. Concepiamo che per l' effetto di un moto istantaneo il punto m si trovi trasportato in n, e siccome la linea mn percorsa da questo punto è infinitamente piccola, potremo supporla retta e situare nella sua direzione l' asse delle x; dimodochè chiamando α, α', α'', ec., gli angoli che fanno respettivamente con quest' asse le forze P, P', P'', ec., ed ω quello che fa la resultante R, avremo l' equazione (*Vedi* RESULTANTE),

$$R\cos\omega = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{ec.}$$

Rappresentiamo con q la piccola linea mn, e moltiplichiamo per q i due membri di quest' equazione, verrà

$$Rq\cos\omega = Pq\cos\alpha + P'q\cos\alpha' + P''q\cos\alpha'' + \text{ec.} \ldots (2).$$

Ora, è facile vedere che $q \cos \omega$ ossia $(mn) . \cos (RmX)$ è uguale ad ma, projezione di mn sopra mR, vale a dire che $q \cos \omega$ rappresenta la velocità virtuale della forza R valutata seguendo la sua direzione. Ugualmente, $q \cos \alpha$, $q \cos \alpha'$, $q \cos \alpha''$, ec., sono le velocità virtuali delle forze P, P′, P″, ec., valutate seguendo le loro direzioni respettive; così l'equazione (2) è la stessa cosa che

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \text{ec.} \; . \; . \; . \; . \; . \; (3),$$

nella quale r, p, p', p'', ec., rappresentano le velocità virtuali respettive delle forze R, P, P′, P″, ec., valutate seguendo le loro direzioni.

Ma, perchè le forze P, P′, P″, ec., siano in equilibrio intorno del punto m, che supponiamo interamente libero, bisogna che la loro resultante sia nulla o che si abbia $R = 0$; dunque, nel caso dell'equilibrio abbiamo

$$Pp + P'p' + P''p'' + \text{ec.} = 0.$$

Così il principio delle velocità virtuali si trova dimostrato per il caso di un numero qualunque di forze applicate ad uno stesso punto.

Consideriamo, in secondo luogo, diverse forze P, P′, P″, ec., applicate a differenti punti di un corpo o sistema di corpi. Questi punti essendo soggetti a conservare fra loro le stesse distanze, potremo considerarli come legati gli uni agl'altri mediante rette inflessibili; e per giungere a conoscere lo stato generale del sistema, dopo che il suo equilibrio è stato infinitamente poco dissestato, basterà di esaminare in particolare ciò che è succeduto ad una di questa retta.

Sia mm' (*Tav.* CCII, *fig.* 8, e *Tav.* CLXXXVII, *fig.* 9) la retta che unisce i due punti d'applicazione m ed m'; allorquando, per conseguenza di una piccola impulsione data al sistema, il punto m si trova trasportato in n, il punto m' si trova ancora trasportato in un punto n' che può essere al di sopra (*Tav.* CCII, *fig.* 8) o al disotto (*Tav.* CLXXXVII, *fig.* 9) della linea mm'. Nel primo caso, e ammettendo provvisoriamente che la linea mm', diventando nn', abbia variato di grandezza, la variazione di mm' avrà per valore

$$mm' - nn',$$

Ma lo spostamento del sistema essendo stato insensibile, le distanze mn ed $m'n'$ (*Tav.* CCII, *fig.* 7) sono infinitamente piccole, dimodochè possiamo considerare le rette mm' ed nn' come parallele; poichè, supponendo che queste rette possano incontrarsi in un punto O (*Tav.* CCII, *fig.* 6), si avrebbe un triangolo nOm, composto di due lati finiti nO ed mO e di un lato infinitamente piccolo mn, e di cui, per conseguenza, l'angolo O sarebbe infinitamente piccolo o nullo. Dunque, conducendo sopra mm' dai punti n ed n' le perpendicolari na ed $n'a'$ (*Tav.* CCII, *fig.* 7), si ha

$$nn' = aa',$$

e per conseguenza

$$mm' - nn' = \left(ma + am'\right) - \left(am' + m'a'\right)$$
$$= ma - m'a'.$$

Ne resulta che quando la retta mm' diventa nn' senza cangiare di grandezza, caso in cui

$$mm' - nn' = 0,$$

si ha

$$ma - m'a' = o.$$

Osservando ora che ma è la velocità virtuale del punto m valutata seguendo la retta mm', e che $m'a'$ è la velocità virtuale del punto m' valutata seguendo la stessa retta, ne concluderemo che quando una retta inflessibile prova uno spostamento infinitamente piccolo, le velocità virtuali delle sue estremità valutate l' una e l' altra nella sua direzione sono uguali. Chiamando dunque v la velocità virtuale ma, v' la velocità virtuale $m'a'$, e osservando che v' dev' esser presa col segno —, avremo l' equazione

$$v + v' = o,$$

nel caso della (*Tav.* CCII, *fig.* 8). Nel secondo caso, quello della (*Tav.* CLXXXVII, *fig.* 9), dal punto O come centro descrivendo (*Tav.* CLXXXVII, *fig.* 10) gli archi na ed $n'a'$, questi archi essendo infinitamente piccoli, saranno delle rette perpendicolari ad mm', e conseguentemente ma ed $m'a'$ saranno le velocità virtuali dei punti m ed m' valutate seguendo la retta mm'. Ora,

$$nO = Oa$$
$$n'O = a'O;$$

dunque

$$ma = mO - nO$$
$$m'a' = Oa' - Om',$$

e, per conseguenza,

$$ma - m'a' = mO - nO - On' + Om'$$
$$= mm' - nn',$$

ossia

$$ma - m'a' = o,$$

a motivo di

$$mm' - nn' = o.$$

Abbiamo dunque ancora

$$v + v' = o,$$

indicando, come nel caso precedente, con v e v' le velocità virtuali dei punti m ed m' valutate seguendo la retta mm'.

È ora facile di dimostrare il principio delle velocità virtuali per il caso di più forze applicate a differenti punti m, m', m'', ec. (*Tav.* CLXXXIV, *fig.* 3), formando un sistema costante. Infatti, se concepiamo tutti questi punti legati due a due mediante rette che non si possano stendere, potremo considerare queste rette come altrettante forze; dimodochè il punto m, per esempio, sarà sollecitato non solamente dalla forza P, ma dalle forze rappresentate in direzione dalle rette mm', mm'', mm''', ec., e questo punto non potrà restare in riposo che quando tutte le forze che gli sono applicate si facciano equilibrio. La stessa cosa avendo luogo per tutti gli altri punti, se rappresentiamo con $\left(mm'\right)$, $\left(m',m''\right)$, $\left(m''m'''\right)$, ec., le forze che agiscono nelle direzioni mm', $m'm''$, $m''m'''$, ec., è evidente che l' equilibrio generale del sistema sarà mantenuto,

al punto m, dalle forze

$$\left(mm'\right),\ \left(mm''\right),\ \left(mm'''\right)\ \text{e}\ P,$$

al punto m', dalle forze

$$\left(m'm\right),\ \left(m'm''\right),\ \left(m'm'''\right)\ \text{e}\ P',$$

al punto m'', dalle forze

$$\left(m''m\right),\ \left(m''m'\right),\ \left(m''m'''\right)\ \text{e}\ P'',$$

al punto m''', dalle forze

$$\left(m'''m\right),\ \left(m'''m'\right),\ \left(m'''m''\right)\ \text{e}\ P'''.$$

Possiamo dunque stabilire per ciascuno di questi equilibri l' equazione (1) delle velocità virtuali, dimostrata nel caso delle forze concorrenti; così indicando con v_1, v_2, v_3 le velocità virtuali del punto m valutate respettivamente nelle direzioni mm', mm'', mm'''; con v'_1, v'_2, v'_3 le velocità virtuali del punto m' valutate nelle direzioni $m'm$, $m'm''$, $m'm'''$, ec., ec., avremo il complesso dell' equazioni,

per il punto m,

$$Pp+v_1\left(mm'\right)+v_2\left(m'm''\right)+v_3\left(mm'''\right)=0,$$

per il punto m',

$$P'p'+v'_1\left(m'm\right)+v'_2\left(m'm''\right)+v'_3\left(m'm'''\right)=0,$$

per il punto m''

$$P''p''+v''_1\left(m''m\right)+v''_2\left(m''m'\right)+v''_3\left(m''m'''\right)=0,$$

per il punto m''',

$$P'''p'''+v'''_1\left(m'''m\right)+v'''_2\left(m'''m'\right)+v'''_3\left(m'''m''\right)=0,$$

la cui somma ci darà l' equazione generale

$$\left.\begin{array}{c} Pp+P'p'+P''p''+P'''p''' \\ v_1\left(mm'\right)+v'_1\left(m'm\right)+v''_1\left(m''m\right)+v'''_1\left(m'''m\right) \\ v_2\left(mm''\right)+v'_2\left(m'm''\right)+v''_2\left(m''m'\right)+v'''_2\left(m'''m'\right) \\ v_3\left(mm'''\right)+v'_3\left(m'm'''\right)+v''_3\left(m''m'''\right)+v'''_3\left(m'''m''\right) \end{array}\right\}=0 \quad \ldots\ldots (4).$$

Per ridurre quest' equazione, osserviamo, 1.° che la somma delle velocità virtuali delle due estremità di una stessa retta, valutate seguendo questa retta, è nulla, mediante quello che abbiamo provato sopra e ne segue che

$$v_1+v'_1=0,\quad v_2+v''_1=0,\quad v'_2+v''_2=0,$$
$$v'_3+v'''_2=0,\quad v''_3+v'''_3=0,\quad v_3+v'''_1=0;$$

2.° che le forze rappresentate dalle stesse lettere sono uguali, vale a dire che

$$\left(m\,m'\right)=\left(m'\,m\right),\quad \left(m\,m''\right)=\left(m''\,m\right),\quad \left(m'm''\right)=\left(m''m'\right),$$
$$\left(m'm'''\right)=\left(m'''m'\right),\quad \left(m''m'''\right)=\left(m'''m''\right),\quad \left(m\,m'''\right)=\left(m'''m\right),$$

Donde resulta

$$v_1\left(mm'\right)+v'_1\left(m'm\right)=0,$$
$$v_2\left(mm''\right)+v''_1\left(m''m\right)=0,$$
$$v'_2\left(m'm''\right)+v''_2\left(m''m'\right)=0,$$
$$v'_3\left(m'm'''\right)+v'''_2\left(m'''m'\right)=0,$$
$$v''_3\left(m''m'''\right)+v'''_3\left(m'''m''\right)=0,$$
$$v_3\left(mm'''\right)+v'''_1\left(m'''m\right)=0;$$

sottraendo dunque dall' equazione (4) i termini che si distruggono, ci rimarrà solamente

$$Pp+P'p'+P''p''+P'''p'''=0,$$

vale a dire il principio in questione. Se si avesse un maggior numero di forze, la dimostrazione sarebbe evidentemente la stessa.

Applichiamo il principio delle velocità virtuali ad alcune questioni di statica.

Sia O il punto d'appoggio di una leva AB (*Tav.* CLXXXIV, *fig.* 2) tenuta in equilibrio dalle forze P e P' applicate alle sue estremità; si tratta di determinare il rapporto delle forze P e P'. Supponiamo che un piccolo moto sia stato impresso alla leva, e siccome questa leva non può muoversi che girando intorno del suo punto d'appoggio O, se A'B' rappresenta la sua nuova posizione abbiamo

$$A'O=AO,$$
$$B'O=BO,$$
$$\text{angolo } AOA'=\text{angolo } BOB';$$

dal punto A' conduciamo A'*m* perpendicolare sulla direzione di AP, e dal punto B' conduciamo B'*q* perpendicolare sopra BP' prolungata; A*m* sarà la velocità virtuale della forza P, e B*q* la velocità virtuale della forza P', l'una e l'altra va-

lutate seguendo la direzione della loro forza, ed avremo, in virtù del principio (1)

$$P \times Am - P' \times Bq = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (5),$$

poichè Bq dev' essere presa col segno $-$.

Dai punti A' e B' conduciamo le perpendicolari $A'n$ e $B'r$ sopra A; i due triangoli rettangoli $A'On$ e $B'Or$ saranno simili e daranno

$$A'O : B'O = A'n : B'r.$$

Ma

$$A'n = Am, \quad B'r = Bq;$$

così questa proporzione equivale allo stesso che

$$AO : BO = Am : Bq.$$

Ora, si deduce dall' equazione (5)

$$P' : P = Am : Bq;$$

dunque, paragonando con la precedente,

$$AO : BO = P' : P,$$

vale a dire che, nel caso dell' equilibrio, le forze stanno in ragione inversa dei loro bracci di leva.

Cerchiamo ancora le condizioni dell' equilibrio di due corpi pesanti attaccati insieme mediante un filo inestensibile, che passa sopra una puleggia di rinvio E (*Tav.* CLXXXIV, *fig.* 1), e situati sopra due piani inclinati AB ed AB' della medesima altezza AC addossati l' uno sopra l' altro. Indichiamo con P e P' i pesi di questi corpi, i quali sono delle forze che possiamo considerare come applicate ai loro centri di gravità m ed m' seguendo le verticali mP ed $m'P'$ e ammettiamo che, mediante un piccolo moto impresso al sistema, il punto m sia disceso di una quantità mn sul primo piano, il che fa salire il punto m' sul secondo piano di una quantità $m'n'$, uguale ad mn a motivo del filo inestensibile che lega i due corpi. Abbassiamo dai punti n ed n' le perpendicolari na ed $n'a'$ sopra mP ed $m'P'$, le velocità virtuali valutate nella direzione delle forze P e P' saranno respettivamente $+ma$ e $-m'a'$; dimodochè, nell' equazione delle velocità virtuali,

$$Pp + P'p' = 0,$$

bisognerà fare $p = +ma$, e $p' = -m'a'$; Ma i triangoli simili ABC ed amn da una parte, ACB e $a'm'n'$ dall' altra, danno

$$ma : mn = AC : AB,$$
$$m'a' : m'n' = AC : AB';$$

donde si deduce

$$ma = \frac{AC}{AB} \cdot mn, \quad m'a' = \frac{AC}{AB'} \cdot m'n'.$$

Dunque

$$p = ma = \frac{AC}{AB} \cdot mn$$

$$p' = -m'a' = -\frac{AC}{AB'} \cdot m'n',$$

e l'equazione delle velocità virtuali dà, mediante la sostituzione di questi valori e dopo aver soppresso i fattori uguali mn ed $m'n'$ e il fattor comune AC,

$$P \cdot AB' = P' \cdot AB,$$

il che è identico con la proporzione

$$P : P' = AB : AB',$$

e c'insegna che i pesi P e P', che si fanno equilibrio, stanno tra loro come le lunghezze AB ed AB' dei piani inclinati sopra i quali essi sono posti. (*Vedi* la parola Inclinato)

I precedenti esempii, i cui resultamenti sono stati di già ottenuti, nel corso di quest'opera, mediante considerazioni più dirette, non sono stati dati in questo punto che come una verificazione del principio delle velocità virtuali. Vedi, per le applicazioni di questo principio, il Lagrange, *Mécanique analytique*; il Poisson, *Traité de mécanique*.

VENERE. (*Ast.*) Questo è il più brillante pianeta del nostro sistema e il secondo nell'ordine delle distanze al sole. Viene indicato col carattere ♀.

Si mostra or di mattina or di sera, e si chiama stella vespertina *Espero* o stella mattutina *Lucifero*, secondo che si vede dopo il tramontare, o prima del sorgere del sole. Qualche giorno prima della sua congiunzione con quest'astro, si vede presto la mattina a pochette del sole sotto la forma di una falce, la convessità della quale è rivolta verso di esso. Si dirige a occidente, e a misura che si avanza, il suo moto allenta, e la fase illuminata s'accresce, finchè giunge e un punto in cui si arresta per qualche tempo; allora apparisce in forma di un semicircolo La sua massima lontananza dal sole, *elongazione*, è di circa 50°. In seguito riprende il suo corso verso levante con una rapidità a grado a grado crescente, finchè non giunge al sole. Qualche tempo dopo si vede la sera a oriente di quest'astro in forma rotonda, ma assai piccola; continua il suo andamento verso levante, aumentando di diametro, ma perde di rotondità finchè non è tornata alla figura semicircolare. Finalmente si dirige di nuovo verso ponente, aumentando sempre di diametro, e prendendo la forma di una falce illuminata; poi torna in congiunzione col sole.

Venere è situata tra Mercurio e la Terra. Essa descrive intorno del sole un'orbita quasi circolare, la cui eccentricità non è che circa la settemillesima parte del suo semigrand'asse. La costituzione fisica di questo pianeta deve avvicinarsi molto a quella della terra, poichè questi due corpi offrono dei punti che colpiscono di rassomiglianza nei loro volumi, le loro densità e la durata delle loro rotazioni.

Il diametro di Venere è di 3138 leghe di 2000 tese, e per conseguenza differisce poco da quello della terra. Se per esprimere in numeri i rapporti delle dimensioni di Venere alle dimensioni della Terra si prende quest'ultima per unità, si trova che il diametro di Venere è 0,97 e il suo volume 0,93; la sua massa dedotta dalla teoria, essendo rappresentata da 0,88, ne resulta che la sua densità media è uguale a 0,95, ossia che essa è con pochissima differenza quasi uguale alla densità della terra. Venere è inoltre circondata di un'atmosfera la cui potenza refrattiva non sembra differire da quella della nostra e la sua rotazione sopra se stessa si effettua in $23^{or}\ 21'\ 7'',2$.

L'orbita di Venere essendo racchiusa in quella della Terra, questo pianeta ci presenta le stesse apparenze di Mercurio (*vedi* questa parola) vale a dire che essa sembra oscillare intorno del sole.

Venere ha delle fasi come la luna. Alcune volte si vede passare sul disco solare dove essa projetta una piccola macchia nera. (*Vedi* Passaggio.)

Ecco i suoi elementi riferiti al primo Gennajo 1801.

Semigrand' asse, quello della terra essendo 1	0,7233316
Eccentricità in parte del semigrand' asse	0,0068607
Diametro equatoriale, quello della terra essendo 1 . . .	0,9750000
Periodo siderale medio in giorni medj	224,7007869
Inclinazione dell' Orbita	3° 23′ 28″,5
Longitudine del nodo ascendente	74 54 12 ,9
Longitudine del perielio	128 43 53 ,1
Longitudine media dell' epoca	11 33 30 ,0

I passaggi di Venere sopra il sole nel 1761 e 1769 ci fecero conoscere le vere distanze del sole e di tutti i pianeti dal sole. *Vedi* PASSAGGIO.

Il tempo in cui Venere getta più luce, non è già quello in cui essa è piena, ma per lo contrario quando è falciata; lo che proviene perchè essa trovasi allora molto più vicina alla terra di quello che quando è piena; in quest'ultimo caso, la sua distanza diventando troppo grande, fa che essa comparisca troppo piccola, e che la forza della luce rapporto alla terra, diminuisca più di quello che non aumenta la parte luminosa e visibile.

Supponiamo che la Terra sia in T (*Tav.* CCLXVIII, *fig.* 1) e che MEN sia l'orbita di Venere; lo splendore più grande di Venere non succede punto allorchè Venere è in N, e che essa è piena rapporto alla Terra che è in T; ma quando questo pianeta è quasi al punto P della sua orbita, dove apparisce in falce; suppongo, per esempio, che Venere sia quattro volte più vicina alla Terra nel punto P, di quello che quando essa è in N; è evidente che una medesima parte del disco luminoso di Venere sarà sedici volte più grande; perciò quantunque non possiamo vedere allorchè Venere è in P, che da circa la quarta parte del suo disco illuminato; egli è tuttavia vero che il suo splendore è molto più aumentato a motivo della sua prossimità, che non dev'essere indebolito per la perdita che ne facciamo di una parte del disco.

Se vogliamo precisamente conoscere qual debba essere la situazione di Venere perchè ci comparisca nel suo più grande splendore, si può vedere nelle *Transazioni filosofiche* n.° 349; ma eccone ancora una più semplice del signor Cagnoli, valente astronomo di Verona.

Date le distanze di Venere e della terra dal sole, trovar la situazione di Venere, rapporto alla terra, allorchè questo pianeta ci apparisce nel suo massimo splendore.

Sia S il sole (*Tav.* CCLXVIII, *fig.* 2), T il luogo della Terra, V quello di Venere. Si chiami D la superficie del disco apparente di questo pianeta; P la parte illuminata di questo disco veduta dalla terra; V la parallasse annuale TVS, y la distanza TV, m la distanza TS, e n la distanza SV.

Si ha questa proporzione, la quale si dimostra nei corsi di Astronomia

$$D : P :: 2 : \text{sen } V \,.\, TVX :: 2 : 2 \text{ sen}^2 \frac{1}{2} TVX :: 1 : \cos^2 \frac{1}{2} V.$$

Le superficie sono come i quadrati dei diametri, e i diametri sono in ragione inversa delle distanze; dunque

$$D = \frac{1}{y^2};$$

e per conseguenza

$$\frac{1}{y^2} : P :: 1 : \cos^2 \frac{1}{2} V = Py^2$$

prendendo le differenziali,

$$-dV \operatorname{sen} \frac{1}{2} V \cos \frac{1}{2} V = y^2 dP + 2yP dy.$$

Secondo la legge del massimo, quando la luce di Venere è la più grande,

$$dP = 0.$$

dunque resta

$$2yP dy = -\operatorname{sen} \frac{1}{2} V \cos \frac{1}{2} V . dV,$$

e sostituendo il valore di

$$P = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} V}{y^2}.$$

$$2dy \cot \frac{1}{2} V = -y dV,$$

dande si ricava,

$$dy : -dV :: y : 2 \cot \frac{1}{2} V.$$

Il segno negativo è in questo caso indifferente, poichè non indica altro che la diminuzione dell'angolo V, allorchè la distanza TV aumenta. Ma le distanze TS e SV essendo date, e per conseguenza costanti, si ha per un triangolo rettilineo,

$$dy : dV :: y : \cot. T.$$

Confrontando questa analogia colla precedente, ne resulta che al momento del maggiore splendore di Venere

$$\cot T = 2 \cot \frac{1}{2} V.$$

Si potrebbe contentarsi di questa soluzione, la quale sarebbe bentosto calcolata mediante false posizioni. Ma se vogliamo avere direttamente il valore di y in m ed n, è facile il ricavarlo dall' ultima equazione

$$2 \cot \frac{1}{2} V = \cot T = \frac{\cos T}{\operatorname{sen} T} = \frac{m \cos T}{n \operatorname{sen} V}.$$

Dunque

$$\frac{m \cos T}{2n} = \operatorname{sen} V \cot \frac{1}{2} V = 2 \cos^2 \frac{1}{2} V.$$

Ma

$$\cos T = \frac{y^2 + m^2 - n^2}{2my}$$

e

$$\cos^2 \frac{1}{2} V = \frac{y^2+n^2-m^2+2ny}{4ny}.$$

Sostituendo e riducendo, si trova

$$y^2+4ny = 3m^2-3n^2,$$

donde si ricava

$$y = \sqrt{3m^2+n^2}-2n.$$

Questa è l' equazione di Halley che fa conoscere la distanza di Venere dalla terra per mezzo dei raggi vettori di questi due pianeti. Ma questa distanza non serve ad altro, che a trovare l' elongazione per i tre lati del triangolo, nel mentre che il signor Cagnoli trova immediatamente l'elongazione per mezzo dei raggi vattori; e questa soluzione conduce più direttamente allo scopo.

Partendo dall' equazione

$$\cot T = 2 \cot \frac{1}{2} V,$$

si ha

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} V = 2 \operatorname{tang} T;$$

ma dai trattati d' Astronomia si sa che

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} V = \frac{\operatorname{sen} V}{1+\cos V},$$

dunque

$$\frac{\operatorname{sen} V}{1+\cos V} = \frac{2 \operatorname{sen} T}{\cos T};$$

donde si deduce

$$\cos T = \frac{2 \operatorname{sen} T}{\operatorname{sen} V}\left(1+\cos V\right)$$

$$= \frac{2n}{m}\left(1+\cos V\right).$$

Ma

$$\cos V = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 V} = \sqrt{1-\frac{m^2 \operatorname{sen}^2 T}{n^2}}$$

$$= \frac{1}{n}\sqrt{n^2-m^2 \operatorname{sen}^2 T}.$$

Dunque

$$\cos T = \frac{2n}{m}\left(1+\frac{1}{n}\sqrt{n^2-m^2 \operatorname{sen}^2 T}\right),$$

donde si ricava

$$m \cos T-2n = 2\sqrt{n^2-m^2 \operatorname{sen}^2 T},$$

oppure

$$m^2\cos^2 T - 4mn\cos T + 4n^2 = 4n^2 - 4m^2 \operatorname{sen}^2 T.$$

Mettendo $1-\cos^2 T$ invece di $\operatorname{sen}^2 T$, riducendo e trasportando, si ha

$$3m^2\cos^2 T + 4mn\cos T = 4m^2,$$

e dividendo per $3m^2$

$$\cos^2 T + \frac{4n}{3m}\cos T = \frac{4}{3}.$$

Risolvendo quest' equazione coi metodi ordinarj, si trova

$$\cos T = \frac{2n}{3m}\left(\sqrt{1+\frac{3m^2}{n^2}} - 1\right).$$

Per calcolare questa formula con facilità, chiamando A un arco qualunque, converrà ricordarsi che

$$\sec^2 A = 1 + \operatorname{tang}^2 A,$$

il che dà

$$\frac{1}{\cos A} = \sqrt{1+\operatorname{tang}^2 A}.$$

Dunque se si fa

$$\frac{3m^2}{n^2} = \operatorname{tang}^2 A,$$

avremo

$$\sqrt{1+\frac{3m^2}{n^2}} = \frac{1}{\cos A},$$

e per conseguenza

$$\cos T = \frac{2n}{3m}\left(\frac{1}{\cos A} - 1\right) = \frac{2n}{3m}\left(\frac{1-\cos A}{\cos A}\right);$$

Ma per ipotesi

$$\operatorname{tang} A = \frac{m\sqrt{3}}{n},$$

donde si ricava

$$\frac{1}{\cos A} = \frac{m\sqrt{3}}{n \operatorname{sen} A}.$$

Sostituendo questo valore nell' equazione precedente, si ha

$$\cos T = \frac{2n}{3m}\cdot\frac{m\sqrt{3}}{n\operatorname{sen} A}\left(1-\cos A\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\cos A}{\operatorname{sen} A}$$

$$= \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}A}{\sqrt{3}}$$

Così, il problema della più gran luce di Venere è sciolto con due formole ben semplici, la prima delle quali dà un angolo A, che quindi serve nell'altra a far conoscere l'angolo T, o l'elongazione cercata, per il momento della più gran luce.

MACCHIA DI VENERE.

Cassini e Campani negli anni 1665 e 1666, scoprirono le macchie sul disco di Venere, per mezzo delle quali si procurò di determinare il movimento che ha questo pianeta intorno al suo asse. Si può vedere intorno alle macchie di Venere, l'opera del Bianchini pubblicata a Roma nel 1728, in-fol. sotto questo titolo: *Hesperi et phosphori phænomena, sive observationes circa planetam Venerem*, ec., cioè nuovo fenomeno del pianeta di Venere, o descrizione delle sue macchie, il giro intorno al suo asse in ventiquattro giorni e otto ore, il parallelismo del medesimo asse, e la parallassi di questo pianeta, dedicata a Giovanni V, re di Portogallo. Ci si trova soprattutto l'osservazione delle macchie di Venere che lo stesso fece nel 1726; egli le vide, e le distinse assai chiaramente per stabilirci, secondo il suo detto, verso il mezzo del disco, sette mari che si comunicano per via di quattro stretti, e verso l'estremità degli altri mari senza comunicazione coi primi; le parti che sembravano distaccarsi dal contorno di codesti mari, furono da lui chiamate promontorj; egli ne contò otto, e diede dei nomi a questi mari a questi stretti e a questi promontorj. Gli astronomi si servono del privilegio dei celebri navigatori, i quali facendo delle scoperte di terre sconosciute, impongono loro dei nomi.

Il Bianchini ci determina anche l'asse della rotazione di Venere, e la sua rotazione medesima, che egli fissa a ventiquattro giorni e otto ore, con un parallelismo costante dell'asse di Venere sulla sua orbita. Si può ancha vedere ciò che ne disse Fontenelle, e gli estratti che furono fatti dell'Opera del Bianchini, nella *Biblioteca Italica*; ma dobbiamo avvertire che il Cassini è assai lontano dall'ammettare i resultamenti del Bianchini.

Si eredette anche aver scoperto un satellite presso di Venere, ma, niente si è scoperto. Sembra infatti che sieno stati dati soltanto ai pianeti superiori.

VENTILATORE. (*Mec.*) Apparecchio che serve a rinnovare l'aria nei luoghi bassi e chiosi. Il ventilatore propriamente detto non è che un soffietto, ma si ottiene ancora il rinnovamento dell'aria mediante l'aiuto dei fornelli di richiamo che stabiliscono una corrente. (*Vedi* le *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1768; l'*Art d'exploiter les mines de charbon de terre*, del Morand; e gli *Annales des mines*, 1802.)

VENTO. (*Mec.*) Di tutti i motori fisici, il *vento* è quello la cui azione è la più irregolare; così esso non è applicabile che ai lavori atti ad aumentarsi, a diminuirsi ed ancora interrompersi senza inconveniente. La potenza del vento dipende dalla massa d'aria in moto e dalla sua velocità; ma non possiamo misurarlo, mediante il prodotto del peso dell'aria che agisce moltiplicato per la velocità, come si fa per l'acqua motrice, perchè l'elasticità di questo fluido e la sua natura gassosa non permettono di paragonarlo ad un liquido. Da ciò evidentemente si deduce che la forza motrice del vento non è stata sottoposta al calcolo che mediante esperienze. Il Christian nella sua Meccanica riassume con altrettanta semplicità che chiarezza le osservazioni, di cui il vento e la sua forza d'impulsione formano l'oggetto.

» Il moto di traslazione più o meno rapido, dice egli, che diverse porzioni dell'atmosfera subiscono, e che si chiama vento, sembra provenire principalmente dal riscaldamento o dal raffreddamento delle masse atmosferiche parziali.

» Quando l' aria è riscaldata, il suo volume aumenta, per conseguenza un volume d' aria calda pesa meno d' un volume d' aria fredda. Quando dunque una certa massa d' aria è stata riscaldata, essa tende a salire per dar luogo all' aria più fredda. Così vi è luogo di credere che l' atmosfera che circonda la terra, e che è inegualmente riscaldata da questa in ragione dell' ora e della stagione, sia assoggettata ad una cagione continua di variazioni e di agitazioni, donde risultano o le correnti costanti e periodiche, che si osservano in alcuni mari, sotto il nome di *venti regolari*, o le correnti variabili, che si distinguono col nome generale di *vento*.

» La conformazione della superficie delle varie regioni della terra influiscono potentemente sulla direzione dei venti: le catene delle montagne, le foreste, i bacini dei fiumi, le colline stesse, che attraversano un paese su diversi punti, rompono le correnti atmosferiche, le rimuovono e le rimandano in tutti i sensi, tanto variabilmente quanti sono gli accidenti e gli ostacoli ch' esse incontrano sul loro passaggio.

» Egli è da questo stato di variazione che l' industria deve in generale prendere il vento per farlo servire di motore; e per ciò ottenere conviene che l' industria acconci le sue disposizioni meccaniche ai numerosi cangiamenti non solo di direzione, ma ancora di potenza d' azione: imperocchè le cagioni, che rompono l' equilibrio delle colonne atmosferiche e le mettono in moto, essendo esse stesse variabili, egli è evidente che gli effetti ne sono essi pure variabili, vale a dire la velocità del moto di traslazione dell' aria, da cui dipende la forza motrice dei venti.

» I luoghi in cui questo motore si presenta con maggiore vantaggio sono le pianure e i punti culminanti di una contrada; qualchè volta pure in certa posizioni all' entrata o all' uscita di una gola di montagne. Là i venti seguono il loro moto naturale senza incontrare ostacoli che li rompano o li disviino: quindi la disposizione dei luoghi può esser tale, che rimandi il vento derivato da molti punti dall' orizzonte verso un altro che conviene scegliere per istabilire l' uso di questo motore.

» Checchè ne sia di tutti i motori inanimati, il vento è l' ultimo al quale si deve in generale aver ricorso per la maggior parte dell' operazioni industriali; e non è ordinariamente impiegato che in quei paesi ove i corsi d' acqua mancano, e dove il vento regna abitualmente con maggior forza, vale a dire nelle aperte pianure. In difetto di altri motori occorre qualche volta di farne uso.

» Non puossi negare fra tanto che un tal motore non sia molto economico, senz' esserlo però più dell' acqua; ma egli ha sopra questa un vantaggio tutto suo proprio, quello cioè di presentare moto sopra una superficie maggiore tanto in lunghezza che in larghezza. Infatti in estesa pianura il numero dei punti, in che possonsi formarsi dagli opifici mossi dalla forza del vento è considerevole; ciocchè non potrebbesi ottenere con un corso d' acqua: ma questa si riunisce, si dirige, e può registrarsi nella sua forza, per ottenere degli effetti molto regolari. L' azione del vento conviene prenderla come essa è, e quando ha luogo, senza potere influire nè sulla sua forza assoluta nè sulla sua direzione; e il lavoro che fa questo motore è pure irregolare come lo è egli stesso ».

Tutte le operazioni meccaniche, che esigono una potenza motrice costante e regolare, tutte quelle che si compongono d' una serie di lavori dipendenti gli uni dagli altri, ed ai quali è applicata molta mano d' opera, non possono dunque essere raccomandati a questo motore, che solo conviene a certe operazioni le quali non vogliono che il concorso di poche braccia, e di cui il lavoro può aumentare o diminuire, ed interrompersi senza inconvenienti. Tali sono, a cagion d' esempio, quelle dei molini ordinari per la polverizzazione delle galle,

dei grani, e dei semi per trarne olio; quelle delle seghe ordinarie, e principalmente quelle delle irrigazioni e dei prosciugamenti.

Malgrado gl' inconvenienti che trovansi inerenti all' impiego del vento come motore, esso è in uso dappertutto e da molto tempo, ed è tradizione che fosse conosciuto in Oriente prima delle Crociate e in Francia prima ancora di questo tempo. Oggi giorno s' impiega il vento in quello stesso modo con cui l' impiegavano gli antichi, vale a dire in operazioni della natura di quelle onde abbiamo parlato.

Un tal motore presenta un fatto curioso, che non è sfuggito a chi scrisse su questo argomento; ed è che il modo comune com' è in generale adottato, di ricevere cioè l' azione di questo motore per trasmetterlo al lavoro, s' accosta di di molto a quella perfezione, cha potrebbesi sperare d' ottenere con le ricerche scientifiche le più felici.

Gli uomini che hanno approfondito questa materia e con esperienze dirette e colle loro osservazioni sull' uso ordinario della forza motrice del vento, s' accordano a dire cha non si può sperare di portarvi innovazioni vantaggiose di qualche importanza: noi poi siam d' avviso essere più utile di studiare perfezionamento nel modo d' applicazione in generale adottato, di quello che intraprendere di cangiarne il sistema e le forme principali.

La potenza del vento dipende dalla massa d' aria agente e dalla velocità di questa massa: Tuttavolta questa potenza non può misurarsi direttamente, come l' abbiamo detto sopra, pel prodotto del peso dell' aria agente moltiplicato per la sua velocità; la natura di questo corpo, la sua elasticità, il modo secondo il quale la sua azione può essere ricevuta, non permettono evidentemente di supporre che la sua forza impulsiva possa essere assoggettata a questo genere di calcolo. Non puossi più oltre sottoporla a quei metodi, dietro i quali la forza impulsiva dei liquidi è calcolata: ciò facilmente verrà compreso da quelli che hanno studiato le leggi che regolano questa parte dell' idraulica.

Con esperienze dirette, la forza motrice dell' aria si è calcolata. Quest' esperienze hanno dato i resultamenti seguenti:

Velocità del Vento.	Pressione esercitata sopra una superficie di un piede quadrato. (10, 5 dec. quad.) grammi	Nomi volgari dati a questi generi di venti.
0,45	2,2	Vento appena sensibile
0,90	9	Venticello leggero regolare.
1,34	19,9	»
1,38	35,8	Vento fresco.
2,23	55,7	»
4,47	223	Vento disteso.
6,70	502	»
8,94	892,3	Forte venticello regolare.
11,17	1394,3	»
13,41	2008,3	Vento impetuoso.
15,65	2733	»

17,88	3570	Vento impetuoso di Terra.
20,12	4617	"
22,35	5577	Tempesta.
26,82	8032	Gran Tempesta.
35,77	14278	Oragano.
44,71	22309	Oragano che schianta gli alberi ed abbatte le case.

L' esperienza venne fatta disponendo la superficie perpendicolarmente all' azione del vento. Quest' esperienza non può dunque dare che resultamenti relativi a ciò che concerne ai molini de' quali le superficie destinate a ricevere l' azione del vento ed a trasmetterla; non sono disposte perpendicolarmente a quest' azione, ma la ricevono al contrario sotto un certo angolo, e per conseguenza non ne trasmettono che una piccola parte, siccome or ora spiegheremo.

Del resto, l' uso insegna che ad una velocità di quattro metri per secondo, (quella che esercita contro una superficie d' un piede quadrato, disposta perpendicolarmente per riceverla, un' azione circa di $\frac{1}{5}$ di chilog.) l' azione contro le vele è troppo debole per la macinazione del grano, e quando al contrario la velocità è di otto metri, occorre di raccogliere le vele per evitare la rottura delle ali.

La tabella superiormente data addimostra che la pressione del vento cresce come il quadrato della velocità, vale a dire che in una velocità doppia la pressione è quadropla. L' esperienza pure ha fatto conoscere che le pressioni crescono in un maggior rapporto che le superficie esposte al vento. Così la pressione in una velocità di $6^m,7$ è di un mezzo chilogrammo sopra un piede quadrato, e sarebbe essa, colla stessa velocità, poco più di un chilogrammo sopra una superficie di due piedi quadrati.

VENTO. (Molini a vento.) (*Mec.*). Macchine messe in moto dall' azione del vento.

L' applicazione dei diversi principii stabiliti alla parola Vento non si possono direttamente far servire all' arte di costruire de' molini a vento. Abbiamo detto infatti alla parola Vento che la superficie sulla quale le esperienze furono fatte, era disposta perpendicolarmente all' azione del vento; ora nei molini le superficie che rimandano l' azione del vento, non possono evidentemente essere così disposte. Egli è chiaro che per far servire il vento di motore senza soccorso d' alcuna forza straniera, conviene che molte superficie siano disposte in modo, che l' una essendo mossa e strascinata dal vento, ne conduca un' altra sotto la sua azione, e che così esse si presentino successivamente per ricevere un tale impulso; ovvero (ed è il caso più generale) debbono essere disposte in modo, per riguardo al vento, che possano contemporaneamente riceverne l' impulso e muoversi attorno d' un punto fisso mediante il quale la forza motrice verrà tramessa. Così a cagion d' esempio se, avendo disposto due grandi pezzi di legno in croce attorno d' una ruota, si aggiunge sopra ciascuno dei quattro bracci una tela stirata sopra un telaio leggero, affinchè queste tele vengano investite dal vento: e se queste vele sono disposte nello stesso piano, vale a dire, se non compongano che una stessa superficie piana coi quattro bracci, egli è chiaro ch' esse non gireranno: e se d' altronde sono esposte perpendicolarmente all' azione del vento, questo non produrrà altro effetto che uno sforzo generale e simile d' impulso contro tutte le vele in uno stesso tempo, e contro l' apparecchio che le sostiene, e per conseguenza tenderà a rovesciarlo.

Se al contrario ognuno dei telai, cui sono affidate le vele è inclinato intorno del braccio che lo sorregge, e nel medesimo senso, ed in modo da presentarsi obliquamente al vento quando l'asse cui sono raccomandati trovisi nella stessa direzione del vento (come nel precedente caso) allora l'apparecchio dovrà girare.

Quando una palla elastica poggiata contro un ostacolo resistente, è colpita in modo che la forza impulsiva passi pel suo diametro e sia perpendicolare all'oggetto resistente, come la sponda di un biliardo, si sa che la palla, qualunque sia d'altronde la forza motrice, non si muove, e tutta la forza dall'urto si annienta nella sponda del biliardo, purchè l'oggetto che ha colpito la palla rimanga fermo contr'essa; imperocchè senza di ciò l'elasticità della sponda rimanderebbe la palla nel senso contrario alla linea dell'urto che l'ha colpita. E se al contrario l'urto è dato obliquamente, la palla di necessità sfugge, e si muove seguendo una linea obliqua alla sponda, e con una velocità, che la legge di composizione e di decomposizione delle forze, permette di calcolare.

Accade lo stesso del principio che abbiamo or ora esposto dell'azione del vento contro le ali del molino a vento. Se le superficie che ricevono la sua azione, gli sono perpendicolari, tutto lo sforzo si annienta nell'asse: se esse gli sono oblique, una parte dello sforzo è perduta, e l'altra fa costantemente sfuggire la superficie colpita. Così si produce e si mantiene il moto di rotazione.

Si vede d'altronde che siccome un tal movimento non ha luogo che in sequela di una decomposizione di forze, i calcoli che precedentemente abbiam dati, non possono offerire che delle indicazioni relative. In quanto alla valutazione della forza che agisce effettivamente sulle ali del molino secondo la loro superficie, la loro inclinazione e la velocità del vento, essa si è sin qui sottratta ai calcoli della scienza, e si è, come dicemmo, potuto soltanto verificare coll'uso (in materia di costruzione di molini) che sembra essersi avvicinata a molto perfezionamento, quasi fosse stata diretta dalla scienza.

Tuttavolta i molini potrebbero fornire materia ad osservazioni utili tanto alla scienza quanto a coloro che impiegano questo genere di macchine. Il Coulomb, di cui citammo le belle ricerche per ciò che concerne alla forza dell'uomo, ha molto studiato i molini, e ne ha dedotto alcuni interessanti resultamenti, ma ch'egli non ha potuto recare tant'oltre come sarebbe stato necessario. »Nelle mie osservazioni, dic'egli, non faceva che seguire in silenzio il lavoro del mugnaio, ed io non influiva in nulla sulle sue operazioni. Avrei voluto in seguito disporre del molino e variarne i moti. Con ciò mi sarei procurato una serie di esperienze per istabilire la teoria di queste macchine sopra un maggior numero di dati: ma quando i proprietari di questi molini seppero l'uso ch'io ne voleva fare, non potei mai riuscire a persuaderli di affittarmene uno per pochi mesi. In tutte le arti, dove chi opera è poco istruito, o per meglio dire ove non si tratta, come in questo caso, che d'un semplice lavoro, egli s'immagina che la pubblicità delle sue manipolazioni possa nuocere ai suoi interessi, e vede con dispiacere il curioso che interroga, che osserva, e che dopo alcuni istanti di esami può calcolare i prodotti della macchina, e i profitti del proprietario». Questa riflessione del Coulomb è giusta; ed è fuor di dubbio che tale timore degl'industriosi è una delle cagioni che impediscono più fortemente i progressi delle arti meccaniche: nè tale diffidenza esiste soltanto fra quelli che agiscono nelle arti di poca importanza, ma spesso ancora fra quegli stessi che dirigono industrie di prim'ordine, e i quali privi di una sviluppata istruzione industriale, non conoscono la necessità delle investigazioni, della scienza e in conseguenza del profitto che ne potrebbero ritrarre. Questa inerzia e questa diffidenza sono adunque le cagioni principali del ritardamento della nostra industria: e non saranno mai troppi quei molti sforzi che si faranno per isradicarle.

Checchè ne sia di tali difficoltà, le ricerche del Coulomb non sono state del tutto sterili; e di queste prenderemo le principali particolarità. Ciò che si leggerà in seguito non merita solamente attenzione pei resultamenti che vi sono stabiliti, ma eziandio pel modo con cui essi lo sono, e che servir debbono di modello quando si vogliano studiare macchine e rendersi ragione dei loro effetti.

» Nei molini, dice il Coulomb, destinati a segare il legno, a macinare il grano, o a produrre degli effetti, la misura dei quali non può essere ridotta in peso che mediante esperienze complicate, riescirebbe forse difficilissimo il misurare la quantità dell' effetto di un dato vento; ma ne' molini in cui i pestelli (pile) innalzati, ricadono da una data altezza, siccome si può misurare il peso d'ognuno di essi pestelli, il numero di questi innalzato in un minuto, ed inoltre la velocità del vento, si otterrà facilmente la quantità di effetto che tali macchine producono in un dato tempo: poichè la quantità d' effetto di una macchina, ha per misura il prodotto dell' altezza pel peso innalzato.

» In tutta la Fiandra, e principalmente presso la città di Lilla, vi è una grandissima quantità di molini a vento, che innalzano pestelli per triturare il seme di colza (cavolo rapa) ed estrarne l' olio. Tali molini, in quanto alle dimensioni e alla lunghezza delle ali, sono simili a quelli che servono in quella stessa provincia per la macinazione del grano (*Tav.* CCXLIX, *fig.* 1 e 2); ed ecco minutamente le misure medie delle principali parti di queste macchine.

» I volanti hanno da un' estremità di un' ala all' ala opposta una lunghezza di 76 piedi; la larghezza dell' ala è poco più di piedi 6, di cui cinque sono formati da una tela attaccata sopra un telaio, e l' altro piede da una tavola leggerissima. La linea di congiunzione di detta tavola e della tela, forma dalla parte urtata dal vento un angolo sensibilmente concavo al principio dell' ala, e che andando sempre diminuendo, svanisce all' estremità dell' ala stessa. Il pezzo di legno che forma il braccio e sostiene il telaio, è situato a tergo di detto angolo, la superficie dalla tela è curva; ma i costruttori dei molini non hanno alcuna regola fissa per tracciarla, quantunque la considerino come il segreto dell' arte. Sembra generalmente che ci si allontani di poco dalla verità supponendo la superficie dell' ala composta di linee retto perpendicolari al braccio dell' ala stessa, e corrispondenti con un' estremità all' angolo concavo formato dalla congiunzione della tela e della tavola, e l' altra estremità situata in modo che al principiare dell' ala a sei piedi dall' albero, le linee rette formino coll' asse dell' albero un angolo di 60 gradi, dimodochè all' estremità dell' ala quest' angolo sarebbe di 78 a 84 gradi, e quest' aumento di 78 a 84 avviene a misura che l' asse di rotazione è più inclinato all' orizzonte. Frattanto il lato sinistro che formerebbe l' ala, in seguito di tale descrizione, non è bene stabilito, a invece di essere terminato da una linea retta, a ciò ordinariamente dalla parte sotto vento, lo è da una curva, la cui maggiore concavità è di 2 o 3 pollici.

» L' albero girante, e al quale le ali sono attaccate, inclina all' orizzonte di 8 a 15 gradi. Esso è guernito di sette travi di 42 pollici di lunghezza, che passandolo da parte a parte trasversalmente, formano 14 piuoli o leve, cioecchè gli dà la forma e il nome di *ricciaia posticcia*. Queste leve corrispondono a quelle di sette pestelli, che possono essere innalzati ognuno due volte nel tempo che l' albero fa un intero giro.

» Di questi sette pestelli cinque sono di pezzi di legno di quercia ordinariamente di 20 a 22 piedi di lunghezza, sopra 9 a 11 pollici di riquadratura, armati con puntazza di ferro di 50 a 60 libbre, e servono a sminuzzare il seme. Tali pestelli pesano presso a poco 1020 libbre ognuno; e i due altri pestelli hanno la stessa lunghezza, ma non hanno che 6 a 7 pollici di riquadratura, e sono destinati a chiudere e dischiudere dei cunei per estrarre l' olio mediante una forte

compressione. Questi due ultimi pestelli sono circa del peso di 500 libbre, e generalmente non ve ne è che uno solo in azione: i cinque primi agiscono insieme quando il vento è bastante.

» Esaminando l' effetto di questi molini, la prima osservazione importante che si presentò, fu questa, che con un vento medio che puossi stimare da 18 a 20 piedi per secondo, più di 50 molini posti ad un quarto di lega da Lilla nella stessa posizione, producevano presso a poco la stessa quantità d' effetto, benchè vi fossero molte piccole differenze nella costruzione di detti molini, sia relativamente all' asse di rotazione, sia relativamente alla disposizione delle ali. Da questa osservazione puossi, come sembrami, trarre un' interessantissima conclusione; essere cioè possibile che a forza di andar tentoni, la pratica si sia di molto ravvicinata al grado di perfezionamento.

» Ed ecco ora l' esperienze, dietro le quali si è valutato l' effetto dei molini in discorso in una media annata.

» Si misurò e si osservò la velocità del vento, con piume leggerissime, che questo vento trascinava: due uomini posti sopra un luogo di piccola elevazione e nella direzione del vento, osservavano il tempo che una di dette piume impiegava a percorrere 150 piedi.

» 1.ª *Esperienza.* Il vento percorre 7 piedi per secondo. Quando il molino è libero, e quando nissun pestello si trova elevato, le ali del molino fanno cinque giri e mezzo per minuto; ma mettendo in azione un solo pestello di 1020 libbre, ed elevandolo due volte per 18 pollici d' altezza in ogni giro dell' ala, il molino fa appena tre giri per minuto.

» 2.ª *Esperienza.* Il vento percorrendo 12 a 13 piedi per secondo, le ali fanno 7 a 8 giri per minuto; e non vi sono che due pestelli di 1020 ed uno di 500 libbre che siano in azione. Con tale grado di moto il molino perviene a dare una botte di 200 libbre d' olio in 24 ore.

» 3.ª *Esperienza.* Il vento percorrendo 20 piedi per secondo, le ali fanno 13 giri in un minuto; cinque pestelli di 1020 libbre ognuno sono posti in azione unitamente ad un altro di 500 libbre; le quattro ali del molino portano tutte le loro vele, e si fabbricano tre botti e mezzo d' olio in 24 ore. Questo grado di velocità è quello che sembra meglio convenire alla macchina in discorso, ed è almeno quello che il fabbricatore preferisce, non trovandosi menomamente angustiato dal lavoro: un tale vento soffia ordinariamente con una velocità molto uniforme; il molino porta tutte le sue vele senza tema d' inconvenienti, e senza che le commettiture dell' armatura ne soffrano.

» 4.ª *Esperienza.* Il vento soffia con forza e percorre 28 piedi per secondo. I molinari sono obbligati di raccogliere per sei piedi la vela all' estremità d'ogni ala: questa fa 17 a 18 giri in un minuto: e il molino fabbrica circa 5 botti di olio in 24 ore, essendo in azione cinque pestelli di 1020 libbre, ed un altro di 500.

» 5.ª *Esperienza.* I molini da grano, l' ingranaggio dei quali è disposto in modo che la macine fa cinque giri nel tempo che l' ala non ne fa che un solo, non cominciano a girare che quando la velocità del vento è di 10 a 12 piedi per secondo; e allorchè la velocità del vento è di 18 piedi per secondo, le ali del molino fanno 11 a 12 giri per minuto: e questi molini possono macinare, senza abburattare, da 800 a 900 libbre di grano per ora; a qui convien notare che con uno stesso grado di vento i molini ad olio fanno essi pure da 11 a 12 giri per minuto; dimodochè quando avremo calcolato per un vento di 18 piedi per secondo la quantità di effetto che produce il molino da olio, facilmente si valuterà la quantità di resistenza della macine che sminuzza il seme per olio.

» Quando il vento ha 28 piedi di velocità per secondo, le ali del molino da

grano, spiegate che siano tutte le loro vele, fanno spesso sino a 22 giri per minuto, e macinar possono sino a 1800 libbre di farina per ora. Qualche volta i mugnai fanno agire i loro molini coll' anzidetto grado di velocità, malgrado l' enorme riscaldamento che la farina contrae uscendo per di sotto della macine; o sono obbligati allora di cangiare di tempo in tempo la specie di grano che sottomettono alla macinatura per rinfrescare, dicon essi, la loro macine.

» Determineremo ora, dietro l' esperienze che precedono, qual' è l' effetto annuale che i molini producono. Dal notato lavoro di questi molini, per una seria di anni, ho trovato che danno in un' annata media 400 botti d' olio; ora siccome la fabbricazione di una botte d' olio esige presso a poco la stessa quantità di colpi di pestello per ridorre il semo in pasta, dedurremo facilmente dalle nostre esperienze la quantità di colpi di pestello necessari alla fabbricazione di 400 botti, o (ciò che torna lo stesso) il numero dei colpi di pestello dato in una media annata.

» Abbiamo trovato nella terza nostra esperienza che con la velocità media del vento, che è di 20 piedi per secondo, le ali del molino a vento fanno 13 giri in un minuto; e vi erano allora cinque pestelli, pesante ognuno 1020 libbre ed un altro 500, innalzati due volte a 18 pollici di altezza in un giro d' ala; così, siccome l' effetto di una macchina si misura in un dato tempo dal peso innalzato e dalla altezza alla quale perviene; si avrà per l' effetto otteouto in un minuto il prodotto di 1020 libbre per 5, numero dei pestelli, poscia per 13, numero dei giri delle ali in un minuto, e per 2, poichè ad ogni giro d' ala i pestelli sono due volte sollevati; ed il piccolo pestello di 500 libbre, per 13 e per 2, il tutto moltiplicato per un piede e mezzo, ciocchè darà per 24 ore 1.000 libbre innalzati a 313,920 piedi o 313,920 libbre ad un piede. Troviamo pure nella stessa esperienza che quando un tal molino, avente l' anzidetto grado di azione produce tre botti e mezzo d' olio per giorno, poichè produce in un' annata media 400 botti, e che per produrne una occorre lo stesso numero di colpi di pestello, il detto molino lavora con l' azione dovuta ad un vento, la velocità media del quale è di 20 piedi per secondo pel corso di 114 giorni d' ogni anno: e siccome i molini rimangono in riposo le domeniche e gli altri giorni festivi, puossi valutare il loro lavoro continuo nell' istesso modo che trovammo, al terzo dell'annata, o, ciò che torna lo stesso, si può supporre che questi molini lavorino tutta l' annata 8 ore per giorno innalzando un peso di 1,000 libbre a 218 piedi per minuto. »

Chi avrà posto attenzione al fin qui detto sarà rimasto sorpreso senza dubbio della chiarezza e della rettitudine di mente, che rifulge dalle citate esperienze, dall' esposizione che ne è stata fatta dai resultamenti che se ne sono dedotti. Paragoniamo frattanto questi resultamenti a quelli che ci sono cogniti.

Il resultamento a cui perviene il Coulomb, esprimendo il lavoro giornaliero dei molini, e supponendo che agiscano tutto l' anno, è di 1,000 libbre innalzate a 218 piedi per minuto, ossia 489 chilogrammi, 50 alzati 70^{m}, 80, ossia 34,556 chilogrammi elevati a 1 metro in un minuto, ossia 2,063,360 chilogrammi ad 1 metro in un' ora, o finalmente in 8 ore 16 506,880 chilogrammi ad un metro. Si sa d' altra parte che il lavoro giornaliero dell' uomo manovrante alla manovella è di 173,000 chilogrammi innalzati ad un metro; i molini descritti dal Coulomb, e colle dimensioni più sopra indicate, fanno dunque il lavoro di 95 uomini agenti alla manovella. Un' altra esperienza descritta dal Coulomb mostra inoltre che l' attrito assorbisce un sesto della forza impressa dal vento; così la forza motrice della quale può disporsi in un molino della Fiandra, sarebbe esattamente rappresentata dal lavoro di 79 uomini.

Si vede pertanto come tali ricerche siano utili e necessarie. Per mezzo del re-

sultamento onde noi siamo pervenuti, è cosa possibile lo stabilire una comparazione esatta fra i differenti processi che potrebbero usarsi per la fabbricazione dell' olio, o per triturare le galle, o segare i legnami, o finalmente macinare le biade.

Nel Trattato delle Macchine dell' Hachette, noi troviamo un esempio importantissimo di questo genere di confronto. Istituendo sulle cifre date dal Coulomb un calcolo analogo a quello che or ora abbiam fatto, l' Hachette trova che la fabbricazione d' ogni botte d' olio (la botte è di 100 chilogrammi) impiega 14 a 15 mila unità dinamiche, delle quali bisogna detrarre un sesto per la forza consumata dall' attrito, sicchè la fabbricazione di 100 botti d'olio consumerà 12,500 unità dinamiche.

» Dietro una nota, prosegue l' Hachette, che mi è stata comunicata dal Clement, il signor Hall deve stabilire a Lilla una macchina a fuoco della potenza di 10 cavalli, la quale fabbricherà 500 botti d' olio. L' effetto del vapore, corrispondente in un giorno a quello del cavallo, e che viene teoricamente denominato *Cavallo-vapore*, è di 6,000 unità; la forza di 10 cavalli in 24 ore è di 60,000 unità; e dividendo questo numero per 5, si hanno, per la forza impiegata nella fabbricazione di una botte d' olio 12,000 unità.

» A Lilla l' ettolitro di carbone di terra costa due franchi e cinquanta centesimi, e pesa, a misura colma, 100 chilogrammi, mentre a misura rasa pesa solamente 80 chilogrammi. La macchina di Hall consumar deve 500 a 600 chilogrammi di carbone in 24 ore, la spesa del carbone sarà tutto al più di 15 a 16 franchi in pari tempo. Quantunque la forza motrice del vento nulla costi, e che la formazione d' un molino a vento non esige che una piccolissima parte dei capitali necessarii per la costruzione delle macchine a fuoco, nulladimeno egli è probabile che i molini a vento della Fiandra, i quali, secondo il Coulomb, non lavorano che un terzo dell' anno, verranno quanto prima rimpiazzati da macchine, i prodotti delle quali saranno pure costanti, come la forza motrice applicata a queste macchine.

Lo stesso autore pensa che il Coulomb faccia errore quando valuta ad 800 o 900 libbre la quantità di grano che un molino può macinare grossolanamente in un' ora di tempo, con una velocità del vento di 20 piedi per secondo.

» Un molino da grano, die' egli, la macine girante del quale abbia due metri di diametro e faccia per minuto 67 rivoluzioni, ha dato due quintali metrici di farina greggia (crusca e farina unite) in un' ora e quindici minuti, ovvero un quintale in trentasette minuti e mezzo. L' ettolitro di grano pesava 75 chilogrammi e tre decimi; e una tale esperienza fu fatta in uno dei molini del Corbeil. Questo molino era posto in moto da una ruota idraulica ad ali o pale; ed avendo misurato la resistenza applicata all' albero girante della ruota, e conosciuto il numero delle sue rivoluzioni in un tempo dato, ho determinato (facendo variare la resistenza) qual fosse la velocità di rotazione, che corrispondeva al *maximum* di effetto dinamico, ed ho trovato, pel valore di questo effetto in un' ora 1,321 unità dinamiche, ognuna di 1,000 chilogrammi innalzati ad un metro, da cui ne segue che la macinatura grossolana di un quintale di grano, ha consumato 825 unità dinamiche.

» Ne' molini da grano di costruzione inglese, come quelli che sono stabiliti a Saint Deny vicino a Parigi, nella casa di Benôit, la macinazione costante di un quintale consuma circa 1200 unità dinamiche, ed ogni coppia di macine converte in farina 20 quintali metrici di grano in 24 ore ».

Riprendiamo frattanto il resultamento dato dal molino del Corbeil, e cioè 825 unità dinamiche per la grossolana macinatura di un quintale di grano, e paragoniamolo al resultamento dato dal Coulomb, cioè 800 o 900 libbre di grano ma-

cinato all' ingrosso in un' ora da un molino che si muove sotto una velocità del vento di 20 piedi per secondo. Riportandoci all' effetto prodotto da questo molino, i nostri calcoli ci fornivano 2,063,360 chilogrammi innalzati ad un metro per ora, ovvero 2,063 unità dinamiche per 4 quintali metrici e mezzo, dimodochè il quintale metrico non consumava quivi che 485 unità dinamiche. Un tale resultamento è adunque un poco più della metà di quello trovato dall' Hachette, e per cui egli conchiude che esiste errore nella valutazione del Coulomb. E quì conviene notare che il numero dell' unità dinamiche indicate dalle ricerche del Coulomb non si è ottenuto direttamente come nell' esperienze dell' Hachette; ma deriva invece dal confronto di due fatti: l' uno, il tempo necessario per la triturazione del grano, l' altro la forza prodotta in un meccanismo diverso da quello, che serve a questa triturazione. Da un altro lato un assettamento delle macine più o meno ben fatto, un migliore mantenimento del meccanismo, una differenza nella qualità del grano, possono di molto far variare la quantità della forza necessaria alla stessa operazione meccanica eseguita da diverse macchine. L' esattezza delle osservazioni del Coulomb non è dubbia e sembra per conseguenza che dal punto che esse comprovano una sì grande superiorità di azione dei molini fiamminghi, sia giuoco forza conchiudere che il meccanismo di tali molini sia senza dubbio superiore a quello dei molini del Corbeil: ed è questa la conclusione che (almeno per noi) ne ricaviamo, anzichè quella erronea tratta da uno degli uomini, che hanno meglio osservato le operazioni meccaniche.

L' esperienze del Coulomb conducono ad un interessante resultamento; infatti se noi prendiamo in quest' esperienze, da una parte la velocità del vento espressa in metri per secondo, e dall' altra il numero dei giri fatti dall' albero del molino in un minuto, e che confrontiamo questi due resultamenti, formeremo la tavola seguente:

Velocità del vento per secondo	Numero dei giri dell' albero per minuto	Rapporto
$2^m,27$	3	0,75
$4^m,06$	7	0,75
$5^m,8$	11	0,53
$6^m,5$	13	0,50
$9^m,1$	17	0,54

Dietro le ultime esperienze, le quali sono maggiormente da considerarsi, poichè la velocità del vento che vi serve di termine di confronto è la più usuale quando i molini agiscono, si conosce che il rapporto della velocità del vento in un secondo, e il numero dei giri dell' albero in un minuto, è presso a poco costante ed eguale a 0,52; ed è questo un fatto di pratica che si riproduce in tutti i molini nei quali i mugnai hanno qualche poco di esperienza. Un molino ben regolato dà adunque il mezzo di calcolare la velocità del vento in un secondo: e basta sapere il numero dei giri che fanno le ali in un minuto, e moltiplicare questo numero per 0,52.

Noi non ci addentreremo quivi minutamente nella costruzione dei molini; e basta per lo scopo che ci siamo proposti, quanto riferimmo dietro il Coulomb intorno le dimensioni e le particolarità della costruzione delle ali dei molini della Fiandra, detti *molini olandesi*, e i quali sono ritenuti i più perfetti; cioè di far conoscere la forza motrice che può produrre il vento, e i mezzi generali coi quali si ottiene.

Ma ci restano a dire alcune parole sulla maniera di *orientare* i molini. Perchè il vento possa agire sopra di essi ed esercitare il suo *maximum* di effetto, conviene che l' asse del molino sie nella direzione del vento: e siccome questa direzione è variabile; così occorre di poter girare il molino dal lato in cui esso s' ingenera. Nei molini i più ordinarii quest' effetto si ottiene affidando tutto il corpo del molino sopra un asse di legno, che ha generalmente 18 piedi di lunghezza, e 20 pollici di grossezza; e appoggia in un telaio lu cui egli può girare. Questo telajo è murato al suolo. Un albero è fissato nel molino, il quale, mosso superiormente, fa girare il molino nel suo asse. Vi sono altri molini che vengono composti d' una torre di pietra, la copertura della quale è mobile, e riceve pure l' impulso necessario da un albero, il quale vi è formato e discende verso il suolo, di dove si fa girare, mediante il suo intermediario, la copertura del molino nella conveniente direzione. I molini olandesi (*Tav.* CCXLIX, *fig.* 1 e 2) sono composti di un fondamento in pietra sul quale il molino gira obbedendo all' impulso che riceve un albero orizzontale. Quest' albero è formato al di sopra di un palco, che appoggia egli stesso sopra perni, mediante i quali può girare circolarmente sulle piattaforma di mattoni: un piccolo asse di legno, che è formato al centro di tale piattaforma e del molino, mantiene il suo moto. Tutta la costruzione è d' altronde leggera, e fatta di tavole che si ricoprono come le ardesie, d' un tetto, e che sono mantenute con gran cura dopo di essere state tinte e incatramate. Intorno poi all' inclinazione dell' asse principale, ed alla dimensione delle ali, dicemmo già superiormente.

Le figure 1 e 2 della Tavola CCL mostrano un molino che può orientarsi e spogliarsi da sè stesso. Si dice che *si spoglia* un molino, quando se ne raccoglie la tela delle ali in modo che il vento non possa più investirle. Abbiamo veduto nell'esperienze riferite dal Coulomb, che il mugnaio è obbligato di raccogliere una parte delle tele, quando il vento ha una velocità di 28 piedi per secondo.

Vediamo ora come si orienta il molino del quale ci occupiamo.

Dal lato opposto all' asse delle ali, porta una grande banderuola *a*, o molino orientatore. Quando questo molino, il piano del quale è perpendicolare a quello delle ali, è investito dal vento, egli gira e comunica il moto, mediante una ruota d' ingranaggio, ad un rocchetto *b*, che ingrana una grande ruota a corona, le quale porta la piattaforma di mattoni sulla quale è poggiata la calotta del molino. Questa calotta gira pure sino a che il molino orientatore è investito dal vento e cessa questa dall' esserlo quando è nella precisa direzione del vento, e in questo istante l' asse che porta le ali si trova pure in questa stessa direzione; e per conseguenza le ali sono in un piano perpendicolare alla direzione suddetta: e in altri termini esse ali sono poste in quella posizione onde il vento produca sopra di esse il suo *maximum* d' effetto.

Vediamo ora come il molino si spogli. Ogni ala si compone di un insieme di due leggere stanghe, attaccate per mezzo di alcune staffe trasversali alle travi *ff* (*Tav.* CCL, *fig.* 1) le quali formano la parte solida dell' ala. Su queste stanghe laterali sono disposti dei cilindri di legno, che una stessa sbarra di ferro *gh* gira nello stesso tempo, e che portando tutti una certa quantità di tele, coprono l'ala di tela o la spogliano secondochè la sbarra di ferro sale o discende. Ora, se si esamina il modo onde le sbarre di ferro che muovono i cilindri sono accomodate all' estremità dell' asse *cd*, si vuole ch' esse siano a doppie cerniere; quando il vento si fa fortissimo e comunica un moto molto rapido alle ali, la forza centrifuga fa distendere la parte piegata delle sbarre *gh*, e fa per conseguenza retrocedere i cilindri, che in questo moto ravvoltolano la loro tela attorno di essi, e spogliano per tal modo le ali più o meno secondo la forza d' impulso del vento. Così il vento fa egli stesso in questo caso le veci di moderatore.

In tale moto di stendimanto della parte piegata delle sbarre gh, e di traslazione dei cilindri ch' esse conducono, il punto di riunione delle sbarre si ravvicina all' asse, e la sbarra di ferro che porta questa ceruiera comune è per tal modo respinta nell' interno dell' asse nel quale essa è mobile. In questo moto retrogrado, essa fa camminare una catena, che mediante un rocchetto agisce sopra una ruota dentata i, la quale, per mezzo di una ruota obliqua, comunica il suo moto di rotazione ad una carrucola k, la quale porta una corda che sostiene un contrappeso. Così questo contrappeso è sollevato da quella stessa forza che spoglia il molino, e dal punto che l' azione del contrappeso la vince su quella del vento, le ali sono rimesse in istato d' azione, e il vento riprende ad agire su di esse. Tutto consiste adunque nel calcolare la forza del contrappeso sì che cassi di agire quando il vento ha la velocità conveniente a muovere il molino.

In quanto alla grande ruota dentata cc, per essa il moto si trasmette nell' interno del molino a compiere le operazioni meccaniche cui è destinato.

Il meccanismo che abbiamo or ora descritto, è uno dei più semplici e dei più ingegnosi che sia stato inventato per orientare un molino e spogliarlo, mediante l' impiego della sua propria forza motrice. Pur tuttavia non crediamo che una tale combinazione debb' essere raccomandatissima. Per la semplicità dei mezzi coi quali puossi orientare un molino agendo sopra di lui a braccia d' uomo, o attaccando un cavallo alla leva conduttrice, sembra doversi dare la preferenza a questi mezzi sì generalmente impiegati sopra quelli in cui il meccanismo è più complicato. Intorno poi al mezzo indicato per ispogliare le vele, egli è più utile, poichè la sorveglianza dello stato del vento durante il tempo del lavoro può apportare delle cure che a questo nuocano, e posto il caso di subito uragano che sorprenda un molino in azione, il danno allora è reale.

In questo punto faremo menzione del molino ad ali verticali, inventato dal Durand, e del quale il Bullettino della Società d' incoraggiamento rende conto nella sua memoria d' Ottobre 1829. Questo molino che si pone all' estremità d'un albero, si orienta da sè stesso, riceve l' azione del vento in ogni direzione, muovesi con un vento debolissimo, ed è molto utile per far salire acque e mantener pieni dei serbatoi per l' inaffiamento dei giardini.

Dopo aver riportato quanto ne dice il Flachat nella sua meccanica industriale sopra i molini a vento, crediamo utile di far conoscere per intero, l' articolo esposto dal Montferrier nel suo Dizionario, che per noi si traduce, sopra lo stesso oggetto, sebbene questo abbia qualche cosa di comune con quanto abbiamo riferito fin qui, attesochè esso dà delle nozioni teoriche sopra i *molini a vento ad asse orizzontale*, tralasciati di descrivere dal Flachat, e poco parlando di quelli ad asse verticale.

Le macchine dei molini a vento, sono generalmente destinate a polverizzare i grani, si compongono di una *macine* che gira in una cassa cilindrica; e alla quale l' azione del vento è trasmessa per mezzo di un *volante*. Questo volante è il pezzo essenziale, ed esso è composto di quattro grandi ali rivestite di tela, e le quali formano una specie di croce che traversa il limite dell' *albero* o asse di rotazione. Il vento colpendo le ali le forza a girare, e il moto si comunica alla macine mediante l' aiuto di ruote d' ingranaggio. I molini a vento sembrano essere stati inventati nell' Olanda, nell' ottavo o nono secolo, ma non si hanno notizie esatte sulla loro origine.

La forza motrice del vento può essere ugualmente impiegata per far muovere macchine destinate ad altri usi, e in tutti i casi essa è trasmessa a queste macchine per mezzo delle ruote. Ci serviamo per quest' effetto di ruote di due specie: le une hanno il loro asse orizzontale e parallelo alla direzione del vento; le altre hanno quest' asse verticale e perpendicolare alla direzione del vento.

La condizioni dello stabilimento di queste due specie di ruote sono fondate sopra considerazioni differenti che esporremo.

1. *Molini a vento ad asse orizzontale.* Questi molini sono quelli che s'impiegano quasi per tutto e che possono produrre i maggiori effetti. La ruota o *volante* è formata da quattro raggi, sopra ciascuno dei quali è situata un'*ala* che riceve obliquamente l'azione del vento. La figura di quest'ala ordinariamente è rettangolare. Essa è formata da una superficie difforme leggermente concava, e gli elementi della quale formano con l'asse della ruota e la direzione del vento angoli tanto più grandi quanto essi sono più lontani da quest'asse. È evidente che si aumenterà sempre la quantità d'azione che un molino potrà trasmettere, aumentando l'area delle ali. La questione che possiamo proporci è, supponendo l'area dell'ali e la lunghezza del raggio data, di determinare la figura di queste ali e la velocità del moto, mediante la condizione che la ruota trasmette la maggiore quantità d'azione possibile. La soluzione di questa questione è essenzialmente fondata sopra la conoscenza dell'azione di una corrente d'aria sopra piastre sottili, o piuttosto sopra superficie sottili leggermente concave, che essa colpirebbe obliquamente, e le quali cederebbero alla sua azione, prendendo un moto di rotazione intorno di un asse. Siccome siamo ancora ben lontani dal conoscere la natura dell'azione di cui si tratta, la ricerca delle leggi dello stabilimento dei molini a vento non può dunque essere, almeno per ora, che una ricerca puramente sperimentale.

2. Per dare ciò non ostante un'idea delle nozioni teoriche le più plausibili che possono stabilirsi sopra questo soggetto, l'asse della ruota supponendosi nella direzione del vento, si chiami:

v la velocità del vento.

φ l'angolo formato dal piano dell'ala con la direzione del vento.

V la velocità circolare del centro dell'ala.

Ω l'area dell'ala.

P lo sforzo esercitato dal vento, tangenzialmente alla circonferenza che passa pel centro di Ω.

Π il peso dell'unità di volume dell'aria.

K il coefficiente numerico, da determinare mediante l'osservazione.

Avremo: velocità del vento valutata perpendicolarmente all'ala. . . $v \operatorname{sen} \varphi$.

Velocità dell'ala valutata nella stessa direzione. . . . . $V \cos \varphi$.

Velocità relativa con la quale il vento colpisce l'ala . . . $v \operatorname{sen} \varphi - V \cos \varphi$.

Supponiamo in questo caso, come nell'urto diretto, che lo sforzo esercitato sia proporzionale all'altezza dovuta alla velocità relativa; avremo per questo sforzo

$$K \Pi \Omega . \frac{(v \operatorname{sen} \varphi - V \cos \varphi)^2}{2g},$$

e per la componente nel senso del moto circolare,

$$P = K \Pi \Omega . \frac{(v \operatorname{sen} \varphi - V \cos \varphi)^2}{2g} . \cos \varphi,$$

donde

$$PV = K \Pi \Omega . \frac{(v \operatorname{sen} \varphi - V \cos \varphi)^2 . V \cos \varphi}{2g}.$$

Quest' espressione della quantità d'azione trasmessa deve rendersi un maximum. Facendo variare V, avremo

$$V=\frac{1}{3}\,v\,\mathrm{tang}\,\varphi,$$

donde

$$PV=\frac{4}{27}K\Pi\Omega\frac{v^3\,\mathrm{sen}^3\varphi}{2g};$$

facendo quindi variare φ, viene

$$\mathrm{sen}\,\varphi=1,$$

donde

$$V=\infty,$$

e

$$PV=\frac{4}{27}K\Pi\Omega\frac{v^3}{2g}.$$

Così l'effetto maximum avrebbe luogo quando il piano dell'ala fosse perpendicolare alla direzione del vento e la velocità della ruota infinita. Questi resultamenti, per le ragioni enunciate di sopra, non meritano un'intera confidenza, quantunque molto meno lontani dalla verità che tutte le altre considerazioni teoriche presentate sopra lo stesso soggetto in diverse opere.

3. I resultamenti fondati sull'osservazione e l'esperienza, mediante i quali lo stabilimento dei molini a vento deve farsi, si debbono principalmente al Coulomb. (Come sopra abbiamo veduto, e come meglio potremo esserne convinti consultando le *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1781), ed ancora lo Smeaton (*Recherches expérimentales sur l'eau et le vent, traduction de M. Girard.*) Questi resultamenti possono riepilogarsi come segue:

1.° *Figure dell'ali.* Le ali supponendosi rettangolari, la figura la più vantaggiosa è quella dell'ala detta all'*olandese*, offrendo al vento una superficie leggermente concava e di cui gli elementi trasversali hanno le seguenti inclinazioni.

Il raggio dell'ala essendo diviso in 6 parti $\frac{4}{6}$, il primo elemento contando dall'asse è indicato con 1. Quello corrispondente all'estremità dell'ala è indicato con 6 (i numeri esprimono dei gradi sessagesimali.)

Numeri degli elementi	1	2	3 mezzo dell'ala	4	5	6 estremità
Angolo fatto con l'asse	72°	71°	72°	74°	77°½	83°
Angolo fatto col piano del moto	18°	19°	18°	16°	12°½	7°

la larghezza dell' ala non deve superare il quarto della sua lunghezza. Essa ne è ordinariamente il $\frac{1}{5}$ o il $\frac{1}{6}$. Dobbiamo piuttosto diminuire l' angolo degli elementi col piano del moto, che aumentarlo.

Se, renunziando alla figura rettangolare, vogliamo formare l'ala in modo che impiegando la stessa superficie di tela il molino trasmetta la maggior quantità d' azione, la figura che riesce il meglio in grande è quella d' un' ala allargata (*Tav.* LII, *fig.* 5) formata, ponendo all' estremità del raggio una serratura uguale ad $\frac{1}{3}$ del raggio, e divisa nel punto dove essa la taglia nel rapporto di 3 a 2. Le inclinazioni degli elementi trasversali debbono essere regolati secondo la precedente tavola.

2.° *Velocità dell' ali rapporto a quella del vento.* Le ali essendo disposte nell' una o nell' altra maniera indicata di sopra; dobbiamo, per ottenerne il maximum di effetto, mantenere la loro velocità di rotazione in un rapporto costante con quella del vento. Questa velocità di rotazione all' estremità dell' ala deve essere uguale a 2,7 ovvero 2,6 volte quella del vento. (Questo resultamento, stabilito dallo Smeaton mediante esperienze in piccolo, si accorda esattamente con le osservazioni del Coulomb, sopra i molini del Belgio.)

3.° *Quantità d' azione trasmessa dalle ali.* Le ali essendo disposte come è stato detto sopra, e la loro velocità mantenuta rapporto a quella del vento nel rapporto che abbiamo enunciato, la quantità d' azione trasmessa è proporzionale all' area dell' ali. Essa cresce un poco meno rapidamente che il cubo della velocità del vento, dimodochè, la velocità del vento diventando doppia, è necessario $\frac{1}{20}$ perchè la quantità d' azione trasmessa diventi otto volte più. Trascurando questa differenza, si scriverà tra la quantità d' azione trasmessa in un secondo da un'ala di un molino e gli elementi di questa quantità, l' equazione

$$2,27v \, . \, P = n \Omega v^3,$$

la quale, per soddisfare all' esperienze del Coulomb e dello Smeaton, deve diventare

$$2,27 \, . \, v \, . \, P = 0,13 \Omega v^3;$$

equazione nella quale Ω è l' area di un' ala espressa in metri quadrati;

v la velocità del vento espressa in metri;

P lo sforzo esercitato sopra un' ala dall' azione del vento, nel senso del moto circolare, supposto applicato all' estremità dell' ala, espressa in chilogrammi;

n un coefficiente numerico, determinato dall' osservazione.

Questa determinazione lascia da parte la considerazione della variazione delle densità dell' aria atmosferica, alla quale non si è avuto riguardo nelle osservazioni.

4. I molini a vento ad asse orizzontale offrono diversi inconvenienti, i principali dei quali sono: 1.° la necessità di far variare la loro velocità quando quella del vento varia; 2.° la necessità di orientarli; 3.° il pericolo che essi corrono quando la velocità o la direzione del vento cangia bruscamente.

Possiamo rimediare agli inconvenienti della variazione della velocità con i mezzi conosciuti, impiegati per fare in modo che gli assi si trasmettano il moto di rotazione con velocità i cui rapporti possano variare. I molini spesso sono disposti in modo da orientarsi da se stessi. Perciò viene usata una coda situata nel pro-

lungamento dell' asse del volante, e che porta un piano verticale, sul quale agisce come sopra una banderuola. Un mezzo più vantaggioso consiste nell' uso di un piccolo molino situato ancora all' estremità di una coda, nel piano verticale che passa per l' asse del volante. Questo molino ausiliare, tutte le volte che non è nella direzione del vento, fa girare un asse, e per conseguenza un rocchetto che ingrana in un ferro a denti circolare fisso. Ne resulta il moto necessario per orientare il sistema mobile di cui il volante e il piccolo molino fanno parte. Si rimedia agli effetti della violenza del vento, serrando la tela di cui le ali sono coperte. Si potrebbero impiegare alcune disposizioni mediante le quali questa manovra fosse operata dal moto stesso del molino, quando la velocità superasse un limite dato.

Dalle osservazioni dello Smeaton e del Coulomb sopra i molini a vento ad asse orizzontale è stato concluso che, se indichiamo con s la superficie delle quattro ali e con V la velocità del vento per ogni secondo, l'*effetto dinamico* di un molino ben costruito è rappresentato da

$$0,03 s V^3.$$

Quest' espressione dà almeno un mezzo approssimativo per valutare l' effetto d' un molino in circostanze date; sostituendoci i valori di s e di V espressi in metri, il numero resultante esprimerà l' effetto dinamico in chilogrammi, ovvero sarà il numero di chilogrammi che la macchina può elevare ad un metro di altezza in un secondo di tempo.

Supponiamo che si domandi l' effetto dinamico di un molino mosso da un vento la cui velocità è di $6^m,5$ per secondo; la superficie delle sue quattro ali essendo di $81^{mq},12$.

Si farà $V = 6,5$; $s = 81,12$, ed otterremo

$$0,03 \times (81,12) \times (6,5)^3 = 668^{chilog.}.$$

Così l' effetto domandato è di 668 chilogrammi elevati ad un metro per secondo.

Ora, in un' osservazione del Coulomb in cui la velocità del vento era $6^m,5$ e la superficie dell' ali $81^{mq},12$, il molino faceva muovere sei pestelli che nel suo complesso pesavano 2741 chilogrammi, i quali erano elevati ciascuno 26 volte per minuto all' altezza di $0^m,4872$; dimodochè l' *effetto utile* in un secondo era $= 578^{chilog},6$. Le resistenze degli attriti, misurate con accuratezza, consumavano una quantità d' azione uguale a 49^{chilog}. La perdita della forza viva dovuta all' urto dei chiavelli contro i pestelli, valutati dal calcolo, si elevava a $43^{chilog},7$. L'effetto totale era dunque 672^{chilog}, il che si accorda benissimo con i resultamenti della formula.

Non dobbiamo aspettarci di riscontrare sempre una tale esattezza; ma in mancanza di processi rigorosi, è sempre utilissimo di ottenere con altrettanta facilità un' approssimazione quasi sempre sufficiente per la pratica. (*Vedi* Vento.) Alle parole Pneumatica e Resistenza, abbiamo esposto i principii del moto dei fluidi elastici, e tutto ciò che si sa di più certo, fino al presente, sopra le leggi dell' urto di questi fluidi.

5. *Molini a vento ad asse verticale.* Le disposizioni di questi molini sono più variate di quelle dei precedenti. Possiamo distinguere:

1.° Quelli le cui ali sono formate di diversi piccoli volanti mobili sopra assi

verticali, i quali presentano la loro larghezza al vento quando debbono ricevere la sua azione, e la loro grossezza quando debbono sottrarsene.

2.° Quelli le cui ali sono fisse e protette nel loro ritorno contro l' azione del vento da un involto cilindrico. Essi debbono essere orientati come i molini ad asse orizzontale.

3.° I molini detti *macchine che si muovono ad ogni vento*, la cui superficie dell' ali è una sorte di conoide che presenta alternativamente alla direzione del vento la sua concavità e la sua convessità. Il moto è impresso al molino in ragione della differenza dell' azione del vento sopra le due facce dell' ali.

Ciascuna di queste disposizioni presenta diversi inconvenienti, e tutte, a dimensioni uguali, non possono trasmettere che una debole parte della quantità d' azione che fosse trasmessa da un molino ad asse orizzontale. Non sono state pubblicate osservazioni proprie a fare apprezzare esattamente i loro effetti.

6. Tra i molini a vento ad asse verticale, possiamo distinguere il seguente (*Tav.* CLXIV, *fig.* 5) la cui disposizione ingegnosa non è punto descritta nei trattati di meccanica o collezioni di macchine conosciute. L' asse passa a traverso di un cilindro verticale capace di girare, e che porta alla sua estremità superiore una ruota dentata. Questo cilindro è fisso nel tempo che il molino lavora. L' asse del molino porta quattro bracci, le ali son fissate sopra le ruote estreme. Queste ruote hanno un diametro doppio di quello della ruota fissa. Il diametro delle ruote intermediarie è arbitrario. Le situazioni dell' ali tra loro e rapporto alla direzione del vento essendo una volta fissate, il moto del molino non le cangerà. Si orienterà facilmente il molino, e si regolerà lo sforzo che potrà ricevere dal vento, facendo girare il cilindro al quale la ruota dentata fissa è adattata. Questo apparecchio inventato da J. Jachson, è descritto nel *Repertory of arts*, tom. 8, 1806.

È riconosciuto che la velocità del vento la più favorevole per il lavoro dei molini è di 18 a 20 piedi per secondo. Mediante l' esperienze del Borda possiamo stabilire come principio, 1.° che le impulsioni del vento sono proporzionali ai quadrati delle velocità; 2.° che esse crescono in un più gran rapporto che le aree delle superficie esposte all' azione del vento; 3.° che la pressione del vento che percorre 20 piedi per secondo, contro una superficie piana di un piede quadrato situato perpendicolarmente alla direzione della corrente, è equivalente al peso di una libbra francese; 4.° che l' impulsione contro un piano doppio in superficie è più che doppia del peso osservato.

Per tutto ciò che riguarda l' uso del vento come motore meccanico vedi: *Description de l' art de construire les moulins*, del Beyer; *Collection des machines approuvées par l' Académie de France*, tomi 1, 6 e 7; *Annales des arts et manufactures*, tomi 20 e 41; e il *Traité de la composition des machines*, del Borgnis.

VENTURI (Giovan Batista), illustre fisico italiano, nato nel 1746, a Bibiano nel ducato di Reggio, fece i suoi studj nel seminario di quella città, ove ebbe a maestro il celebre Spallanzani. Non aveva che ventitre anni quando fatto venne professore di metafisica e di geometria in quell' istituto medesimo nel quale era stato scolare. Ma la vita pressochè monastica che quivi gli conveniva condurre non confacendosi colla sua indole, se ne partì ben presto, e si recò a Modena nella speranza di trovarvi un decoroso collocamento. I suoi talenti infatti furono in breve conosciuti; fu fatto nel 1773 professore di filosofia, e poco dopo il marchese Rangoni, ministro del duca di Modena, gli affidò l' ufficio d' ingegnere del governo. Le sue cognizioni idrauliche gli acquistarono molta fama, e poche furono le questioni sulla distribuzione delle acque e sul corso dei fiumi in cui sentito non fosse il suo parere. Nel 1796, quando i Francesi invasero l' Italia, il

Venturi fu mandato a Parigi presso il conte di S. Romano, che negoziava col Direttorio per conservare lo stato di Modena alla famiglia di Este. Non avendo potuto riuscirvi, rimase in Francia come privato per dedicarsi interamente alle scienze sue predilette. In quell' epoca appunto lesse all' Istituto di Francia molte ed interessanti memorie su diversi soggetti di fisica, e specialmente sull' elettricità galvanica: somministrò un numero grande d' articoli agli *Annali di chimica*, al *Giornale delle miniere* e al *Magazzino enciclopedico*: e frequentando la società dei Fourcroy, dei Lacépède, degli Haüy, e di altri sommi ingegni che allora vivevano a Parigi, si rese profondo nella chimica e nella mineralogia.

Nè queste erano le sole sue occupazioni; poichè, appassionato per gli antichi manoscritti e pei libri rari, passava molto tempo nelle biblioteche; ed oltre un gran lavoro ch' ei fece sopra i manoscritti di Leonardo da Vinci, vi copiò ancora due antichi manoscritti greci preziosissimi. Ritornato in patria, fu fatto membro del corpo legislativo di Milano, e quando s' istituì una scuola d' ingegneri a Modena, ne fu fatto professore. In seguito passò alla cattedra di fisica nella università di Pavia, quindi fu fregiato dell' ordine della Legion d' onore e della Corona di ferro, e per ultimo fu incaricato d' affari del regno d' Italia a Berna. Nel 1813, incominciando la sua salute a declinare, ottenne una pensione di ritiro, si recò in patria e si diede interamente alla revisione de' molti suoi scritti, nulla risparmiando per renderli viepiù esatti mediante cure e ricerche penosissime. Attendeva ad una nuova edizione della sua *Ottica*, quando morì a Reggio il 10 Settembre 1822. Era membro dell' Istituto di Bologna e di quello del Regno Lombardo-Veneto.

Le principali sue opere sono: I *Indagine fisica sui colori*, Modena, 1801; tale opera fu premiata dalla Società Italiana delle Scienze; II *Commentari sopra la storia e le teorie dell' ottica*, Bologna, 1814, in-4°, tomo I. I comenti compresi in questo primo volume sono: 1.° *Considerazioni su varie parti dell' ottica degli antichi*; 2.° *Del traguardo, opera di Erone il meccanico, tradotta dal greco e spiegata con note*; 3.° *Dell' iride, dell' alone, e del parelio, con un' appendice sull' ottica di Tolomeo*; III *Dell' origine e dei progressi delle odierne artiglierie*, Reggio, 1815, in-4: di tale soggetto erasi occupato il Venturi fino dalla sua prima gioventù. Il suo impiego d' ingegnere, i suoi studj sui manoscritti di Leonardo da Vinci, e i suoi lavori come professore nella scuola degli ingegneri, giovarono poscia a far sì che penetrasse addentro in tale materia; e per verità sembra che nel prefato scritto, pieno d' erudizione, abbia esaurito l' argomento; IV *Memorie e lettere inedite o disperse di Galileo Galilei*, Modena, 1818, 2 vol. in-4. Vi si trova un *Trattato inedito sulle fortificazioni*, del quale parla il Viviani nella sua *Vita* di Galileo. Mentre era a Parigi, il Venturi pubblicò in francese un *Saggio sulle opere fisico-matematiche di Leonardo da Vinci con frammenti tratti dai suoi manoscritti*, Parigi, 1797, in-4, con fig.

VENTURINI (Gian Giorgio Giulio), nato a Brunswick nel 1772, entrò giovanissimo nella milizia, fece tutte le campagne della rivoluzione francese come ufiziale degl' ingegneri, ed era capitano di tale arma nel 1799. Fatto quindi architetto nella marineria, morì il 28 Agosto 1802, dopo essersi illustrato in sì breve corso di vita con opere dottissime sull' arte militare scritte tutte in tedesco. Eccone l' elenco: I *Nuovo giuoco di tattica militare, piacevole ed utile, destinato alle scuole militari*, Schleswig, 1798, in-8; II *Libro elementare sulla tattica applicata, ossia sulla scienza militare, con esempj presi sul terreno*, ivi, 1800, 7 vol. in-8, 2ª ediz. Il primo volume tratta della parte materiale, truppe delle differenti armi, stato maggiore, vestiario, armi, magazzini, artiglieria, accampamenti, ec.: a tale volume vanno unite 5 tavole che rappresentano varie mosse strategiche. Il secondo volume tratta delle posizioni e delle

mosse teoriche: diciassette tavole servono alle applicazioni per tutte le ipotesi del terreno. Nel terzo volume, dopo avere esposta la teoria dell'attacco e della difesa, l'autore applica i suoi principj a casi pratici. Il quarto volume serve a sviluppare i prefati principj per l'uso delle differenti posizioni. Nel quinto volume l'autore espone la *Dialettica*, la parte più sublime della teoria militare. Il sesto volume è destinato tutto per la pratica, ed è diviso in due parti; nella prima dà l'idea d'una campagna che avesse per iscopo la difesa della Westfalia, nella seconda propone un piano d'attacco contro l'Olanda: questo volume è corredato di carte e piante che formano una eccellente topografia dei nominati due paesi. Finalmente il settimo volume sviluppa ulteriormente le due grandi operazioni proposte per la difesa della Westfalia e per l'attacco dell'Olanda dalla parte della Germania. Tale opera merita di esser tradotta e meditata dalle persone che si occupano dell'arte militare. III *Sistema matematico applicato all'arte militare*, ivi, 1801, in-8; IV *Esame critico dell'ultima campagna del secolo XVIII*, Lipsia, 1801, in-8; V *Osservazioni critiche sull'ultima campagna del secolo XVIII*, Brunswick, 1802, in-8; VI *Libro elementare della geografia militare delle contrade del Reno*, Copenhagen, 1802, 2 vol., in-8.

VERGINE. (*Astr.*). Sesto segno dello zodiaco. La costellazione del medesimo nome è chiamata ancora *Cerere*, *Iside*, *Erigone*, *la Fortuna*, *la Concordia*, *Astrea*, *Temi*, *Atergata*, *Tespia*. Gli autori antichi non sono d'accordo sull'origine del nome di questa costellazione, ma è probabile che in essa abbiano voluto rappresentare la dea Cerere. Dupuis la riguarda come il segno o il simbolo geroglifico delle messi che essa altre volte annunziava. Viene ordinariamente rappresentata sulle carti celesti da una donna che tiene in mano una spiga. Nelle sfere antiche si vedeva tra le mani della Vergine un fanciullo nato di fresco. Nel Catalogo britannico la Vergine contiene 110 stelle.

VERNIER (Pietro) è l'inventore dello strumento per le minute divisioni degli archi che porta il suo nome. Nato verso il 1580 ad Ornans nella contea di Borgogna, fu iniziato di buon'ora nelle scienze esatte da Claudio Vernier suo padre, matematico assai istruito. I suoi talenti lo fecero ben presto conoscere, e gli aprirono la strada a diversi impieghi importanti ed onorevoli. Morì a Ornans il 14 Settembre 1637. Abbiamo di lui: *La construction, l'usage et les propriétés du quadrant nouveau de mathématiques; comme aussi la construction de la table des sinus, de minute en minute successivement, par une seule maxime; de plus un abrégé des dites tables; en une petite demi-page, avec son usage; et finalement la méthode de trouver les angles d'un triangle, par la connaissance des côtés, et les côtés par les angles, sans l'aide d'aucune table*, Brusselles, 1631, in-8, di 122 pag. con figura. Tale opera è rarissima, ma Delambre ne ha inserita la descrizione particolarizzata nella sua *Storia dell'astronomia moderna*, tom. II, pag. 119-125. « Questo trattato, dice l'autore, spiega la « costruzione, l'uso e le proprietà di uno strumento in tutto ammirabile e di « mia invenzione e che non è mai stato veduto. Egli è talmente necessario alla « perfezione delle scienze matematiche, e principalmente all'osservazione dei moti « del cielo, alla correzione delle longitudini e latitudini delle regioni, ed alle mi- « sure della terra, che senza il di lui aiuto la scienza rimane mozza come è stata « fino ad ora ». Questo strumento si compone di un quadrante diviso in novanta gradi eguali, posto sopra un settore mobile diviso in trenta parti eguali, e chiuso in due linee di fiducia, le quali servono per verificare l'aggiustatezza della macchina e l'esattezza delle operazioni. Alcuni astronomi avevano dato a tale strumento il nome di *Nonio* (*Vedi* Nonio); ma le rivendicazioni di Lalande ne hanno fatto restituire la gloria al vero inventore. « I miglioramenti, dice Delam- « bre, fatti a questo strumento sono una conseguenza naturale delle invenzioni

« più moderne, e si riducono in sostanza all'aggiunta del microscopio, e alla « sostituzione di un cannocchiale alle due alidade o righe mobili. Deve dunque « per rigorosa giustizia portare il nome del suo autore *Vernier* ». Terminando la sua opera, Vernier dice che « se quel trattatello è ben accolto dai cultori della « scienza, si sforzerà di mettere in luce qualche cosa di più importante ». Ma le sue occupazioni gl' impedirono di mantenere la sua promessa. Gli si attribuisce un *Trattato d' artiglieria* rimasto manoscritto.

VERNIER. Specie di divisione di cui si fa uso negli strumenti di matematiche per ottenere le suddivisioni esatte dei gradi del circolo. Gli è stato dato da alcuni il nome di *Nonio*, ma per errore. Il vero inventore dello strumento è Pietro Vernier (*Vedi* VERNIER). Tutti i grafometri e tutti i circoli destinati alla misura degli angoli sono armati di un *vernier*, il cui uso è semplicissimo e si vede spiegato anco in questo Dizionario all' articolo NONIO.

VERRICELLO o ARGANO. (*Mec*) Macchina composta di un cilindro e di una ruota che hanno lo stesso asse e che fanno corpo insieme. (*Tav.* XL, *fig.* 3). L' asse comune ha le sue due estremità situate sopra appoggi E, F. Intorno del cilindro si avvolge una corda D alla quale è attaccato il peso che vogliamo elevare. S' imprime alla ruota A un moto di rotazione sull' asse; essa fa girare il cilindro, la corda si avvolge, e con ciò si eleva il peso. Il movimento vien dato alla ruota tanto per mezzo di una corda che è avvolta sopra questa ruota e che una potenza tira, quanto con l' aiuto di caviglie, come nella figura, con le quali si guarnisce, e alle quali vengono applicate delle forze. Alcune volte in luogo di ruote ci serviamo di due leve che traversano il cilindro.

L' asse del cilindro può essere indifferentemente orizzontale come nel *verricello* propriamente detto, l' *argano* (*Tav.* XL, *fig.* 2), ec., o verticale, come nell' *argano a campana* (*Tav.* XXXII, *fig.* 6); le condizioni dell' equilibrio sono sempre le stesse. Per riconoscere queste condizioni, spogliamo il *verricello* di qualunque apparecchio esterno e non consideriamo che un cilindro AB (*Tav.* LI, *fig.* 1), il cui asse riposa sopra appoggi A e B e che porta una ruota *m*. La resistenza Q o il peso da sollevare sarà applicato alla corda *n*Q che si avvolge sul cilindro, e la potenza P sarà applicata alla corda *m*P che si avvolge sulla ruota. Si vede che la potenza e la resistenza tendono ad imprimere al cilindro due movimenti in senso inverso, e che queste due forze agiscono come se esse fossero applicate ciascuna direttamente all' estremità di un braccio di leva la cui lunghezza è uguale, per la resistenza, al raggio del cilindro, e per la potenza al raggio della ruota. È dunque facile concludere, dalla teoria della leva, che affinchè vi sia equilibrio, *la potenza deve stare alla resistenza come il raggio del cilindro sta al raggio della ruota.* Così l' effetto utile di questa macchina è tanto più grande quanto il raggio della ruota è maggiore rapporto a quello del cilindro.

Ma, per tener conto degli attriti che sono assai considerabili nel verricello, sia A un cardine (*Tav.* LII, *fig.* 1) che gira nel pianerottolo M*m*N, ed R*m* la resultante delle pressioni che si esercitano sopra questo cardine. Per l'effetto del moto di rotazione, il cardine si situa nel pianerottolo in modo che la tangente *m*P, al punto di contatto, faccia con R*m* un angolo uguale al complemento dell' angolo dell' attrito; dimodochè indicando con f il rapporto dell' attrito alla pressione, si abbia

$$\text{tang} . pmR = \frac{1}{f},$$

$$\text{sen} . pmR = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}.$$

La pressione normale esercitato in m sarà perciò

$$\frac{\rho}{\sqrt{1+f^2}},$$

ρ indicando il raggio del cardine; e la resitenza dell' attrito diretta segnendo la tangeute Pm sarà

$$\frac{f\rho}{\sqrt{1+f^2}},$$

la quale dev' essere introdotta nel sistema con le altre forze che si fanno equilibrio intorno dell' asse A del cardine.

L' applicazione di queste considerazioni al verricello può servire di esempio per il calcolo dell' equilibrio nelle macchine di rotazione. Riprendiamo dunque il verricello della fig. 1 Tav. LI, e indichiamo.

R, il raggio della ruota m,
r, il raggio del cilindro,
ρ e ρ', i raggi dei cardini A e B,
d il diametro della corda, che sostiene il peso Q,
p, la distanza mA,
q, la distanza nA,
n, la lunghezza AB del cilindro,
λ, l' angolo dalla direzione della forza P con la verticale,
M, il peso del cilindro e della ruota, il cui centro di gravità si suppone nell' asse del verricello,
g, la distanza di questo centro di gravità al cardine A,
N ed N' gli sforzi esercitati respettivamente sopra i cardini A e B,
θ e θ', gli angoli delle direzioni di questi sforzi con la verticale,
n, n' e μ le costanti che entrano nell' espressione della resistenza delle corde e che si determinano mediante esperienza per ciascuna specie di corda. (*Vedi* Corda)
f il rapporto dell' attrito alla pressione.

Facciamo inoltre, per maggior semplicità,

$$f' = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Premesso ciò, cominciamo dal decomporre tutte le forze in altre che siano loro parallele e che siano applicate a ciascun cardine. Quindi decomponiamo ciascuna forza somministrata da P in due altre, una orizzontale e l'altra verticale. Avremo mediante ciò: forza verticale applicata in A

$$= M \cdot \frac{l-g}{l} + Q \cdot \frac{l-q}{l} + P \cdot \frac{l-p}{l} \cdot \cos\lambda,$$

forza orizzontale applicata in A

$$= P \cdot \frac{l-p}{l} \cdot \operatorname{sen}\lambda.$$

forza verticale applicata in B

$$=M \cdot \frac{g}{l} + Q \cdot \frac{q}{l} + P \cdot \frac{p}{l} \cos\lambda ,$$

forza orizzontale applicata in B

$$= \frac{p}{l} \cdot \operatorname{sen}\lambda .$$

Donde ricaveremo

$$N = \frac{1}{l} \sqrt{\left\{ \left[M\left(l-g\right)^2 + Q\left(l-q\right)^2 \right. \right.}$$

$$+ 2\left[M\left(l-g\right) + Q\left(l-q\right)\right] \cdot P\left(l-p\right) \cdot \cos\lambda$$

$$\left. + P^2 \cdot \left(l-p\right)^2 \right\}$$

$$N' = \frac{1}{l} \sqrt{\left\{ \left[Mg + Qq \right]^2 \right.}$$

$$\left. + 2\left[Mg + Qq\right] \cdot Pl \cdot \cos\lambda + P^2 p^2 \right\}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{P(l-p)\operatorname{sen}\lambda}{N \cdot l}$$

$$\operatorname{sen}\theta' = \frac{P \cdot p \cdot \operatorname{sen}\lambda}{N' \cdot l}.$$

Inoltre l'equazione d'equilibrio del verricello sarà

$$PR = Qr + f'\left(N\rho + N'\rho'\right) + \frac{d\mu}{2r}\left(u + n'Q\right),$$

la quale darà il valore di P, dopo che avremo sostituito per N ed N' i loro valori ricavati dalle precedenti espressioni.

Se i raggi dei due cardini ρ e ρ' sono ugoali, queste formule si rendono più semplici e possiamo dispensarci, per valutare l'effetto dell'attrito, di calcolare separatamente le pressioni N ed N'. La somma di queste pressioni è

$$N + N' = \sqrt{\left\{ \left(M+Q\right)^2 + 2\left(M+Q\right)P \cdot \cos\lambda + P^2 \right\}}$$

e l'equazione dell'equilibrio diventa

$$PR = Qr + \rho \cdot f' \cdot \sqrt{\left\{ \left(M+Q\right)^2 + 2\left(M+Q\right)P\cos\lambda + P^2 \right\}}$$

$$+ \frac{d\mu}{2r} \cdot \left(n + n'Q\right).$$

Nel caso in cui la forza P fosse verticale, si avrebbe

$$\lambda = o$$

e

$$\cos \lambda = 1.$$

L'equazione dell'equilibrio diventa allora

$$PR = Qr + \rho \,.\, f'\left(M+Q+P\right) + \frac{d^{\mu}}{2r}\left(n+n'Q\right).$$

E trascurando gli effetti dell'attrito e quelli della rigidezza delle corde, allora si ha semplicemente

$$PR = Qr,$$

vale a dire, la proposizione che la potenza sta alla resistenza come il raggio del cilindro sta a quello della ruota.

In questa macchina possiamo, come l'abbiamo detto, aumentare tanto quanto si vorrà il vantaggio della potenza sopra la resistenza facendo crescere il raggio della ruota senza aumentare quello del cilindro. Possiamo ancora produrre il medesimo effetto impiegando più verricelli legati tra loro con corde che vadano dalla ruota dell'uno al cilindro dell'altro. In questo caso, facendo astrazione dagli attriti, è facile vedere che perchè vi sia equilibrio la potenza deve stare alla resistenza come il prodotto dei raggi di tutti i cilindri sta al prodotto dei raggi di tutte le ruote.

In luogo d'impiegare delle corde, possiamo ancora, per legare i verricelli, far uso di un altro mezzo, il quale non cangia nulla alle condizioni dell'equilibrio. Si arma la circonferenza di ciascuna ruota con denti salienti ad uguale spazio l'uno dall'altro, e si scavano in ciascun cilindro dell'incalanature capaci di contenerli. Quindi si avvicinano i verricelli in modo che i denti delle ruote ingranino nelle incalanature dei cilindri; dimodochè facendo girare uno dei verricelli sul suo asse tutti gli altri siano messi in moto. Un tal sistema prende allora il nome di *ruote dentate*, e si dà quello di *rocchetti* ai *cilindri*. Le figure 4 della Tav. CXX e 4 della Tav. CXLV rappresentano dei sistemi di ruote dentate. In tutti i sistemi simili, *la potenza sta alla resistenza come il prodotto dei raggi di tutti i rocchetti sta al prodotto dei raggi di tutte le ruote.*

Vedi, per la teoria degli ingranaggi, *le Traité élémentaire des macchines* del signor Hachette, il tomo 4 *du Cours de Mathématiques* del Camus, e il tomo 1 dell'*Architettura idraulica* del Belidor.

VERSO. *Vedi* SENO-VERSO *e* COSENO-VERSO.

VERTICALE (*Geom.*). Si dice in generale *verticale* ciò che è perpendicolare all'orizzonte, o ciò che è a piombo. La parola viene da *vertex, sommità*, perchè una linea tirata dalla sommità della nostra testa al mezzo delle piante dei nostri piedi è sempre perpendicolare all'orizzonte.

In astronomia si dice *circolo verticale* un circolo massimo della sfera celeste che passa per lo zenit e pel nadir. Il meridiano di un luogo qualunque è un verticale. L'altezza di un astro si misura coll'arco del circolo verticale compreso tra l'orizzonte e il centro dell'astro (*Vedi* ALTEZZA). Tutti i circoli verticali si tagliano vicendevolmente allo zenit e al nadir.

L'uso dei circoli verticali è di misurare, oltre l'altezza degli astri, anco la loro distanza dallo zenit, che si computa su questi circoli medesimi.

I circoli verticali si dicono ancora *azimut*, perchè servono infatti a indicare sull'orizzonte l'azimut degli astri. Indicano pure le amplitudini ortive ed occase mediante la loro distanza dal meridiano.

Il primo verticale è quello che taglia perpendicolarmente il meridiano e passa pei punti d'oriente e d'occidente.

Il verticale del sole è quello che passa pel centro del sole nell'istante di un'osservazione. Serve esso nella gnomonica per trovare la declinazione del piano su cui si vuole dolineare una meridiana o quadrante solare.

La linea verticale o a piombo è quella linea che va dallo zenit al nadir, e che si dirige verso il centro della terra o perpendicolarmente alla sua superficie. Essa è determinata da un filo a cui si sospende un peso.

Si dice *quadrante verticale* il quadrante solare fatto sopra un piano verticale o perpendicolare all'orizzonte: a questa denominazione si aggiunge quella di *orientale*, di *occidentale*, di *meridionale* o di *settentrionale*, secondochè si trova esposto esattamente ad uno dei quattro ponti cardinali; si dice poi *declinante* se ha una direzione intermedia, e prende finalmente il nome d' *inclinato* se la sua posizione non è esattamente verticale.

In gnomonica la linea verticale è la linea che segna la sezione del piano del quadrante con un circolo verticale, ossia con un piano perpendicolare all'orizzonte. Per descrivere questa linea sopra un piano qualunque, il metodo più semplice è quello di lasciar pendere un filo a piombo presso al piano, di seguare due punti della sua ombra su questo piano, e di tirare una linea per questi due punti.

VERTICE (*Geom.*). S'indica in generale col nome di *vertice* il punto più elevato di una figura geometrica.

Il *vertice* di un angolo è il punto comune delle due linee che lo formano.

Il *vertice* di un triangolo è ordinariamente il vertice dell'angolo opposto al lato che si considera come la sua base.

Il *vertice* di un solido è il vertice dell'angolo solido opposto alla sua base. In un poliedro il vertice di ciascun angolo solido è considerato come un vertice del corpo.

Il *vertice* di una curva è in generale il punto in cui la curva taglia l'asse delle ascisse.

VESTA (*Astron.*). Nome di uno dei quattro piccoli pianeti scoperti nei primi anni di questo secolo. *Vedi* Cerere, Giunone *e* Pallade.

Avendo dato agli articoli ora citati i dettagli storici che concernono questi quattro pianeti, ci contenteremo ora di dire che Vesta fu scoperta da Olbers il 29 Marzo 1807.

Vesta ha l'apparenza d'una stella di quinta o di sesta grandezza, e ad un cielo purissimo può esser veduta anco ad occhio nudo. La sua luce è più intensa e più bianca di quella degli altri tre pianeti. La sua orbita taglia l'orbita di Pallade, ma non negli stessi punti in cui è tagliata dall'orbita di Cerere.

Secondo le osservazioni di Schroeter, il diametro apparente di Vesta è soltanto di $0'',488$, cioè la metà del diametro apparente che pel quarto satellite di Saturno è stato determinato dallo stesso osservatore.

Burckhardt ha opinato che Lemonnier avesse osservato molto tempo prima questo pianeta, prendendolo per una stella fissa. È un fatto che la piccola stella segnata nel catalogo di quest'astronomo, la quale ha servito di base a questa opinione, non si è più trovata nel posto assegnatole.

Ecco gli elementi i più recenti di Vesta. Essi si riferiscono al 1° Gennajo 1820.

Semiasse maggiore, prendendo per unità quello della terra. . . .	2,3678700
Eccentricità in parti del semiasse maggiore	0,0891300
Periodo siderale medio in giorni medj	$1325^{g},743100$

Inclinazione dell' orbita	7°	8′	9″,0
Longitudioe dal oodo asceodeote	103	13	18 ,2
Longitudioe del perielio	249	33	24 ,4
Loogitudioe media dell' epoca	278	30	0 ,4

VETTORE. (Raggio Vettore.) (*Geom. Analit.*) Si chiama così quella linea retta che va dal fuoco di una curva ad un punto del suo perimetro. Nelle curve che si otteogono mediante la sezioue del Cooo, i raggi vettori godono di proprietà otilissime, eercheremo perciò di dedurne i loro valori analitiei, tanto per l'Ellisse e l'Iperbola, quaoto per la Parabola.

Nell'Ellisse i *Raggi vettori* o distanze $MF = z$, $MF' = z'$ (*Tav.* CCLI, *fig.* 1) a due puoti fissi dati F ed F′ che si chiamano *fuochi*, hanno una somma costante (*Vedi* Applicazione dell' Algebra alla Geometria)

$$z+z' = AO = 2a.$$

Per trovare i valori analitiei di queste linee z e z', prendiamo il mezzo C di FF′ per origioe delle coordinate, $AO = 2a$ per asse delle x, e la perpendicolare $BC = b$ per asse delle y; sia di più $FC = c$, x ed y le coordinate del punto M.

Ora per la proprietà conoeiuta si ha

$$(1) \qquad z+z' = 2a;$$

di più dai triangoli rettangoli FMP, ed F′MP si ha

$$\overline{FM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{FP}^2,$$

$$\overline{F'M}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{F'P}^2;$$

ma

$$FP = CP - CF = x - c,$$

$$F'P = F'C + CP = x + c,$$

$$MP = y;$$

dunque

$$(2) \qquad z^2 = y^2 + (x-c)^2,$$

$$(3) \qquad z'^2 = y^2 + (x+c)^2,$$

sottraendo l' eqoaaiooe (3) dalla (2) si ha

$$z'^2 - z^2 = (x+c)^2 - (x-c)^2,$$

sviluppando e ridocendo si ottiene

$$z'^2 - z^2 = 4cx,$$

ma $z'^2 - z^2$ essendo la differenza di due quadrati si ha dall' algebra

$$z'^2 - z^2 = (z'+z)(z'-z),$$

e siccome

$$z' + z = 2a,$$

così

$$2a(z'-z) = 4cx,$$

ossia

$$(4) \qquad z'-z=\frac{2cx}{a},$$

riprendendo ora l' equazione

$$(1) \qquad z'+z=2a$$

e togliendo l' equazione (4) dall' equazione (1) si ottiene

$$(5) \qquad 2z=2a-\frac{2cx}{a},$$

e sommando le stesse equazioni (1) e (4) viene

$$(6) \qquad 2z'=2a+\frac{2cx}{a};$$

cioè

$$(7) \ldots . \mathrm{MF} = a-\frac{cx}{a},$$

$$(8) \ldots . \mathrm{MF}' = a+\frac{cx}{a}.$$

Facendo $x=0$, si ha l' ordinata all' origine BC; ora in questo caso siccome

$$\mathrm{BF}=\mathrm{BF}'=\frac{1}{2}\,\mathrm{AO}=a$$

e che dal triangolo rettangolo CBF si ha

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{BF}}^2-\overline{\mathrm{CF}}^2,$$

ossia

$$b^2=a^2-c^2;$$

così si deduce

$$c=\sqrt{a^2-b^2},$$

e siccome nell' ellisse c si chiama l' eccentricità, così l' eccentricità *in questa curva è uguale al cateto di un triangolo avente per ipotenusa il semiasse maggiore, e il semiasse minore per l' altro cateto.*

La somma delle distanze ai fuochi di ogni punto situato dentro l' ellisse, è minore del primo asse; situato fuori è maggiore. Infatti (*Tav.* CCLI, *fig.* 2)

$$1.^{\circ}\ fm'+m'\mathrm{F}<f\mathrm{M}+\mathrm{FM}=2a,$$

$$2.^{\circ}\ fm''+m''\mathrm{F}>f\mathrm{M}+\mathrm{FM}=2a.$$

Quindi *l' ellisse* si può definire geometricamente: *una curva, luogo dei punti per ciascuno dei quali la somma delle distanze a due fuochi è costante.*

Problema

Per un punto dato condurre una tangente all' ellisse.

Soluzione. Il punto dato o è sulla curva in M, o fuori della curva in r.

Nel 1°. caso, condotti i raggi vettori fM, FM si prende sulla direzione di uno

di essi FM una parte

$$ML = MF,$$

talchè sia

$$fL = 2a:$$

si tiri FL, la retta MH perpendicolare sul mezzo H di FL, sarà tangente al punto M, poichè, tranne questo, essa avrà ogni altro punto fuori della curva.

Infatti condotti ad un punto qualunque r di questa retta i raggi fr, Fr, si avrà

$$fL = 2a < fr + rL = fr + rF.$$

Nel 2.° caso, fatto centro in r con un raggio uguale rF, descrivo una circonferenza; poi fatto centro in f con un raggio uguale $2a$, descrivo un' altra circonferenza che intersecherà la prima in due punti, uno dei quali sia L: la bissettrice dell' angolo FrL sarà tangente alla curva, e il punto di contatto si troverà laddove la nominata bissettrice incontra il raggio fL in M. Imperocchè essendo la bissettrice rM perpendicolare al mezzo della retta FL, si ha

$$ML = MF.$$

Quindi rM è tangente in virtù del metodo che precede.

Giova intanto ritenere, 1.° che la tangente dimezza l' angolo FML, che è supplemento a quello formato dai raggi vettori condotti al punto di contatto; 2.° che per conseguenza i raggi vettori condotti ad un medesimo punto della curva, declinano con angoli uguali dalla tangente, nonchè dalla normale MN.

Le equazioni (7) e (8) provano che i raggi vettori dell' ellisse sono razionali rapporto all' ascissa x.

Nell' Iperbola i *Raggi vettori* FM, F'M (*Tav.* CCLI, *fig.* 3) godono della proprietà che la loro differenza è una quantità costante (*Vedi* Applicazione dell' Algebra alla Geometria)

$$AO = 2a,$$

onde facendo come nell' ellisse

$$FM = z, \quad F'M = z',$$

abbiamo

$$(1) \ldots \ldots z' - z = 2a.$$

Per trovare in questa curva i valori analitici delle linee z e z', si prenda il mezzo C di FF' per origine delle coordinate, OA per asse delle x, la perpendicolare BC per asse delle y. Sia $FC = c$, x ed y le coordinate del punto M; dai triangoli rettangoli FMP, F'MP, si ha

$$\overline{FM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{FP}^2,$$

$$\overline{F'M}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{F'P}^2;$$

ma $MP = y$, $FP = CP - CF = x - c$, $F'P = F'C + CP = x + c$, dunque sostituendo abbiamo

$$(2) \ldots \ldots z^2 = y^2 + (x-c)^2,$$
$$(3) \ldots \ldots z'^2 = y^2 + (x+c)^2;$$

sottraendo l' equazione (3) dall' equazione (2) viene

$$z'^2-z^2=(x+c)^2-(x-c)^2=4cx,$$

e siccome al solito

$$z'^2-z^2=(z'+z)(z'-z)$$

e che

$$z'-z=2a,$$

così

$$z'^2-z^2=2a(z'+z)=4cx;$$

il che somministra le due equazioni

$$(4)\ \ldots\ldots\ z'+z=\frac{2cx}{a},$$

$$(5)\ \ldots\ldots\ z'-z=2a.$$

Dalla somma di quest' equazioni si ottiene

$$z'=a+\frac{cx}{a},$$

dalla sottrazione

$$z=\frac{cx}{a}-a,$$

ossia

$$(6)\ \ldots\ldots\ \mathrm{FM}=z=\frac{cx}{a}-a,$$

$$(7)\ \ldots\ldots\ \mathrm{F'M}=z'=a+\frac{cx}{a}.$$

Ora per stabilire il valore dell' eccentricità c, osserveremo che la distanza

$$\mathrm{FF'}=2c,$$

è sempre più grande della distanza

$$\mathrm{OA}=2a;$$

da ciò evidentemente ne segue che a^2-c^2 è essenzialmente negativo; dunque facendo

$$a^2-c^2=-b^2,$$

si ottiene

$$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Ossia l' eccentricità *nell' Iperbola è uguale all' ipotenusa di un triangolo avente per cateti i due semi assi.*

La differenza delle distanze ai fuochi di ogni punto situato dentro l' iperbola, è maggiore del primo asse; situato fuori, è minore. Infatti (*Tav.* CCLI, *fig.* 4)

1.° $fm'-\mathrm{F}m'=fm'-(\mathrm{F}m-mm')=fm'+mm'-\mathrm{F}m>fm-\mathrm{F}m,$

2.° $fm''-\mathrm{F}m''=(fm''-mm'')-\mathrm{F}m<fm-\mathrm{F}m;$

Quindi l' *iperbola* si può definire geometricamente: *una curva, luogo dei punti per ciascuno dei quali la differenza delle distanze a due fuochi, è costante.*

PROBLEMA.

Per un punto dato condurre una tangente all' iperbola.

SOLUZIONE. Il punto dato o è sulla curva in M o fuori della curva in r.

Nel 1.° caso, condotti i raggi vettori fM, FM, si prenda sulla direzione di uno di questi fM una parte

$$ML = MF,$$

in modo che si abbia

$$fL = 2a:$$

tirate FL, la retta MH perpendicolare sul mezzo H di FL, sarà la tangente ricercata nel punto M, essendochè, toltone questo, essa avrà ogni altro punto fuori della curva.

Infatti condotti ed un punto qualunque r di questa retta i raggi fr, Fr avremo

$$fL = 2a > fr - rL = fr - rF.$$

Nel 2.° caso, si faccia centro in r con un raggio uguale ad rF, si descriva una circonferenza; quindi fatto centro in f con un raggio uguale $2a$, si descriva un' altra circonferenza che intersecherà la prima in due punti, uno dei quali sia L: la bissettrice dell' angolo FrL sarà tangente alla curva, e il punto di contatto si troverà ove la nominata bissettrice incontra il raggio fL in M. Imperocchè essendo la bissettrice rM perpendicolare al mezzo della retta FL, abbiamo

$$ML = MF.$$

Per lo chè rM è tangente in virtù del metodo che precede.

È utile frattanto ritenere, 1.° che la tangente divide l' angolo FML in due parti ugoali, e chè è uguale a quello formato dai raggi vettori condotti al punto di contatto; 2.° che per conseguenza i raggi vettori condotti ad uno stesso punto dell' iperbola, declinano come nell' ellisse con angoli uguali dalla tangente, non meno chè dalla normale MN.

Ugoalmente che nell' ellisse le equazioni (6) e (7) provano che i raggi vettori dell' iperbola sono razionali rapporto all' ascissa x.

Si sà che nella PARABOLA essendo dato un punto fisso, o fuoco F (*Tav.* CCLI, *fig.* 5) e una retta qualunque QQ', ciascun punto M è alla stessa distanza da F, che da QQ', che si chiama la direttrice. Si prenda per asse delle x, FD perpendicolare sopra QQ', per origine il mezzo A di

$$FD = p;$$

A è evidentemente un punto della curva. Si ha

$$AP = x,$$
$$FM = QM = DP;$$

dunque facendo

$$FM = z$$

si ottiene

$$(1) \ldots\ldots z = \frac{1}{2}p + x.$$

Dal sopra esposto resultatamento possiamo concludere che, *ogni punto* m (Tav CCLI, fig. 6) *dalla parabola equidista dal fuoco* F *e dalla direttrice*; *ogni punto interno* m' *è più vicino al fuoco che alla direttrice, ed ogni punto esterno* m'' *è più vicino alla direttrice che al fuoco*. Infatti

$$\mathrm{PD} = x + \frac{1}{2} p = \mathrm{F}m,$$

ed

$$\mathrm{F}m' < \mathrm{F}m'' > \mathrm{F}m = \mathrm{PD}.$$

Quindi *la parabola* si può definire geometricamente: *una curva, luogo dei punti situati ciascuno ad egual distanza da un fuoco e da una direttrice.*

PROBLEMA.

Per un punto dato condurre una tangente alla parabola.

SOLUZIONE. Il punto dato o è sulla parabola in M, o fuori della parabola in r.

Nel 1.° caso si conduca il raggio vettore FM: poi ML perpendicolare alla direttrice DL: tirata FL la retta MH perpendicolare sul mezzo H di FL sarà tangente al punto M; essendochè tranne questo, essa avrà ogni altro punto fuori della curva. Infatti se da un punto qualunque r di questa retta si conduce rF, rL, ed rl perpendicolare a DL; si avrà

$$r\mathrm{F} = r\mathrm{L} > rl,$$

cioè il punto r più vicino alla direttrice che al fuoco.

Nel 2.° caso, fatto centro in r con un raggio uguale rF, tracciamo sulla direttrice un punto L, o L': la bissettrice rT dell'angolo FrL sarà tangente alla parabola, e il punto di contatto si troverà laddove la retta condotta da L parallelamente all'asse (x), attraversa rT. Imperocchè essendo la bissettrice rT perpendicolare al mezzo della retta FL, si ha

$$\mathrm{ML} = \mathrm{MF}.$$

Quindi rM è tangente in virtù del metodo che precede.

Giova intanto ritenere 1.° che la tangente dimezza l'angolo FML compreso tra il raggio vettore ed il prolungamento del diametro Mx condotto pel punto di contatto; 2.° che per conseguenza un raggio vettore FM ed un diametro Mx, condotti ad un medesimo punto della parabola, inclinano con uguali angoli FMT, xMr alla tangente, e però anche ad MN normale alla curva.

VIA LATTEA (*Astron.*). Specie di striscia o fascia luminosa che fa il giro del cielo, taglia l'eclittica verso i due solstizj, e se ne scosta di circa 60 gradi. La sua candidezza è sensibilissima quando il tempo è bello. Fu chiamata *Cintura di Giunone, Cammino di S. Giacomo, Fascia, Vestigium solis, Zona, Via perusta, Cæli cingulum, Orbis lacteus* I Greci la chiamarono *Galaxia*, Γαλαξίας Κύκλος, che viene da γάλα, *latte*. Gli Arabi, come i Latini, la chiamarono *Via lactis.*

Secondo Ovidio, la via lattea è il cammino che conduce alla reggia di Giove:

Est via sublimis, coelo manifesta sereno:
Lactea nomen habet; candore notabilis ipso.
Hac iter est Superis ad magni tecta Tonantis,
Regalemque domum.

METAM. I. 168.

Alcuni mitologi ne attribuiscono l'origine all'incendio cagionato da Fetonte, altri al latte di Giunone che Ercole avea lasciato cadere dalla sua bocca. Vi è ancora chi ne fa il soggiorno delle anime degli eroi, come si può vedere in Manilio, che descrive diffusamente la situazione e l'andamento della via lattea.

Aristotile considerava la via lattea come una meteora collocata nella regione media. Ma Democrito, molto più antico di Aristotile, giudicava che questa candidezza celeste provenisse da una moltitudine di stelle troppo piccole per potere essere vedute distintamente. Questo era pure il sentimento di Manilio, il quale, dopo aver raccontato le favole degli antichi, soggiunge filosoficamente:

> *Anne magis densa stellarum turba corona*
> *Contexit flammas, et crasso lumine candet,*
> *Et fulgore nitet collato clarior orbis?*
>
> Manil. I, vers. 753.

Per quanto quest'opinione presentasse ogni fondamento di ragionevole probabilità, pure gli astronomi non osavano affermare che le stelle fossero la sola causa dello splendore e della candidezza della via lattea. Spettava al sommo Herschell il togliere ogni dubbio su questo proposito: egli dimostrò colle sue osservazioni che la moltitudine immensa delle stelle, invisibili non solo all'occhio nudo ma anco coi più forti cannocchiali fino allora conosciuti, produceva lo splendore dalla via lattea, egualmente che quello che si osserva nelle nebulose (*Vedi* Nebulosa e Stella). Egli contò non meno di 50000 stelle in uno spazio di 15° di lunghezza e di 2° di larghezza.

La *via lattea* taglia l'eclittica in vicinanza dei due solstizj, e se ne scosta di circa 60 gradi tanto al sud che al nord. Partendo dal solstizio d'inverno, dove si divide in due rami uno dei quali passa sull'arco del Sagittario, essa attraversa l'Aquila, la Freccia, il Cigno, il Serpentario, la testa di Cefeo, Cassiopea, Perseo, il Cocchiere, i piedi dei Gemelli, il Liocorno, la Nave, la Croce australe, il Lupo, e lo Scorpione: quivi si divide essa in due parti, la più orientale delle quali attraversa l'arco del Sagittario, l'altra il Serpentario e vanno poi a riunirsi entrambi nel Cigno.

VIA DEL SOLE (*Astron.*), ed anco Via regia. Così da alcuni astronomi è stata chiamata l'eclittica da cui il sole non esce giammai.

VIAL du CLAIRBOIS (Onorato Sebastiano), distinto ingegnere di marina, nacque in Parigi il 27 Marzo 1733. Entrò assai giovane nella marina, e sebbene poco dopo passasse nella infanteria, ritornò nel 1777 nella prima sua carriera, ove i suoi talenti per le costruzioni navali non tardarono a procurarli il grado d'ingegnere costruttore in capo. In seguito ottenne altri distinti impieghi, e finalmente nel 1801 fu fatto direttore della scuola speciale degl'ingegneri di vascello, e capo degl'ingegneri marittimi a Brest. Vial du Clairbois morì in quest'ultima città il 20 Dicembre 1816. Le di lui opere sono: I *Essai géométrique et pratique sur l'architecture navale*, Brest, 1776, 2 tomi in un vol. in-8; II *Traité élémentaire de la construction des vaisseaux à l'usage des élèves de la marine*, Parigi, 1787-1805, 2 vol. in-4; III Gli si deve pure una traduzione francese del *Trattato della costruzione dei vascelli* di Champan, con note, Brest, 1781, in-4. Vial du Clairbois fu uno dei principali collaboratori del Dizionario di marina che fa parte dell'Enciclopedia Metodica. Il discorso preliminare e il quadro analitico che lo precede sono suoi

VIBRAZIONE. (*Mec.*) Moto regolare di un corpo che oscilla intorno di un centro. (*Vedi* Lama elastica, Pendolo e Oscillazione.)

VIÈTE o VIETA (Francesco), celebre matematico, nato nel 1540 a Fontenelle-Comte, fu dotato di un ingegno atto a penetrare quanto vi ha di più oscuro e di più difficile nelle scienze esatte. Non si conoscono le particolarità de' suoi primi anni nè della sua educazione, e, ad onta della fama di cui va pregiato il suo nome, la sua vita privata è rimasta presso e poco sconosciuta. Si sa soltanto che a Parigi occupò funzioni pubbliche che non potevano però distrarlo dallo studio delle matematiche. Tutti i suoi biografi però riferiscono, dietro lo storico de Thou, che l' applicazione con cui si dava alle matematiche era così profonda, che passava talvolta tre giorni consecutivi nel suo studio non prendendo che quel poco di cibo e di sonno che gli era assolutamente necessario per sostentarsi, senza neppur muoversi dalla sua sedia e scomporsi. Per tal modo si lasciò prontamente addietro tutti quei che l'avevano preceduto in tale arringo. Le sue scoperte nell' analisi matematica, che l' hanno fatto riguardare come uno dei fondatori principali di tale scienza, sono: 1.° d' avere esteso il calcolo algebrico alle quantità cognite ch' ei denotò con lettere; 2.° d' avere immaginato quasi tutte le trasformazioni delle equazioni, non meno che i differenti usi che se ne possono fare per rendere più semplici le equazioni proposte; 3.° d' avere insegnato un metodo per riconoscere, col confronto di due equazioni che differissero nei soli segni, quale relazione siavi tra i coefficienti che sono loro comuni e le radici dell' una e dell' altra; 4.° di avere saputo fare uso delle scoperte precedenti per risolvere generalmente le equazioni del terzo ed anco del quarto grado; 5.° la formazione delle equazioni composte per le loro radici, quando queste sono tutte positive; 6.° la risoluzione numerica delle equazioni, ad imitazione dell' estrazione delle radici numeriche, che è la più notabile delle sue scoperte. È pur desso che ha insegnato il metodo per costruire geometricamente le equazioni, e gli si deve altresì la geometria delle sezioni angolari. I dotti inglesi Harriot, Pell, Oughtred, Wallis, che furono esimii nell' analisi matematica, vanno tutti d'accordo nel collocare Francesco Viète nel primo ordine degl' inventori di tale scienza. Newton ammise anch' egli i principj del suo metodo *esegetico*, che consistono nel ricercare immediatamente le diverse parti d' ogni radice, senza ricorrere alle trasformazioni inapplicabili di Cardano e di Tartaglia. Le opere di Viète si distinguono specialmente per l' aggiustatezza e per la profondità delle vedute. Non ha risoluto i quesiti più astrusi dell' analisi algebrica, ma additò il primo il sentiero che si dee tenere per risolverli. La storia della scienza nol separerà da Cartesio e da Newton. « L' algebra non era ancora che un' arte ingegnosa limitata alla « ricerca dei numeri, dice uno dei più illustri dotti francesi; egli ne mostrò « tutta l' ampiezza, e sostituì espressioni generali a resultati particolari. Viète, « che aveva meditato profondamente sulla natura dell' algebra, vide che il ca- « rattere principale di tale scienze consiste nell' enunciare siffatte relazioni. « Newton espresse dipoi lo stesso pensiero, allorchè definì l' algebra un' aritmetica « universale. Le prime conseguenze di tale mira generale di Viète sono l' appli- « cazione che fece egli stesso della sua *analisi speciosa* alla geometria ed alla « teoria delle linee curve, dovute a Cartesio, idea capitale e feconda, che serve « di fondamento all' analisi delle funzioni, e che divenne l' origine delle più « sublimi scoperte. Essa diede adito a riguardar Cartesio come il primo autore « dell' applicazione dell' algebra alla geometria, ma tale scoperta appartiene a « Viété, perocchè risolveva i quesiti di geometria coll' analisi algebrica e dedu- « ceva delle soluzioni le costruzioni geometriche. Tali ricerche lo condussero alla « teoria delle sezioni angolari, ed egli formò l'equazioni generali che esprimono « i valori delle corde. In tale teoria attinse la spiegazione inaspettata della dif- « ficoltà propria del caso irriducibile. Ridusse la ricerca delle radici ad un que- « sito di geometria, il che aveva già scorto Raffaello Bombelli; ed insegnò a

« trovare le radici nelle tavole trigonometriche. Non si poteva in tale quesito « paradossale scoprire nulla di più chiaro nè di più decisivo. Viète pose altresì « le fondamenta della teoria delle equazioni algebriche; perocchè insegnò a for- « mare i coefficienti delle potenze successive dell' incognita, e non vi ha nes- « suna proprietà che non derivi da tale principio ». A siffatto elogio si può aggiungere che Viète ebbe il merito di scoprire il sesto teorema dei triangoli sferici rettangoli. Quattro solamente erano conosciuti dai Greci. Geber trovò il il quinto; Giovacchino Retico trovò il sesto nel tempo stesso che Viète, e lo pubblicò alcuni anni più tardi nel suo *Opus palatinum*.

Il matematico francese aveva acquistata tanta facilità nel risolvere i problemi più astrusi, che Adriano Romano avendone proposto uno di tal genere a tutti i matematici d'Europa, Viète gliene mandò la soluzione con correzioni ed aggiunte, e gli propose in contraccambio un problema cui quegli non potè sciogliere che meccanicamente. Tale dotto alemanno, sorpreso della sagacità dell'*Edipo francese*, parte tosto da Vurtzburgo, in Franconia, per far conoscenza con lui, e va a visitarlo nella sua patria, senza fermarsi a Parigi, donde una malattia l'aveva costretto ad allontanarsi per respirare l'aria nativa. Essi passarono un mese insieme, e si separarono compresi d'ammirazione l'uno per l'altro. Giuseppe Scaligero aveva creduto d'aver trovata la quadratura del circolo. Viète notò gli errori e i paralogismi di tale pretesa scoperta, e costrinse il suo avversario a confessare il proprio sbaglio e la propria inferiorità.

Si rimprovera a Viète di aver disseminato nei suoi scritti una moltitudine di parole greche francesizzate, che ne rendono la lettura non poco difficile; ma era questa un'abitudine del suo tempo, che non potrebbe d'altronde menomare la sua gloria nè il merito delle sue opere. Quest' illustre geometra era dotato di una perspicacia singolare che gli permise di fare le più variate applicazioni della teoria della scienza; se ne cita una che merita di esser rammentata. Nelle lunghe guerre che la Francia ebbe a sostenere colla Spagna, furono intercettate delle lettere che la corte di Madrid scriveva ai diversi governatori di quella vasta monarchia. Tale corrispondenza però, onde mettersi al coperto della infedeltà dei corrieri, era scritta con caratteri di convenzione, che venivano anco di tratto in tratto variati, per sconcertare quelli nelle cui mani fossero per esso cadute quelle lettere. Viète avendo avuto dal re la commissione di scoprirne la chiave, vi riuscì facilmente, e trovò anco il mezzo di seguirla in tutte le sue variazioni. La Francia profittò per due anni di tale scoperta; e quando la corte di Spagna si accorse che la sua corrispondenza non era più un mistero per quella di Francia, non mancò di accusarla di sortilegio e di negromanzia a Roma.

Negli ultimi anni della sua vita, Viète lavorò intorno al *calendario gregoriano*, e vi scoperse parecchi errori che erano stati però notati da altri prima di lui. Ne formò uno nuovo adattato alle feste e ai riti della Chiesa Romana, lo mise in luce nel 1600, e lo presentò al cardinale Aldobrandini che allora era in Francia. Ma Clavio, cui fu dato ad esaminare tale lavoro, lo criticò acerbamente, non senza aggiungere le più inconvenienti invettive contro la persona e gli scritti di Viète. Tale querela sarebbe stata spinta più oltre, se la morte di Viète, accaduta nel 1603, non vi avesse posto fine. Era uomo semplice, modesto, sobrio, disinteressato. Le sue opere furono rare anche al suo tempo, perchè facendole stampare a proprie spese le rendeva pubbliche soltanto colla distribuzione che ne faceva a' suoi amici e a quelli che intendevano le materie che vi trattava. Alessandro Anderson pubblicò dopo la sua morte alcuni de' suoi manoscritti. Ma Francesco Schooten, ajutato da Giacomo Golio e dal padre Mersenne, raccolse quasi tutti gli scritti di Viète e gli pubblicò in un volume in foglio a Leida, nel 1646. Non vi si trovano però quelli che hanno per titolo: *Canon mathematicus*, stampato nel 1579, *Harmonicum celeste*, nè alcuni altri frammenti.

VILLEMOT (Filippo), matematico ed astronomo francese, nato nel 1651 a Châlons-sur-Saône, si fece ecclesiastico, e divenne parroco di uno dei sobborghi di Lione. Pubblicò nel 1707 un volume in-12 intitolato: *Nouveau système, et nouvelle explication du mouvement des planètes*, opera che fu lodata dai più abili astronomi del suo tempo, e fra gli altri da Fontenelle, per le ingegnose vedute che vi si rinvengono. È basata sul sistema dei vortici di Cartesio, che l'autore ha modificato con nuove idee e dedotto da ipotesi differenti. Fu tradotta in latino da Falconet. Villemot morì agli 11 Ottobre 1713.

VINCE (Samuele), professore d'astronomia e di filosofia sperimentale nell'università di Cambridge, arcidiacono di Bedford, ec., morto nel Dicembre 1821, pubblicò in inglese parecchie opere stimabili. Oltre molte memorie inserite nelle *Transazioni filosofiche* della Società Reale di Londra, di cui era membro, citeremo: I *Elementi delle sezioni coniche*; II *Trattato d'astronomia pratica*; III *Principj delle flussioni*, 2 vol. in-8; IV *Principj d'idrostatica*; V *Sistema compiuto d'astronomia*; 2 vol. in-4; VI *Storia compiuta dell'astronomia*, 3 vol. in-4, stampata coi torchi dell'università di Cambridge. Nel terzo volume, pubblicato nel 1808, vi sono le tavole astronomiche del sole di Delambre e quelle della luna di Burg, rettificate dal professore inglese.

VIRLOYS (Carlo Francesco Roland Le), architetto rinomato e dotto matematico, nato a Parigi il 2 Ottobre 1716, e morto nella stessa città il 30 Maggio 1772. L'opera principale di Virloys è il *Dictionnaire d'architecture civile, militaire et navale, antique et moderne, et de tous les arts qui en dépendent*, Parigi, 1770, 3 vol. in-4, con 101 fig. Tale Dizionario, più compiuto di quello di d'Aviler, lascia peraltro molte cose a desiderare. Virloys è autore del *pantografo di prospettiva* ch'ei fece eseguire nel 1758 per l'istruzione e trattenimento dei principi di Francia: ne ha data una descrizione nel suo Dizionario alla parola *Pantografo*, e ne prometteva una particolarizzata nel *trattato di prospettiva teorica e pratica* che non è stato però pubblicato. È autore di traduzioni francesi degli *Elementi di fisica, o introduzione alla filosofia di Newton* di Gravesande, Amsterdam, 1747, 2 vol. in-8, e degli *Elementi della filosofia newtoniana* di Pemberton, ivi, 1775, 2 vol. in-8: e, quando lo sopraggiunse la morte, stava preparando un' edizione della traduzione di *Vitruvio* di Perrault, accresciuta della vita di tale architetto e di una dissertazione sui di lui commentarii.

VITALIZIO (*Aritm. comm.*). Un vitalizio o rendita vitalizia è un pagamento annuo, semestrale, mensuale, o in qualunque altro modo periodico, che si fa ad un individuo durante l'intero corso della sua vita, in contraccambio e corrispettività di un capitale pagato da questo per una volta sola, e che rimane proprietà assoluta di chi lo ha ricevuto, dopo la morte di quello al quale vien pagata la rendita vitalizia.

La determinazione del frutto di un capitale dato a vitalizio, ossia della quantità della rendita vitalizia, dipende dalla teoria del frutto composto, da quella delle annualità, e dalle probabilità della vita umana. È d'altronde facile il vedere che la sola differenza che passa tra un' annualità (*Vedi* Annualità) propriamente detta e una *rendita vitalizia* consiste in questo, che la durata totale dei pagamenti periodici è fissa per l' *annualità*, ed è assolutamente indeterminata nel *vitalizio*.

Il principio fondamentale di questa specie di impiego sarebbe, affinchè l'operazione fosse giusta e leale, che quegli che sborsa il capitale ricevesse esattamente una somma equivalente, compresi i frutti, a quella da lui pagata: ma siccome la durata della sua vita è incerta, ed i calcoli non possono basarsi che sulla sua probabilità di giungere alla tale o tale altra età, quegli che riceve il capitale non sa se guadagnerà o perderà che dopo la morte del vitaliziato. Que-

sta circostanza fa sì che qualunque imprestito a titolo vitalizio tra due particolari è un vero giuoco d'azzardo. Ma quando è una compagnia che riceve a vitalizio i capitali di un gran numero d'individui, tutte le diverse eventualità si compensano, e la compagnia non si trova esposta a nessuna perdita, se peraltro l'importare della rendita di siascun individuo sia stato determinato rigorosamente a forma della durata probabile della sua vita.

Il punto essenziale sta dunque nel conoscere la probabilità di vivere che un individuo ha in una data età qualunque; il che non può essere che il resultato delle osservazioni statistiche sul numero e sull'età dei morti: le tavole che presentano questi resultati si dicono *tavole di mortalità*. Intorno al modo di dedurre dai dati statistici queste tavole dobbiamo rinviare il lettore ai trattati del calcolo delle probabilità: ciò non ostante potranno consultarsi anco i seguenti scritti: Milne, *A Treatise on the valuation of annuities and assurances*. Londra, 1815, in-8, tom. I. cap. III; Deparcieux, *Essai sur les probabilités de la vie humaine*, Parigi, 1746; Demonferrand, *Essai sur les lois de la population et de la mortalité en France*, Giornale della scuola politecnica, fascicolo 26;

Intorno alle tavole di mortalità si deve in generale notare che esse danno resultati assai diversi, secondochè si desumono dalla mortalità osservata in una popolazione presa in massa, o da quella che si è verificata in una classe distinta di persone. La popolazione di una intera provincia o di una intera città è composta d'individui costituiti in condizioni differentissime, di ricchi e di poveri, di sani e di malati, di occupati in arti che fortificano il corpo e di esercienti professioni che espongono a pericoli o nocciono alla salute; quindi la legge di mortalità che se ne deduce conviene a tutti questi individui presi nella loro totalità, ma non rappresenta la vitalità di un ordine speciale di persone. Essa esprime un termine medio che può con vantaggio applicarsi in operazioni che riguardino l'intera popolazione, ma che deve assolutamente rigettarsi, se si voglia prendere in considerazione una determinata classe d'individui, alla quale non potrà adattarsi con sicurezza e giustizia che una legge desunta dalla mortalità osservata in quella classe medesima. Le tavole calcolate sopra la generalità degli individui danno, come è ragionevole, una mortalità più rapida di quella che si riscontra tra le persone agiate, come ordinariamente sono i vitaliziati e gli assicurati. Questi sono nella massima parte al coperto dalla estrema miseria, dall'eccessivo travaglio e dai pericoli che inevitabilmente accompagnano certe professioni. I malati non contraggono vitalizj, e i genitori che assicurano delle somme sulla testa dei loro figli hanno cura di scegliere quelli la cui costituzione vigorosa fa sperare che debbano avere una lunga vita. Le tavole per conseguenza che somministra l'esperienza degli assicurati e dei vitaliziati offrono una durata di vita sensibilmente maggiore delle altre.

Di queste due specie di tavole, che chiameremo, le une, di rapida mortalità, le altre, di mortalità lenta, si servono le compagnie d'assicurazione sulla vita, a seconda dei loro diversi contratti: imperocchè fa d'uopo aver presente che le operazioni di queste compagnie sono di due specie diametralmente opposte nei loro effetti. Nelle une si promette di pagare una o più somme in una o più epoche, se l'assicurato si trova in vita in queste epoche; nelle altre si fissa di pagare una somma alla morte dell'assicurato, se questa avviene in un tempo determinato, ovvero se accade in qualunque tempo. Nei contratti della prima specie, che diconsi assicurazioni in caso di vita, le compagnie ricavano i loro guadagni dalle morti premature, in quelli poi della seconda specie, che diconsi assicurazioni in caso di morte, i loro guadagni provengono invece dalla longevità degli assicurati. E da ciò nasce che le compagnie, per far comparire più grande del vero il loro rischio ed ottenere così dagli assicurati un forte premio d'assicurazione, fanno uso di tavole di lenta mortalità per

le assicurazioni in caso di vita e di tavole di mortalità rapide per le assicurazioni in caso di morte.

In Francia le compagnie d'assicurazione si servono ordinariamente della tavola di Duvillard o di quella di Deparcieux, secondochè si tratte di assicurazione in caso di morte o in caso di sopravvivenza: le compagnie inglesi si servono per la maggior parte negli stessi casi della tavola di Northampton o di quella di Carlisle.

Noi daremo adesso tutte queste tavole aggiungendovi quelle notizie storiche e bibliografiche che possono riguardarle.

TAVOLA DELLA MORTALITÀ IN FRANCIA, SECONDO DUVILLARD.

ETÀ	VIVENTI	ETÀ	VIVENTI	ETÀ	VIVENTI	ETÀ	VIVENTI
0	1000000	29	444932	58	231488	87	7165
1	767525	30	438183	59	222605	88	5670
2	671834	31	431398	60	213567	89	4686
3	624668	32	424583	61	204380	90	3830
4	598713	33	417744	62	195054	91	3093
5	583151	34	410886	63	185609	92	2466
6	573025	35	404012	64	176035	93	1938
7	565838	36	397123	65	166377	94	1499
8	560245	37	390219	66	156651	95	1140
9	555486	38	383300	67	146882	96	850
10	551122	39	376363	68	137102	97	621
11	546888	40	369404	69	127347	98	442
12	542630	41	362419	70	117656	99	307
13	538255	42	355400	71	108070	100	207
14	533711	43	348342	72	98637	101	135
15	528969	44	341235	73	89404	102	84
16	524020	45	334072	74	80423	103	51
17	518863	46	326843	75	71745	104	29
18	513502	47	319539	76	63424	105	16
19	507949	48	312148	77	55511	106	8
20	502216	49	304662	78	48057	107	4
21	496317	50	297070	79	41107	108	2
22	490267	51	289361	80	34705	109	1
23	484083	52	281527	81	28886	110	0
24	477777	53	273560	82	23680		
25	471366	54	265450	83	19106		
26	464863	55	257193	84	15175		
27	458282	56	248782	85	11886		
28	451635	57	240214	86	9224		

Questa tavola è quella che Duvillard ha data alla pag. 161 della sua opera: *Analyse de l'influence de la petite verole sur la mortalité*, Parigi, 1806, in-4. L'autore dice che essa presenta tutti i resultati della mortalità

Questa tavola, pubblicata da Deparcieux nel suo *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*, è costruita sull'esperienza delle *tontine* francesi del 1689 e del 1696. Essa dà una mortalità molto più lenta di quella di Duvillard: ed è perciò che le compagnie d'assicurazione francesi ne fanno uso nelle assicurazioni in caso di vita, mentre riserbano quella di Duvillard per le assicurazioni in caso di morte.

Sulla mortalità avvenuta nella città di Northampton negli anni 1735-1780 il dott. Price calcolò la tavola seguente, che si vede riportata nella di lui opera: *Observations on reversionary payments*, Londra, 1812, tom. II pag. 311. Essa dà una mortalità più rapida di quella di Duvillard.

LEGGE DELLA MORTALITÀ NELLA CITTÀ DI NORTHAMPTON, SECONDO IL DOTTOR PRICE.

ETÀ	VIVENTI	ETÀ	VIVENTI	ETÀ	VIVENTI	ETÀ	VIVENTI
0	11650	27	4610	57	2284	87	111
3 mesi	10310	28	4535	58	2202	88	83
6 mesi	9756	29	4460	59	2120	89	62
9 mesi	9203	30	4385	60	2038	90	46
1 anno	8650	31	4310	61	1956	91	34
2	7283	32	4235	62	1874	92	24
3	6781	33	4160	63	1793	93	16
4	6446	34	4085	64	1712	94	9
5	6249	35	4010	65	1632	95	4
6	6065	36	3935	66	1552	96	1
7	5925	37	3860	67	1472	97	0
8	5815	38	3785	68	1392		
9	5735	39	3710	69	1312		
10	5675	40	3635	70	1232		
11	5623	41	3559	71	1152		
12	5573	42	3482	72	1072		
13	5523	43	3404	73	992		
14	5473	44	3326	74	912		
15	5423	45	3248	75	832		
16	5373	46	3170	76	752		
17	5320	47	3092	77	675		
18	5262	48	3014	78	602		
19	5199	49	2936	79	534		
20	5132	50	2857	80	469		
21	5060	51	2776	81	406		
22	4985	52	2694	82	346		
23	4910	53	2612	83	289		
24	4835	54	2530	84	234		
25	4760	55	2448	85	186		
26	4685	56	2366	86	145		

La tavola seguente rappresenta la legge di mortalità nella città di Carlisle, ed è stata compilata da Milne dietro le osservazioni del dott. Heysham sui registri mortuarj di quella città degli anni 1779-1787. Questa tavola, che è stata pubblicata nell'opera di Milne citata di sopra, presenta una mortalità anco più lenta di quella di Deparcieux.

TAVOLA DI MORTALITÀ NELLA CITTÀ DI CARLISLE, SECONDO MILNE.

ETÀ	VIVENTI	ETÀ	VIVENTI	ETÀ	VIVENTI	ETÀ	VIVENTI
0	10000	27	5793	59	3749	91	105
1 mese	9467	28	5748	60	3643	92	75
2	9313	29	5698	61	3521	93	54
3	9226	30	5642	62	3395	94	40
6	8970	31	5585	63	3268	95	30
9	8715	32	5528	64	3143	96	23
1 anno	8461	33	5472	65	3018	97	18
2	7779	34	5417	66	2894	98	14
3	7274	35	5362	67	2771	99	11
4	6998	36	5307	68	2648	100	9
5	6797	37	5251	69	2525	101	7
6	6676	38	5194	70	2401	102	5
7	6594	39	5136	71	2277	103	3
8	6536	40	5075	72	2143	104	1
9	6493	41	5009	73	1997	105	0
10	6460	42	4940	74	1841		
11	6431	43	4869	75	1675		
12	6400	44	4798	76	1515		
13	6368	45	4727	77	1359		
14	6335	46	4657	78	1213		
15	6300	47	4588	79	1081		
16	6261	48	4521	80	953		
17	6219	49	4458	81	837		
18	6176	50	4397	82	725		
19	6133	51	4338	83	623		
20	6090	52	4276	84	529		
21	6047	53	4211	85	445		
22	6005	54	4143	86	367		
23	5963	55	4073	87	296		
24	5921	56	4000	88	232		
25	5879	57	3924	89	181		
26	5836	58	3842	90	142		

Altre tavole di mortalità sono state calcolate da diversi distinti matematici, le quali troppo luogo sarebbe il voler tutte riportare. Daremo bensì riunite in un solo quadro quelle che presentano la mortalità della Francia, della Svezia, del

Belgio, e delle città di Chester e di Breslavia. La prima è stata pubblicata nel fascicolo 26 del Giornale della scuola politecnica da Demonferrand, che nel calcolarla si è valso degli elementi statistici che si trovano raccolti nell' ufizio di statistica di Parigi. Le molte diligenze usate da questo dotto per tener conto non solo dell' influenza che ha sul numero delle morti l' aumento progressivo della popolazione, ma ancora delle alterazioni sensibili che nella composizione della popolazione medesima hanno indotto le guerre, le emigrazioni, il colera ed altre cause accidentali, rendono prezioso il suo lavoro, che è raccomandato pure dalla autenticità dei documenti da cui è desunto, giacchè l' autore ha avuto la cura di rigettare quelle carte che portavano indizj di errori o d'inesattezze. Inoltre il numero immenso delle morti e delle nascite sul quale ha lavorato Demonferrand dà un grado eminente di sicurezza ai resultati che ne ha ricavati. La legge di mortalità per la Svezia è stata calcolata da Milne sui dati statistici pubblicati da Nicander negli atti dell' Accademia delle Scienze di Stockholm, anno 1801, e contenenti il numero dei morti della Svezia e della Finlandia dal 1776 al 1795. Essa si trova consegnata nel trattato di Milne *sulle annualità e sulle osservazioni* citato di sopra. La tavola di mortalità nel Belgio è stata calcolata da Quetelet, che l' ha pubblicata nel suo *Essai de physique sociale*. Per la tavola di mortalità a Chester si è preso per base il numero delle morti avvenute in quella città dal 1772 al 1781, secondo lo spoglio fattone dal dottor Haygarth. Nella sua costruzione si è tenuto conto dell' annuo aumento della popolazione, che è stato considerato di 0,005. Essa si trova stampata nel *trattato sulle probabilità* pubblicato dalla società per la diffusione delle cognizioni utili stabilita a Londra. La legge di mortalità finalmente che riguarda la città di Breslavia è quella che calcolò e pubblicò il celebre Halley nelle *Transazioni filosofiche* di Londra per l' anno 1693.

ETÀ	FRANCIA		SVEZIA	BELGIO	CHESTER		BRESLAVIA
	MASCHI	FEMMINE			MASCHI	FEMMINE	
0	10000	10000	10000	100000	10000	10000	1000
1	8236	8473	7985	77528	8222	8649	769
2	7706	7952	7441	70536	7483	7979	638
3	7413	7662	7134	66531	7038	7505	614
4	7220	7469	6911	64102	6755	7214	585
5	7075	7331	6747	62448	6606	7011	563
6	6962	7221	6599	61166	6473	6893	546
7	6872	7113	6490	60249	6365	6820	532
8	6796	7055	6412	59487	6281	6773	523
9	6731	6993	6353	58829	6266	6733	515
10	6676	6940	6303	58258	6184	6701	508
11	6621	6895	6257	57749	6149	6673	502
12	6582	6857	6215	57289	6119	6644	497
13	6545	6815	6174	56871	6089	6611	492
14	6511	6787	6136	56467	6054	6578	488
15	6475	6743	6098	56028	6020	6541	483

ETÀ	FRANCIA MASCHI	FRANCIA FEMMINE	SVEZIA	BELGIO	CHESTER MASCHI	CHESTER FEMMINE	BRESLAVIA
16	6436	6700	6061	55570	5980	6500	479
17	6393	6655	6023	55087	5932	6455	474
18	6347	6611	5985	54575	5879	6406	470
19	6299	6565	5945	54030	5822	6352	465
20	6245	6518	5903	53450	5765	6302	461
21	6188	6467	5859	52810	5707	6256	456
22	6087	6409	5814	52172	5648	6210	451
23	6015	6352	5766	51465	5585	6164	446
24	5941	6293	5717	50732	5522	6113	441
25	5867	6236	5667	49995	5459	6058	436
26	5800	6179	5615	49298	5390	5986	431
27	5744	6123	5562	48602	5321	5914	426
28	5692	6068	5508	47965	5252	5841	421
29	5646	6012	5453	47350	5188	5768	415
30	5597	5956	5397	46758	5127	5695	409
31	5549	5900	5339	46170	5071	5634	403
32	5501	5839	5281	45584	5020	5573	397
33	5454	5781	5222	44996	4963	5511	391
34	5406	5722	5163	44409	4906	5449	384
35	5358	5663	5104	43823	4849	5387	377
36	5290	5603	5045	43236	4787	5320	370
37	5242	5543	4986	42650	4725	5253	363
38	5195	5482	4927	42064	4657	5186	356
39	5147	5422	4868	41476	4589	5118	349
40	5097	5360	4805	40889	4516	5045	342
41	5047	5297	4736	40300	4443	4972	335
42	4996	5234	4666	39697	4364	4899	328
43	4940	5170	4596	39106	4285	4826	321
44	4881	5104	4526	38504	4201	4757	314
45	4820	5038	4455	37900	4116	4683	307
46	4758	4971	4382	37295	4031	4608	299
47	4694	4903	4309	36690	3945	4533	291
48	4630	4833	4236	36084	3859	4458	283
49	4564	4763	4163	35477	3767	4378	275
50	4492	4691	4087	34789	3675	4302	267
51	4426	4618	4007	34153	3583	4225	259
52	4352	4544	3925	33418	3490	4153	250
53	4269	4460	3842	32676	3396	4080	241
54	4186	4370	3757	31930	3302	4007	232
55	4101	4276	3671	31179	3213	3934	224

ETÀ	FRANCIA		SVEZIA	BELGIO	CHESTER		BRESLAVIA
	MASCHI	FEMMINE			MASCHI	FEMMINE	
56	4015	4180	3584	30424	3129	3865	216
57	3926	4085	3492	29656	3045	3796	209
58	3838	3982	3398	25423	2960	3726	201
59	3745	3879	3302	24465	2875	3646	193
60	3646	3761	3204	28875	2778	3566	186
61	3535	3643	3098	28081	2665	3461	178
62	3407	3511	2983	27242	2534	3331	170
63	3274	3373	2862	26356	2403	3200	163
64	3140	3229	2736	23478	2272	3068	155
65	3002	3083	2608	22462	2151	2956	147
66	2864	2934	2475	21362	2051	2863	140
67	2723	2784	2337	20263	1968	2780	132
68	2582	2633	2195	19219	1896	2697	124
69	2439	2481	2050	18175	1824	2608	117
70	2293	2325	1905	17017	1740	2498	109
71	2142	2169	1761	15860	1638	2362	101
72	1981	2002	1618	14749	1501	2199	93
73	1815	1832	1475	13638	1364	2035	85
74	1644	1656	1335	12461	1232	1870	77
75	1477	1482	1199	11273	1116	1720	69
76	1304	1316	1070	10120	1018	1591	61
77	1150	1161	947	9014	937	1467	53
78	1011	1018	831	7910	861	1347	45
79	880	890	724	6853	785	1227	38
80	760	772	624	5867	715	1106	32
81	651	660	533	5031	644	985	26
82	548	552	449	5299	573	863	22
83	446	451	372	3627	508	740	18
84	358	364	304	3016	449	617	15
85	285	273	243	2464	395	510	12
86	225	231	191	1989	348	436	9
87	178	182	150	1585	306	384	6
88	138	142	119	1233	271	343	4
89	108	109	94	924	235	313	2
90	84	84	73	682	205	283	1
91	64	64	56	510	176	252	0
92	49	49	42	387	146	221	
93	36	36	31	282	116	190	
94	27	27	22	207	92	158	
95	19	19	15	153	68	126	

ETÀ	FRANCIA		SVEZIA	BELGIO	CHESTER		BRESLAVIA
	MASCHI	FEMMINE			MASCHI	FEMMINE	
96	13	13	10	105	51	100	
97	8	8	5	67	44	74	
98	4	4	3	39	37	60	
99	2	2	1	20	30	52	
100	1	1	0	10	0	0	
101	0	0		5			
102				2			
103				1			
104				0			
105							

Fissata la tavola di mortalità di cui voglia farsi uso, molti autori hanno creduto che per determinare il giusto prezzo di una rendita vitalizia dovesse tenersi il seguente metodo. Per ogni età hanno fissato un termine medio di vita, tale che sia tanto probabile di sopravvivere ad esso come di morire prima di arrivarvi; e per questo termine, che si dice *vita probabile*, si è preso quel periodo di tempo nel quale di un gran numero d' individui della stessa età ne muora la metà, rimanendone sempre in vita l'altra metà. Così, per esempio, secondo la tavola di Deparcieux, la *vita probabile* di un individuo di 23 anni è di 42 anni, vale a dire che gli rimangono ancora 65—23=42 anni da vivere, perchè dei 790 individui viventi all' età di 23 anni non ne giunge che la metà, cioè 395, all' età di 65 anni. Trovato questo termine medio, siccome è egualmente probabile che gl' individui a cui il termine stesso si riferisce muojano prima di arrivarvi, o che al esso sopravvivano, così si suppone che tutti gl' individui della stessa età giungano precisamente a questo termine, e quindi muojano tutti nello stesso tempo appena vi sono giunti. In questa guisa la ricerca del prezzo di una rendita vitalizia viene ridotta ad un semplice quesito di annualità (*Vedi* Annualità), perchè non si tratta che di trovare il valore presente di una rendita annua pagabile per un numero *fisso* di anni consecutivi. Così, indicando con A la somma data a vitalizio, con a l' annualità, con m il numero degli anni durante i quali debbono farsi i pagamenti, e con r la ragione del frutto, ossia il frutto di un franco in un anno, si avrà

$$A = \frac{a}{r} \cdot \frac{(1+r)^m - 1}{(1+r)^m}.$$

Proponiamoci per esempio di trovare il capitale che deve pagare una persona di 23 anni per avere una rendita vitalizia di 500 franchi, ritenendo per il frutto legale del danaro il 4 per cento, ossia 0,04 per un franco. Come si è veduto, gl' individui di 23 anni hanno 42 anni di vita probabile, quindi si avrà $m=42$: e siccome si ha inoltre $a=500$ ed $r=0,04$, così sostituendo questi valori nella

formula precedente si ha

$$A = \frac{500}{0,04} \cdot \frac{(1,04)^{42} - 1}{(1,04)^{42}} = 10092^{fr.},81$$

Come ognun vede, la legittimità di questo calcolo riposa tutta sulla supposizione che l'utile che risente il vitaliziante per parte di quelli che muojono prima di giungere al termine della vita probabile sia esattamente compensato dalla perdita che gli cagionano quelli tra i vitaliziati che oltrepassano questo termine; supposizione che oltre essere meramente gratuita è anco falsa in fatto. Per stabilire dunque il calcolo sopra principj saldi e superiori ad ogni eccezione, fa d'uopo tenere conto di tutte le eventualità possibili ad accadere, nelle quali il vitaliziante risenta utile o danno, e dai resultati di tutte queste diverse eventualità dedurre il prezzo giusto della rendita vitalizia che metta in grado il vitaliziante di soddisfare al pagamento della rendita senza perdita nè lucro.

A tale effetto indichiamo per maggior brevità con (0), (1), (2), (3), (4) .... i termini della tavola di mortalità su cui si vuol basare il calcolo, vale a dire il numero dei fanciulli nati in un medesimo tempo, e di quelli che giungono all'età di un anno, di due anni, di tre anni, di quattro anni ec.; cosicchè in generale (m) rappresenti il numero di quelli che giungeranno all'età di m anni. Sia ora a la rendita annua che un individuo in età di m anni vorrebbe acquistare, ed A il prezzo che esso deve pagare al vitaliziante, prezzo che deve essere un giusto equivalente della spesa di cui il vitaliziante stesso s'incarica col contratto di vitalizio. Per determinare questo prezzo A, bisogna considerare molti individui della stessa età di m anni, i quali entrino tutti nella stessa condizione. Sia (m) il numero di questi individui: la somma che essi pagheranno al vitaliziante sarà dunque (m)A, e dovrà esser sufficiente a supplire a tutte le rendite annue da pagarsi in seguito agli (m) vitaliziati.

Ora di questi (m) uomini ne rimarranno in vita dopo un anno $(m+1)$, dopo due anni $(m+2)$, dopo tre anni $(m+3)$, e così di seguito: dunque il vitaliziante dovrà pagare dopo un anno $(m+1)a$, dopo due anni $(m+2)a$, dopo tre anni $(m+3)a$. ec., finchè tutti i vitaliziati non siano estinti. Non si deve dunque fare altro che ridurre ognuno di questi pagamenti al tempo presente, mediante lo sconto secondo il frutto che si è convenuto di attribuire al denaro, ed eguagliarne la somma ad (m)A, per concluderne il vero valore di A. Chiamato perciò r il frutto di un franco, la somma di tutte le rendite annue che deve pagare successivamente il vitaliziante varrà attualmente

$$\frac{(m+1)a}{1+r} + \frac{(m+2)a}{(1+r)^2} + \frac{(m+3)a}{(1+r)^3} + \frac{(m+4)a}{(1+r)^4} \cdots\cdots$$

quantità che eguagliata ad (m)A darà pel valore di A

$$A = \frac{a}{(m)} \left(\frac{(m+1)}{1+r} + \frac{(m+2)}{(1+r)^2} + \frac{(m+3)}{(1+r)^3} + \frac{(m+4)}{(1+r)^4} \cdots\cdots \right)$$

E questo è il giusto prezzo che un individuo di m anni deve sborsare per essere ammesso al godimento di una rendita annua a per tutta la sua vita, e che essendo impiegato al frutto r per un franco l'anno pone il vitaliziante precisamente in grado di pagare tutte le annualità fino alla morte del vitaliziato. Ponendo mente al metodo che abbiamo tenuto nello stabilire questa formula, si vede chiaro che se il vitaliziante nel modo che è stato detto impiega fin da principio tutti i capitali ricevuti da un gran numero di vitaliziati, nell'anno seguente i frutti non saranno sufficienti a pagare le rendite, ma bisognerà impie-

garvi una parte del capitale, cosicchè soffrirà questo ogni anno una diminuzione, ma non sarà interamente esaurito che quando i vitaliziati saranno tutti estinti.

La considerazione della *speranza matematica* ci avrebbe condotti a trovare per il prezzo A una espressione assolutamente identica. Trattandosi di somme il cui conseguimento non è certo, ma dipende dal caso, ossia dalla verificazione di un evento casuale, si dice *speranza matematica* il prodotto della somma eventuale per la probabilità di ottenere questa somma. Questa espressione trova la sua congrua ragione nella regola dei partiti (*Vedi* Probabilità, n.° 24): perocchè quando più giuocatori consentono a dividere il fondo del giuoco prima che la sorte abbia deciso, essi non hanno sul medesimo che una speranza; e la regola dei partiti accordando ad ognuno di essi sulla somma depositata una porzione determinata dalla probabilità che esso ha di guadagnare il tutto, è stata presa questa porzione per il valore della sua speranza. Nun considerando dunque che un solo vitaliziato, somme eventuali che egli può riscuotere negli anni successivi, ridotte mediante lo sconto all'epoca attuale, sono

$$\frac{a}{1+r},\ \frac{a}{(1+r)^2},\ \frac{a}{(1+r)^3},\ \frac{a}{(1+r)^4}\ldots\ldots$$

e le probabilità che il vitaliziato ha di ottenerle, ossia le probabilità che esso ha di essere in vita dopo 1, 2, 3 . . . . . anni essendo

$$\frac{(m+1)}{(m)},\ \frac{(m+2)}{(m)},\ \frac{(m+3)}{(m)},\ \frac{(m+4)}{(m)}\ldots\ldots$$

la sua speranza matematica sarà

$$\frac{(m+1)}{(m)}\cdot\frac{a}{1+r}+\frac{(m+2)}{(m)}\cdot\frac{a}{(1+r)^2}+\frac{(m+3)}{(m)}\cdot\frac{a}{(1+r)^3}+\frac{(m+4)}{(m)}\cdot\frac{a}{(1+r)^4}\ldots\ldots$$

$$=\frac{a}{(m)}\left(\frac{(m+1)}{1+r}+\frac{(m+2)}{(1+r)^2}+\frac{(m+3)}{(1+r)^3}+\frac{(m+4)}{(1+r)^4}\ldots\ldots\right)=A$$

espressione identica affatto a quella trovata di sopra.

Queste due diverse maniere di mettere in equazione il problema debbono richiamare alla mente la riflessione fatta di sopra, che cioè la condizione del vitaliziante che s'incarica di una sola rendita vitalizia differisce da quella di una compagnia che fa un numero di contratti sufficientemente considerabile da trovare nell'ordine delle loro morti l'ordine medesimo indicato nella tavola di mortalità. La prima impresa è azzardosissima; l'altra al contrario può quasi dirsi che non lo sia punto, se specialmente si è avuta l'avvedutezza di adottare una tavola di lenta mortalità.

È facile l'accorgersi che la determinazione del prezzo A esiga un calcolo lungo e nojoso, specialmente per le età inferiori, in cui il numero dei termini da sommarsi insieme è molto grande; ma si scorge ben presto che avendo fatto questo calcolo per una data età, se ne può facilmente dedurre quello che corrisponde a un anno di più o di meno. Per ispiegare più chiaramente questo artifizio, indicheremo con A_0, A_1, A_2, A_3 . . . . . A_m le somme che debbono pagare gl'individui di nascita, di un anno, di due anni, di tre anni. . . . . di m anni, per acquistare una rendita vitalizia a, cosicchè si avrà per quello che si è detto

$$A_m=\frac{a}{(m)}\left(\frac{(m+1)}{1+r}+\frac{(m+2)}{(1+r)^2}+\frac{(m+3)}{(1+r)^3}+\frac{(m+4)}{(1+r)^4}\ldots\ldots\right)$$

e per gl' individui di $m+1$ anni si otterrà

$$A_{m+1} = \frac{a}{(m+1)}\left(\frac{(m+2)}{1+r} + \frac{(m+3)}{(1+r)^2} + \frac{(m+4)}{(1+r)^3} + \frac{(m+5)}{(1+r)^4} \cdots\cdots\right).$$

Se ora si moltiplicano i due membri della prima di queste equazioni per (m), e se quelli della seconda si moltiplicano per $(m+1)$ e si dividono per $1+r$, si troverà

$$(m)A_m = a\left(\frac{(m+1)}{1+r} + \frac{(m+2)}{(1+r)^2} + \frac{(m+3)}{(1+r)^3} + \frac{(m+4)}{(1+r)^4} \cdots\cdots\right)$$

$$\frac{(m+1)A_{m+1}}{1+r} = a\left(\frac{(m+2)}{(1+r)^2} + \frac{(m+3)}{(1+r)^3} + \frac{(m+4)}{(1+r)^4} + \frac{(m+5)}{(1+r)^5} \cdots\cdots\right)$$

e sottraendo il secondo di questi resultati dal primo, si avrà, dopo fatte tutte le riduzioni,

$$(m)A_m - \frac{(m+1)A_{m+1}}{1+r} = a\,\frac{(m+1)}{1+r}$$

e finalmente

$$A_m = \frac{1}{1+r}\cdot\frac{(m+1)}{(m)}\left[a + A_{m+1}\right],$$

cosicchè avendo trovato il valore di A_{m+1}, se ne concluderà assai facilmente quello di A_m, e reciprocamente.

Con questo artifizio sono state calcolate le seguenti tavole che danno il prezzo di una rendita vitalizia di una lira, secondo diverse tavole di mortalità e per diverso frutto del danaro.

TAVOLA dei valori di una rendita annua vitalizia di una lira, secondo la legge di mortalità osservata nelle tontine francesi da Deparcieux, e per diverse ipotesi sul frutto del danaro.

ETÀ	3 PER CENTO	3 ½ PER CENTO	4 PER CENTO	4 ½ PER CENTO	5 PER CENTO	6 PER CENTO
3	22,028	19,980	18,242	16,756	15,475	13,391
4	22,390	20,319	18 559	17,052	15,752	13,633
5	22,597	20,518	18,749	17,233	15,923	13,787
6	22,726	20,647	18,877	17,357	16,043	13,897
7	22,791	20,720	18,953	17,435	16,121	13 972
8	22,813	20,754	18,996	17,482	16,171	14,024
9	22,815	20,770	19,022	17,515	16,209	14,066
10	22 766	20,742	19,008	17,512	16,213	14,079
11	22,664	20,665	18 949	17,468	16,179	14,061
12	22 506	20,536	18,844	17,380	16,106	14,007
13	22,343	20,403	18,734	17,289	16,029	13,951
14	22,175	20,266	18,620	17,194	15,949	13,892
15	22,002	20,123	18,502	17,095	15,865	13,830
16	21,823	19 976	18,380	16 991	15,777	13,765
17	21 666	19,849	18,275	16,905	15,705	13,713
18	21,505	19,717	18,167	16,815	15,629	13,658
19	21,339	19,581	18,054	16,721	15,551	13,601

Segue la Tavola precedente.

ETÀ	3 PER CENTO	3 ½ PER CENTO	4 PER CENTO	4 ½ PER CENTO	5 PER CENTO	6 PER CENTO
20	21,168	19.441	17,938	16,624	15,469	13.541
21	21,020	19 321	17,841	16,544	15.403	13,496
22	20,867	19.197	17,740	16,462	15,336	13,450
23	20,711	19.071	17.637	16,377	15,265	13,401
24	20,550	18 940	17.530	16,289	15,193	13,350
25	20,386	18.805	17,420	16,198	15,117	13,298
26	20,217	18,667	17.306	16,104	15.039	13.243
27	20,043	18 524	17.188	16,006	14 957	13,185
28	19.864	18,377	17,066	15,905	14,873	13.126
29	19,681	18,225	16,940	15,800	14,785	13,063
30	19,492	18,069	16.810	15.691	14,693	12 998
31	19,298	17.907	16.675	15.578	14.598	12,930
32	19,099	17,741	16.535	15,460	14.499	12,858
33	18.893	17,568	16.390	15,338	14,395	12,783
34	18,682	17.390	16,240	15,211	14.287	12,704
35	18,464	17.207	16,084	15.078	14,175	12,622
36	18,240	17,017	15.922	14,941	14,057	12 535
37	18.009	16.820	15,755	14.797	13,934	12.444
38	17.742	16,590	15,556	14.624	13,783	12.329
39	17,467	16,352	15,349	14,444	13,625	12,206
40	17,183	16,105	15.133	14,254	13.459	12,076
41	16.889	15 848	14.907	14.056	13,284	11 939
42	16.585	15,581	14.673	13.849	13,100	11,793
43	16,271	15,304	14.427	13,631	12 906	11,638
44	15,946	15,016	14,171	13,403	12,702	11.473
45	15.609	14.716	13.904	13,164	12,487	11,299
46	15.260	14 405	13,625	12,913	12,261	11,113
47	14.925	14.105	13.357	12,672	12,044	10,935
48	14.578	13.794	13.076	12.419	11,815	10,746
49	14.244	13,494	12,807	12,176	11,595	10,564
50	13.899	13,183	12,526	11,921	11,363	10.372
51	13.567	12.883	12.255	11,675	11,140	10,187
52	13,248	12,596	11.995	11.440	10,927	10,010
53	12.919	12,298	11,725	11,195	10,703	9.823
54	12,579	11,989	11,443	10,938	10,468	9.625
55	12,252	11,692	11,173	10.691	10,242	9 436
56	11,914	11.383	10 891	10.433	10,006	9.235
57	11,565	11,063	10,597	10,163	9.757	9.024
58	11.228	10,755	10,314	9 902	9.517	8,819
59	10,881	10,436	10,020	9 631	9.266	8,604

Segue la Tavola precedente.

ETÀ	3 PER CENTO	3 ½ PER CENTO	4 PER CENTO	4 ½ PER CENTO	5 PER CENTO	6 PER CENTO
60	10,522	10,104	9.713	9,346	9,003	8.376
61	10,151	9,760	9,393	9,049	8.726	8,135
62	9,766	9,402	9,060	8,738	8,435	7,880
63	9,392	9,053	8,734	8,433	8.150	7,629
64	9,005	8,691	8,394	8,114	7,850	7,363
65	8,604	8.314	8,039	7,780	7,535	7,082
66	8,212	7.944	7,691	7.451	7,224	6,803
67	7,830	7,584	7,350	7,129	6,918	6.528
68	7,460	7,234	7,019	6,814	6.620	6,259
69	7,104	6,896	6,699	6,511	6,331	5,997
70	6,766	6,575	6,394	6,221	6,055	5,747
71	6,424	6,250	6,084	5,925	5,773	5,488
72	6,105	5,946	5,794	5,648	5,505	5,248
73	5.789	5,644	5,506	5,373	5,246	5,006
74	5,479	5,348	5,222	5,101	4,985	4,766
75	5,178	5,060	4,945	4,836	4.730	4,531
76	4,862	4.755	4,652	4,553	4,458	4,278
77	4.557	4,462	4,370	4.281	4,195	4,033
78	4,273	4.188	4.105	4,025	3.948	3,802
79	3,984	3,908	3,834	3,763	3,694	3,563
80	3,730	3,662	3,596	3,533	3,471	3,353
81	3,448	3,428	3,370	3,313	3,258	3,153
82	3,269	3,216	3,164	3,114	3,065	2.971
83	3,031	2,984	2,939	2,895	2.853	2.770
84	2,757	2,717	2,679	2,641	2,604	2,534
85	2.490	2,457	2,424	2,392	2,361	2,301
86	2,240	2,212	2,185	2,158	2,132	2,081
87	2,023	2,000	1,977	1,955	1,933	1,891
88	1,747	1,728	1,711	1,693	1,675	1,642
89	1,474	1,460	1,446	1,433	1,418	1,394
90	1,208	1,198	1,187	1,178	1,166	1,149
91	0,955	0,948	0,941	0,934	0,924	0.913
92	0,721	0,716	0,712	0.707	0,703	0,694
93	0,485	0,483	0,481	0,478	0,476	0,472
94	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

TAVOLA dei valori di una rendita vitalizia di una Lira, secondo la legge di mortalità nella città di Carlisle, e per diverse ipotesi sul frutto del danaro.

ETÀ	3 PER CENTO	4 PER CENTO	5 PER CENTO	6 PER CENTO	7 PER CENTO	8 PER CENTO
0	17,320	14,283	12,083	10,439	9,177	8,178
1	20,085	16,556	13,995	12,078	10,605	9.439
2	21,501	17,728	14.983	12 925	11,342	10,088
3	22.683	18,717	15,824	13,652	11,978	10,651
4	23,285	19.233	16,271	14,042	12,322	10,957
5	23,693	19,594	16,590	14,325	12,574	11,184
6	23,846	19,747	16,735	14,460	12,698	11,298
7	23.867	19,792	16,790	14,518	12,756	11,354
8	23,801	19,766	16.786	14.526	12,770	11,371
9	23,677	19 693	16,742	14 500	12,754	11.362
10	23,512	19,585	16,669	14.448	12,717	11.334
11	23,327	19 460	16.581	14,384	12,669	11,296
12	23,143	19,336	16,494	14,321	12 621	11,259
13	22,957	19.210	16,406	14,257	12,572	11,221
14	22,769	19.082	16,316	14.191	12,522	11,182
15	22,582	18,956	16,227	14.126	12,473	11,144
16	22.404	18,837	16,144	14.067	12,429	11,111
17	22,232	18,723	16.066	14,012	12.389	11.081
18	22,058	18,608	15,987	13.956	12.348	11,051
19	21,879	18,488	15,904	13,897	12,305	11,019
20	21,694	18,363	15,817	13,835	12,259	10,985
21	21,504	18,233	15,726	13,769	12,210	10,948
22	21,304	18,095	15,628	13,697	12,156	10,906
23	21,098	17,951	15,525	13,621	12,098	10,861
24	20,885	17,801	15,417	13.541	12,037	10,813
25	20,665	17,645	15,303	13.456	11.972	10,762
26	20,442	17,486	15,187	13.368	11.904	10.709
27	20,212	17,320	15,065	13.275	11,832	10,652
28	19.981	17,154	14 942	13.182	11.759	10,594
29	19 761	16,997	14.827	13,096	11,693	10,542
30	19,556	16,852	14,723	13,020	11,636	10.498
31	19,348	16,705	14,617	12.942	11,578	10,454
32	19,134	16,552	14,506	12 860	11,516	10.407
33	18,910	16.890	14.387	12,771	11,448	10,355
34	18,675	16,219	14,260	12.675	11,374	10,297
35	18,433	16,041	14,127	12,573	11,295	10,235
36	18,183	15,856	13.987	12.465	11,211	10,168
37	17.928	15,666	13,843	12,354	11,124	10,098
38	17,669	15.471	13,695	12.239	11,033	10,026
39	17,405	15,272	13,542	12,120	10,939	9.950
40	17,143	15,074	13,390	12,002	10,845	9.875

Segue la Tavola precedente.

ETÀ	3 PER CENTO	4 PER CENTO	5 PER CENTO	6 PER CENTO	7 PER CENTO	8 PER CENTO
41	16,890	14,883	13,245	11,890	10,757	9.805
42	16,640	14,694	13,101	11,779	10,671	9.737
43	16.389	14.505	12,957	11,668	10,585	9.669
44	16.130	14,308	12,806	11,551	10.494	9.597
45	15,863	14.104	12,648	11,428	10,397	9,520
46	15,585	13,889	12.480	11,296	10,292	9,436
47	15,294	13.662	12,301	11,154	10,178	9,344
48	14.986	13,419	12,107	10,998	10,052	9,241
49	14,654	13.153	11,892	10.823	9.908	9,121
50	14.303	12,869	11,660	10,631	9,749	8,987
51	13.932	12,566	11,410	10,422	9.573	8.838
52	13.558	12.258	11,154	10,208	9,392	8,684
53	13,180	11,945	10,892	9.988	9.205	8,523
54	12,798	11,627	10,624	9,761	9,011	8,356
55	12,408	11,300	10,347	9.524	8,807	8,179
56	12,014	10,966	10,063	9,280	8.595	7.995
57	11,614	10,625	9.771	9.027	8.375	7,802
58	11,218	10,286	9.478	8.772	8.153	7,606
59	10,841	9.963	9.199	8,529	7.940	7,418
60	10,491	9,663	8,940	8,304	7,743	7,245
61	10,180	9.398	8.712	8.108	7,572	7.095
62	9.875	9,137	8.487	7.913	7.403	6.947
63	9,567	8.872	8.258	7.714	7,229	6,795
64	9.246	8.593	8,016	7,502	7,042	6,630
65	8,917	8,307	7.765	7,281	6,847	6,457
66	8.578	8.010	7,503	7,049	6.641	6,272
67	8.228	7,700	7.227	6.803	6,421	6,075
68	7,869	7,380	6.941	6,546	6,189	5,866
69	7.499	7.049	6,643	6,277	5,945	5.643
70	7,123	6,709	6,336	5,998	5,690	5,410
71	6.737	6,358	6,015	5,704	5,420	5,160
72	6.373	6,026	5,711	5,424	5,162	4,922
73	6 044	5,725	5,435	5,170	4,927	4.704
74	5,752	5,458	5,190	4.944	4,719	4.511
75	5,512	5,239	4.989	4,760	4,549	4,355
76	5,277	5,024	4,792	4,579	4,382	4,200
77	5.059	4.825	4.609	4.410	4,227	4,056
78	4,838	4.622	4,422	4,238	4.067	3.908
79	4.592	4.394	4,210	4,040	3.883	3,736
80	4,365	4,183	4.015	3,858	3,713	3,577

Segue la Tavola precedente.

ETÀ	3 PER CENTO	4 PER CENTO	5 PER CENTO	6 PER CENTO	7 PER CENTO	8 PER CENTO
81	4,119	3.953	3.799	3,656	3.523	3,398
82	3,898	3,746	3.606	3,474	3,352	3,237
83	3.672	3.534	3 406	3,280	3,174	3,069
84	3,454	3,329	3,211	3,102	2 999	2.903
85	3,229	3,115	3,009	2.909	2,815	2,727
86	3.033	2,928	2,830	2.739	2,652	2,571
87	2,873	2.776	2.685	2.599	2,519	2.443
88	2,776	2.683	2.597	2,515	2.439	2,366
89	2,665	2,577	2.495	2.417	2,344	2,276
90	2,499	2,416	2.339	2,266	2,198	2,133
91	2,481	2,398	2,321	2,248	2,180	2,115
92	2,577	2,492	2,412	2,337	2,266	2,198
93	2,687	2.600	2,518	2.440	2.367	2.297
94	2,736	2,650	2,569	2.492	2,419	2.350
95	2,757	2,674	2,596	2,522	2,451	2,383
96	2,704	2,628	2,555	2,486	2,420	2.358
97	2.559	2,492	2,428	2,368	2,309	2.253
98	2,388	2,332	2,278	2,227	2,177	2,129
99	2,131	2,087	2,045	2.004	1,964	1.926
100	1,683	1,653	1,624	1,596	1,569	1,543
101	1,228	1,210	1,192	1,175	1,159	1,142
102	0,771	0,762	0,753	0,744	0,735	0,727
103	0,324	0,321	0,317	0,314	0,312	0,309

TAVOLA dei valori di una rendita annua vitalizia di una lira, secondo la legge di mortalità nella città di Chester, e per diverse ipotesi sul frutto del danaro.

ETÀ	MASCHI				FEMMINE			
	3 PER %	4 PER %	5 PER %	6 PER %	3 PER %	4 PER %	5 PER %	6 PER %
0	16,043	13,347	11,370	9 876	17,718	14,636	12,402	10,729
1	19,097	15,882	13,520	11 732	20,100	16,599	14,057	12,150
2	20,613	17,148	14,598	12 664	21,442	17,713	14,999	12,960
3	21,574	17,962	15,297	13 272	22.480	18,585	15,743	13,605
4	22,152	18,463	15.735	13,658	23,088	19,108	16,197	14,003
5	22,331	18,635	15,894	13,804	23,469	19,448	16,500	14,273
6	22,473	18,778	16,032	13.933	23,587	19,572	16,621	14,388
7	22,540	18,861	16,119	14,020	23,555	19,573	16,639	14,415
8	22,527	18.878	16,151	14.060	23.430	19,497	16,592	14,386
9	22,408	18,806	16,108	14 035	23,276	19,397	16,526	14,340
10	22,237	18,691	16,029	13 978	23,089	19,269	16,435	14,273
11	22,034	18,550	15,926	13,901	22.882	19,124	16,329	14,192
12	21,807	18,386	15,804	13.807	22,671	18,976	16,220	14.110
13	21,572	18 216	15,676	13.7 8	22,468	18,834	16,116	14,031
14	21,347	18,054	15,555	13,614	22, 258	18,685	16,007	13,947
15	21,112	17,882	15.425	13,513	22,055	18,543	15,902	13,868
16	20,891	17,722	15,305	13,419	21.860	18,406	15,803	13,792
17	20,691	17,580	15,200	13,339	21,673	18,276	15,708	13,722
18	20,504	17,448	15,104	13,267	21,494	18,152	15,620	13,656
19	20,326	17,323	15 014	13 201	21,327	18,039	15,540	13,599
20	20,143	17,194	14.921	13,131	21,141	17,909	15,447	13,549
21	19,958	17,064	14,826	13 061	20,935	17,762	15,339	13,446
22	19,771	16,932	14,730	12.989	20,723	17,610	15,225	13,359
23	19,594	16,808	14.641	12 924	20.504	17,451	15,105	13 266
24	19.412	16,680	14.549	12.855	20,295	17,300	14,993	13,179
25	19,226	16,547	14.452	12,784	20,094	17,155	14,885	13,097
26	19,056	16,429	14,369	12.724	19 946	17,056	14,818	13,050
27	18.882	16,308	14.283	12 663	19,794	16,954	14,748	13,001
28	18,704	16,183	14,194	12,599	19 643	16,853	14,679	12,953
29	18,503	16.038	14 088	12,519	19,488	16,749	14,608	12.904
30	18,285	15,878	13 968	12,429	19,330	16,642	14,535	12,854
31	18,041	15,695	13.829	12,320	19,125	16.495	14,427	12,773
32	17.771	15,489	13,668	12,192	18,915	16,343	14,314	12.687
33	17,514	15,293	13,516	12,071	18.701	16,188	14,199	12.600
34	17,250	15,090	13,357	11.944	18,482	16,027	14,078	12,508
35	16,976	14,878	13,189	11,810	18,253	15,860	13,952	12 411

Segue la Tavola precedente.

ETÀ	MASCHI				FEMMINE			
	3 PER %	4 PER %	5 PER %	6 PER %	3 PER %	4 PER %	5 PER %	6 PER %
36	16,712	14,674	13,028	11,681	18,040	15,702	13,835	12,321
37	16,439	14,461	12,859	11,544	17,818	15,538	13,712	12,227
38	16,179	14,259	12,699	11,415	17,589	15,369	13,583	12,128
39	15,911	14,049	12,532	11,279	17,358	15,196	13,452	12,026
40	15,654	13,847	12,371	11,149	17,137	15,032	13,329	11,932
41	15,388	13,638	12,203	11,013	16,910	14,863	13,201	11,834
42	15,137	13,410	12,045	10,885	16,677	14,688	13,067	11,731
43	14,878	13,235	11,880	10,750	16,437	14,506	12,928	11,369
44	14,631	13,040	11,724	10,623	16,176	14,305	12,771	11,499
45	14,381	12,841	11,564	10,493	15,925	14,113	12,622	11,382
46	14,125	12,637	11,398	10,357	15,669	13,916	12,469	11,261
47	13,866	12,429	11,229	10,218	15,406	13,712	12,309	11,134
48	13,600	12,214	11,053	10,073	15,136	13,501	12,142	11,001
49	13,350	12,013	10,890	9,938	14,875	13,297	11,982	10,874
50	13,095	11,806	10,720	9,798	14,591	13,074	11,803	10,730
51	12,834	11,593	10,545	9,652	14,303	12,844	11,619	10,581
52	12,572	11,378	10,368	9,504	13,988	12,590	11,412	10,410
53	12,307	11,161	10,187	9,353	13,665	12,327	11,196	10,232
54	12,037	10,938	10,081	9,197	13,331	12,054	10,970	10,044
55	11,742	10,690	9,792	9,018	12,986	11,769	10,733	9,844
56	11,419	10,417	9,558	8,816	12,615	11,458	10,471	9,621
57	11,086	10,132	9,313	8,603	12,229	11,133	10,194	9,383
58	10,746	9,840	9,059	8,381	11,833	10,796	9,905	9,136
59	10,396	9,536	8,793	8,146	11,455	10,474	9,628	8,894
60	10,081	9,264	8,555	7,937	11,063	10,137	9,336	8,639
61	9,824	9,043	8,364	7,770	10,741	9,863	9,101	8,435
62	9,642	8,891	8,236	7,662	10,495	9,658	8,929	8,290
63	9,473	8,750	8,119	7,564	10,252	9,455	8,759	8,147
64	9,319	8,625	8,017	7,480	10,014	9,256	8,592	8,007
65	9,139	8,475	7,891	7,375	9,706	8,991	8,364	7,809
66	8,872	8,243	7,690	7,199	9,321	8,655	8,067	7,547
67	8,524	7,935	7,415	6,953	8,888	8,270	7,724	7,238
68	8,113	7,566	7,081	6,650	8,436	7,865	7,359	6,909
69	7,686	7,179	6,728	6,327	7,986	7,459	6,991	6,573
70	7,299	6,826	6,406	6,030	7,587	7,099	6,664	6,274
71	6,986	6,541	6,145	5,790	7,265	6,808	6,400	6,034
72	6,852	6,424	6,041	5,697	7,038	6,605	6,218	5,870
73	6,767	6,352	5,980	5,646	6,833	6,423	6,055	5,723
74	6,716	6,314	5,952	5,626	6,659	6,269	5,919	5,602
75	6,637	6,249	5,899	5,583	6,457	6,088	5,756	5,456

Segue la Tavola precedente.

ETÀ	MASCHI				FEMMINE			
	3 PER %	4 PRR %	5 PAA %	6 PER %	3 PER %	4 PEA %	5 PEA %	6 PER %
76	6,494	6,125	5,791	5,488	6,190	5,845	5,534	5,252
77	6,267	5,920	5,606	5,320	5,914	5,593	5,302	5,038
78	6,025	5,700	5,406	5,137	5,634	5,335	5.063	4,816
79	5,806	5.502	5,225	4.972	5,371	5,091	4,836	4,604
80	5,566	5,283	5,024	4,787	5,137	4,874	4,634	4,415
81	5,365	5,100	4,857	4.633	4,941	4,691	4.463	4,254
82	5,211	4,961	4,731	4,520	4,809	4,569	4,349	4,147
83	5,054	4,820	4,604	4,4·4	4,777	4,541	4,325	4,127
84	4,889	4,671	4,469	4,282	4,901	4,664	4,447	4,246
81	4,725	4,522	4,334	4,159	5,107	4,869	4,649	4,445
86	4,524	4,338	4,165	4,004	5,153	4,923	4,710	4,512
87	4,299	4,131	3,974	3,827	5,026	4,813	4,615	4,430
88	4,000	3,851	3,711	3,580	4,796	4,604	4,425	4,257
89	3,751	3,618	3,494	3,377	4,413	4,247	4,091	3,945
90	3,429	3,314	3,205	3,103	4,028	3,885	3,751	3,625
91	3,113	3,014	2,920	2,831	3,659	3,538	3,424	3,316
92	2,866	2,779	2,696	2,618	3,297	3,195	3,099	3,008
93	2,715	2,637	2,563	2,292	2,956	2,865	2,785	2,708
94	2,526	2,458	2,393	2,331	2,654	2,584	2,516	2,452
95	2,520	2,458	2,399	2,343	2,428	2,369	2,313	2,259
96	2,461	2,409	2,359	2,311	2,151	2,105	2,060	2,017
97	1,938	1,904	1,871	1,839	1,994	1,958	1,923	1,890
98	1,373	1,354	1,336	1,318	1,533	1,511	1,491	1,470
99	0,744	0,737	0,730	0,723	0,822	0,814	0,806	0,798

Per l' intelligenza della costruzione di quest' ultima tavola e delle altre che verranno riportate in appresso, fondate tutte sulla legge di mortalità nella città di Chester, è indispensabile avvertire che in questa legge di mortalità, inserita insieme con altre nella tavola che comincia alla pag. 537 e finisce alla pag. 540, è corso un errore: poichè, al termine della tavola, di fronte all'età di 100 anni, invece di mettere uno zero nelle due colonne dei maschi e delle femmine, indicando così che a tale età non giunge nessun individuo, si deve mettere 23 nella colonna dei maschi e 44 in quella delle femmine, perchè secondo l'ordine di mortalità di cui si tratta è questo il numero degl' individui dei due sessi che arrivano ai 100 anni; si porrà poi zero per l' uno e l' altro sesso all' età di 101 anno.

Passiamo ora a cercare il valore di una rendita vitalizia costituita sopra la vita di più persone, pagabile cioè nella sua totalità finchè non siano estinti tutti gli individui ai quali deve la medesima esser corrisposta.

Siano A, B, C, ec. gl' individui sulla cui vita vuol costituirsi la rendita vitalizia, siano a, b, c, ec. le età che hanno respettivamente questi individui nel momento in cui si stabilisce il vitalizio; e si continui a indicare come si è fatto di sopra con (a), $(a+1)$, $(a+2)$, ec., (b), $(b+1)$, $(b+2)$, ec., (c), $(c+1)$, $(c+2)$, ec., il numero delle persone viventi nelle età di a, $a+1$, $a+2$, ec., b, $b+1$, $b+2$, ec., c, $c+1$, $c+2$, ec., anni, numero che vien dato dalla tavola di mortalità della quale si vorrà fare uso.

Pei principj esposti all' articolo PROBABILITÀ, la probabilità che una di queste persone A ha di sopravvivere un anno, due anni, tre anni, ec., dopo la costituzione del vitalizio, sarà $\frac{(a+1)}{(a)}$, $\frac{(a+2)}{(a)}$, $\frac{(a+3)}{(a)}$, ec.; quindi la probabilità contraria di morire nel corso del primo anno, dei primi due anni, dei primi tre anni, ec., sarà espressa da $1-\frac{(a+1)}{(a)}$, $1-\frac{(a+2)}{(a)}$, $1-\frac{(a+3)}{(a)}$, ec.

Per gli stessi principj, la probabilità composta che le persone A, B, C.., hanno di morire tutte nel primo anno sarà rappresentata da

$$\left(1-\frac{(a+1)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+1)}{(b)}\right)\left(1-\frac{(c+1)}{(c)}\right)\cdots\cdots$$

quella di morire tutte nei primi 2 anni da

$$\left(1-\frac{(a+2)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+2)}{(b)}\right)\left(1-\frac{(c+2)}{(c)}\right)\cdots\cdots$$

quella di morire tutte nei primi 3 anni da

$$\left(1-\frac{(a+3)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+3)}{(b)}\right)\left(1-\frac{(c+3)}{(c)}\right)\cdots\cdots$$

e così di seguito. Quindi le probabilità contrarie a questi avvenimenti, quelle cioè che una almeno di queste persone rimanga in vita dopo un anno, dopo due anni, dopo tre anni, ec., saranno respettivamente rappresentate da

$$1-\left(1-\frac{(a+1)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+1)}{(b)}\right)\left(1-\frac{(c+1)}{(c)}\right)\cdots\cdot$$

$$1-\left(1-\frac{(a+2)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+2)}{(b)}\right)\left(1-\frac{(c+2)}{(c)}\right)\cdots\cdot$$

$$1-\left(1-\frac{(a+3)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+3)}{(b)}\right)\left(1-\frac{(c+3)}{(c)}\right)\cdots\cdot$$

. . . .

Ciò premesso, se si moltiplica la rendita annua vitalizia v per la probabilità che una almeno delle teste su cui è costituita sia sempre in vita dopo un anno, vale a dire per la probabilità che il vitaliziante ha di pagare la somma v alla fine del primo anno, e se il prodotto si divide per $1+r$, si otterrà

$$\frac{v}{1+r}\left[1-\left(1-\frac{(a+1)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+1)}{(b)}\right)\left(1-\frac{(c+1)}{(c)}\right)\cdots\cdot\right]$$

e sarà questo il valore attuale della prima annualità da pagarsi dopo un anno. In egual modo, moltiplicando la rendita v per la probabilità che dopo due anni sia sempre in vita una almeno delle teste sulle quali riposa il vitalizio, vale a

dire per la probabilità che il vitaliziante ha di pagare dopo due anni la rendita v, e dividendo il prodotto per $(1+r)^2$, si troverà

$$\frac{v}{(1+r)^2}\left[1-\left(1-\frac{(a+2)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+2)}{(b)}\right)\left(1-\frac{(c+2)}{(c)}\right)\ldots\ldots\right]$$

che rappresenterà il valore attuale dell' annualità v da pagarsi dopo due anni.

Proseguendo così fino agli ultimi limiti della vita, si troverà per la somma V dei valori attuali di tutte le annualità che il vitaliziante ha probabilità di pagare

$$\begin{aligned}
V = &\frac{v}{1+r}\left[1-\left(1-\frac{(a+1)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+1)}{(b)}\right)\left(1-\frac{(c+1)}{(c)}\right)\ldots\right]+\\
&\frac{v}{(1+r)^2}\left[1-\left(1-\frac{(a+2)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+2)}{(b)}\right)\left(1-\frac{(c+2)}{(c)}\right)\ldots\right]+\\
&\frac{v}{(1+r)^3}\left[1-\left(1-\frac{(a+3)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+3)}{(b)}\right)\left(1-\frac{(c+3)}{(c)}\right)\ldots\right]+\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

e sarà questo il valore presente di una rendita annua vitalizia v pagabile nella sua totalità finchè si trovi in vita uno almeno tra più determinati individui A, B, C, ec., aventi respettivamente l' età a, b, c, ec.

Se si tratterà di dover calcolare il valore di una rendita vitalizia *differita*, la cui corresponsione cioè non debba cominciare a decorrere che dopo un determinato numero n di anni, serviranno le medesime formule trovate precedentemente, tanto pel vitalizio sopra una sola persona come per quello sopra più persone, purchè però si osservi di prendere soltanto i termini che sono divisi per $(1+r)^{n+1}$, $(1+r)^{n+2}$, $(1+r)^{n+3}$, ec., omettendo tutti i precedenti. La ragione di questa regola è facile a comprendersi quando si ponga mente al metodo che abbiamo tenuto nello stabilire le formule generali pel vitalizio, perchè i termini che si trascurano esprimono precisamente i valori attuali della rendita v per quegli anni nei quali appunto la rendita non deve per condizione esser pagata. Così la formula del vitalizio sopra una sola persona (pag. 541) diverrà, nel caso che la rendita a debba essere differita di n anni,

$$A=\frac{a}{(m)}\left(\frac{(m+n+1)}{(1+r)^{n+1}}+\frac{(m+n+2)}{(1+r)^{n+2}}+\frac{(m+n+3)}{(1+r)^{n+3}}\ldots\ldots\right)$$

e quella del vitalizio sopra più persone testè trovata diverrà nello stesso caso

$$\begin{aligned}
V=&\frac{v}{(1+r)^{n+1}}\left[1-\left(1-\frac{(a+n+1)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+n+1)}{(b)}\right)\ldots\ldots\right]+\\
&\frac{v}{(1+r)^{n+2}}\left[1-\left(1-\frac{(a+n+2)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+n+2)}{(b)}\right)\ldots\ldots\right]+\\
&\frac{v}{(1+r)^{n+3}}\left[1-\left(1-\frac{(a+n+3)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+n+3)}{(b)}\right)\ldots\ldots\right]+\text{ ec.}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Nel caso che la rendita vitalizia fosse differita non di un determinato numero n di anni, ma fino al verificarsi di un dato evento, allora si deve moltiplicare per la probabilità di questo evento ciascuna delle annualità eventuali, le cui *speranze matematiche* (pag. 542) nelle formule precedenti formano colla loro somma il prezzo del vitalizio. Supponiamo, per esempio, che si cerchi il prezzo di una rendita annua vitalizia v da pagarsi ad un individuo A di anni a, ma da

non dover cominciare a decorrere che dopo la morte di un altro individuo B di anni b. Di sopra abbiamo veduto che, non considerando la condizione della morte di B alla quale è ora subordinato il pagamento del vitalizio da corrispondersi ad A, la prima annualità vitalizia v moltiplicata per la probabilità di pagarla, cioè per $\frac{(a+1)}{(a)}$, e ridotta al tempo presente mediante la divisione per $1+r$, formava nel resultato $\frac{(a+1)}{(a)} \cdot \frac{v}{1+r}$ la speranza matematica del vitaliziato di conseguire la prima annualità. Ora questa espressione, nel caso che si contempla, non rappresenta più la speranza matematica di A, perchè la rendita v non deve esser pagata che nel caso che B abbia cessato di vivere: quindi, siccome per le cose dette di sopra la probabilità che dopo un anno B sia in vita è $\frac{(b+1)}{(b)}$, e perciò la probabilità contraria che sia morto è $\left(1-\frac{(b+1)}{(b)}\right)$; così, per ottenere la vera speranza matematica che ha il vitaliziato di ricevere dopo un anno la rendita, bisognerà moltiplicare l'espressione di sopra trovata $\frac{(a+1)}{(a)} \cdot \frac{v}{1+r}$ per $\left(1-\frac{(b+1)}{(b)}\right)$, e il prodotto $\frac{(a+1)v}{(a)(1+r)}\left(1-\frac{(b+1)}{(b)}\right)$ esprimerà questa speranza.

Nella stessa guisa, la speranza matematica di ritirare la rendita dopo due anni non sarà più $\frac{(a+2)v}{(a)(1+r)^2}$, come si trovò nel vitalizio semplice, ma bensì $\frac{(a+2)v}{(a)(1+r)^2}\left(1-\frac{(b+2)}{(b)}\right)$; la speranza di aver la rendita alla fine del terzo anno sarà $\frac{(a+3)v}{(a)(1+r)^3}\left(1-\frac{(b+3)}{(b)}\right)$, e così di seguito. Talchè, riunendo tutti questi resultati, si otterrà per il prezzo V della rendita vitalizia della quale si tratta

$$V=\frac{v}{(a)}\left[\frac{(a+1)}{(1+r)}\left(1-\frac{(b+1)}{(b)}\right)+\frac{(a+2)}{(1+r)^2}\left(1-\frac{(b+2)}{(b)}\right)+\frac{(a+3)}{(1+r)^3}\left(1-\frac{(b+3)}{(b)}\right)\ldots\right]$$

Applicando un ragionamento perfettamente simile al caso di una rendita vitalizia costituita sopra più persone, ma che debba cominciare a decorrere soltanto dopo la morte di una data persona S di s anni, si troverà pel prezzo V di questo vitalizio:

$$V=\frac{v}{(1+r)}\left(1-\frac{(s+1)}{(s)}\right)\left[1-\left(1-\frac{(a+1)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+1)}{(b)}\right)\left(1-\frac{(c+1)}{(c)}\right)\ldots\right]+$$

$$\frac{v}{(1+r)^2}\left(1-\frac{(s+2)}{(s)}\right)\left[1-\left(1-\frac{(a+2)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+2)}{(b)}\right)\left(1-\frac{(c+2)}{(c)}\right)\ldots\right]+$$

$$\frac{v}{(1+r)^3}\left(1-\frac{(s+3)}{(s)}\right)\left[1-\left(1-\frac{(a+3)}{(a)}\right)\left(1+\frac{(b+3)}{(b)}\right)\left(1-\frac{(c+3)}{(c)}\right)\ldots\right]+$$

. . . .

Il finquì detto basta per trovare il valore di una rendita vitalizia in qualunque altra più complicata combinazione di condizioni: mentre in qualunque caso non si deve fare altro che moltiplicare ciascuna rendita annua per la probabilità che il vitaliziante ha di pagarla, e ridurre il prodotto al tempo presente mediante lo sconto; dopo di che la somma di tutte le speranze matematiche così trovate darà il prezzo cercato del vitalizio.

Tutte le istituzioni relative alle assicurazioni sulla vita, alle tontine, e alle casse di sopravviveuza sono fondate, come quelle che concernono le rendite vitalizie, sulle probabilità della vita umana e sulla teoria delle annualità. I problemi cui queste istituzioni danno luogo si risolvono con metodi analoghi a quelli che abbiamo esposto di sopra. Il lettore che desiderasse di vedere magistralmente trattata questa materia dovrà ricorrere alle opere classiche di Milne e di Baily: quella di Milne è intitolata: *A treatise on the valuation of annuities and survivorships*, Londra, 1815, 2 vol. in-8; quella di Baily ha per titolo, *The Doctrine of annuities and insurances*, Londra, 1816, in-8; quest' ultima opera si trova tradotta in francese da de Courey col titolo di *Théorie des annuités viagères et des assurances sur la vie*, Parigi, 1836, 2 vol. in-8. I limiti di questo Dizionario non permettendoci di trattare a fondo questo soggetto, ci contenteremo di darne qual saggio un solo esempio.

Problema. Determinare qual premio P deve pagare per une sola volta un individuo in età di m anni ad una compagnia d' assicurazione sulla vita, affinchè dopo la sua morte sia pagata a' suoi eredi una somma s.

Il premio P da pagarsi alla compagnia di assicurazione deve essere esattamente eguale alla speranza matematica che hanno gli eredi di conseguire la somma s, ridotta però una tale speranza al tempo attuale. Ciò premesso, è evidente che la probabilità di riscuotere la somma al termine di un determinato anno è misurata dalla probabilità che l' individuo sulla cui vita è fatta l' assicurazione muoja precisamente in quel determinato anno. Ora, conservando la notazione convenuta precedentemente, di un numero (m) d' individui in età di m anni ne muojono $(m)-(m+1)$ nel corso del primo anno, cioè prima di arrivare a compire $m+1$ anni; ne muojono $(m+1)-(m+2)$ nel corso del secondo anno; $(m+2)-(m+3)$ nel corso del terzo anno, ec.; perciò le probabilità che ha un individuo in età di m anni di morire precisamente nel 1.° anno, nel 2.° anno, nel 3.° anno, ec. dopo esser giunto a compire l' anno $m$simo di sua età saranno espresse da

$$\frac{(m)-(m+1)}{(m)},\quad \frac{(m+1)-(m+2)}{(m)},\quad \frac{(m+2)-(m+3)}{(m)}\;\ldots\ldots;$$

quindi le speranze matematiche degli eredi di conseguire la somma s precisamente al termine del primo anno, del 2.° anno, del 3.° anno, ec., saranno

$$\frac{[(m)-(m+1)]s}{(m)},\quad \frac{[(m+1)-(m+2)]s}{(m)},\quad \frac{[(m+2)-(m+3)]s}{(m)}\ldots\ldots$$

che ridotte mediante lo sconto al tempo attuale diverranno

$$\frac{[(m)-(m+1)]s}{(m)(1+r)},\quad \frac{[(m+1)-(m+2)]s}{(m)(1+r)^2},\quad \frac{[(m+2)-(m+3)]s}{(m)(1+r)^3}\ldots\ldots$$

Ma siccome in qualunque anno muoja l'individuo assicurato i suoi eredi hanno sempre il diritto a ritirare la somma fissata, perciò la speranza matematica di riscuotere una tal somma in un anno *qualunque*, che come abbiamo detto deve essere eguale al premio P da pagarsi attualmente alla compagnia d' assicurazione, si comporrà della somma di tutte queste speranze parziali. Così avremo, facendo

le convenienti riduzioni

$$P = \frac{s}{(m)}\left(\frac{(m)-(m+1)}{1+r} + \frac{(m+1)-(m+2)}{(1+r)^2} + \frac{(m+2)-(m+3)}{(1+r)^3} \ldots\right).$$

Il calcolo di questa formula riesce lungo e nojoso, specialmente se si tratta di età molto basse, perchè allora sono molti i termini da sommarsi: ma in questo caso, come per il caso analogo della formula del vitalizio semplice (pag. 543), si può trovare il mezzo di ottenere con facilità il premio dovuto per una data età, calcolato che sia quello corrispondente ad una età maggiore o minore di un anno. Infatti, indichiamo al solito con P_0, P_1, P_2 .... P_m, P_{m+1} i premj che si debbono pagare per assicurare una data somma s alla morte di un individuo di nascita, di un anno, di due anni .... di m anni, di $m+1$ anni; per quello che si è detto di sopra si avrà

$$P_m = \frac{s}{(m)}\left(\frac{(m)-(m+1)}{1+r} + \frac{(m+1)-(m+2)}{(1+r)^2} + \frac{(m+2)-(m+3)}{(1+r)^3} \ldots\ldots\right)$$

$$P_{m+1} = \frac{s}{(m+1)}\left(\frac{(m+1)-(m+2)}{1+r} + \frac{(m+2)-(m+3)}{(1+r)^2} + \frac{(m+3)-(m+4)}{(1+r)^3} \ldots\ldots\right)$$

Se ora si moltiplicano i due membri della prima di queste equazioni per (m), e se quelli della seconda si moltiplicano per $(m+1)$ e si dividono per $1+r$, si otterrà

$$(m)P_m = s\left(\frac{(m)-(m+1)}{1+r} + \frac{(m+1)-(m+2)}{(1+r)^2} + \frac{(m+2)-(m+3)}{(1+r)^3} \ldots\ldots\right)$$

$$\frac{(m+1)P_{m+1}}{1+r} = s\left(\frac{(m+1)-(m+2)}{(1+r)^2} + \frac{(m+2)-(m+3)}{(1+r)^3} + \frac{(a+3)-(a+4)}{(1+r)^4} \ldots\ldots\right)$$

e sottraendo termine a termine la seconda di queste equazioni dalla prima, si avrà

$$(m)P_m - \frac{(m+1)P_{m+1}}{1+r} = s\left(\frac{(m)-(m+1)}{1+r}\right)$$

e finalmente

$$P_m = \frac{1}{(m)(1+r)}\Big[(m+1)P_{m+1} + s[(m)-(m+1)]\Big].$$

Con questo metodo, e facendo uso della legge di mortalità della città di Chester rettificata a forma dell' avvertenza fatta alla pagina 551, è stata calcolata la seguente

TAVOLA dei Premj da pagarsi una sola volta dagl' individui delle sotto notate età, per assicurare il pagamento di una lira al termine dell' anno in cui avverrà la loro morte.

ETÀ	MASCHI			FEMMINE		
	3 PER %	4 PER %	5 PER %	3 PER %	4 PER %	5 PER %
0	0.50361	0,44821	0.41097	0,45482	0,39860	0,36179
1	0,41464	0,35070	0,30858	0.38543	0,32310	0,28302
2	0,37050	0,30198	0,25725	0.34636	0,28027	0,23815
3	0,34252	0,27069	0,22396	0 31612	0,24673	0,20270
4	0,32568	0,25142	0,20311	0,29840	0,22661	0,18108
5	0,32046	0,24482	0,19553	0,28730	0,21355	0,16668
6	0,31631	0,23930	0,18898	0,28387	0,20877	0,16089
7	0,31436	0,23612	0,18482	0,28481	0.20874	0,16004
8	0,31475	0,23548	0,18329	0,28845	0,21166	0,16227
9	0,31822	0,23823	0,18531	0,29293	0,21549	0,16545
10	0,32320	0,24265	0,18911	0,29838	0,22041	0,16978
11	0,32910	0,24810	0,19400	0,30442	0,22599	0,17482
12	0 33573	0,25438	0,19980	0.31056	0,23169	0,18000
13	0.34258	0,26093	0,20590	0,31648	0,23717	0.18495
14	0,34911	0,26716	0,21166	0.32259	0,24288	0,19016
15	0,35597	0,27377	0,21785	0,32850	0,24836	0,19514
16	0,36241	0,27993	0,22359	0,33418	0,25362	0,19988
17	0,36822	0.28540	0,22858	0,33963	0,25863	0,20436
18	0,37367	0,29047	0,23315	0,34485	0,26338	0.20857
19	0,37885	0,29526	0.23741	0,34971	0,26775	0,21236
20	0,38419	0,30022	0,24186	0,35513	0,27273	0,21682
21	0,38957	0,30523	0,24638	0,36112	0,27838	0,22198
22	0,39501	0,31032	0,25095	0,36730	0,28425	0,22740
23	0.40017	0,31509	0.25519	0,37368	0,29036	0,23308
24	0.40546	0,32002	0,25960	0,37975	0,29615	0,23844
25	0,41091	0,32512	0,26418	0,38562	0,30172	0,24355
26	0,41585	0,32965	0,26814	0,38994	0,30553	0,24678
27	0 42092	0,33432	0.27223	0.39435	0,30945	0,25010
28	0 42610	0,33912	0.27646	0,39876	0,31335	0,25339
29	0.43196	0.34470	0,28153	0,40327	0.31735	0,25677
30	0,43832	0,35085	0,28722	0,40787	0,32145	0,26024
31	0.44541	0,35788	0.29387	0,41383	0,32710	0.26539
32	0,45327	0 36581	0,30154	0,41996	0.33297	0,27076
33	0,46075	0,37333	0,30877	0,42618	0.33893	0.27625
34	0,46846	0,38115	0,31636	0.43258	0 34512	0,28198
35	0,47643	0,38931	0,32432	0,43917	0,35155	0 28798

Segue la Tavola precedente.

ETÀ	MASCHI			FEMMINE		
	3 per %	4 per %	5 per %	3 per %	4 per %	5 per %
36	0,48413	0,39717	0,33200	0,44545	0,35762	0,29360
37	0,49208	0,40535	0,34005	0,45191	0,36392	0,29945
38	0 49964	0,41312	0,34767	0,45856	0,37044	0,30557
39	0,50744	0,42120	0,35564	0,46531	0.37709	0.31182
40	0,51494	0,42896	0,36330	0,47174	0,38338	0,31768
41	0,52267	0,43702	0,37130	0,47834	0,38989	0,32378
42	0,53000	0.44462	0,37881	0,48513	0,39662	0,33013
43	0.53753	0,45250	0,38665	0,49211	0,40360	0,33676
44	0,54473	0,46001	0,39411	0,49973	0,41133	0,34422
45	0,55200	0,46764	0,40171	0,50705	0,41874	0,35134
46	0,55947	0,47552	0,40960	0,51449	0,42630	0,35863
47	0 56701	0,48352	0,41766	0.52214	0.43414	0,36625
48	0,57475	0,49178	0.42603	0,53003	0,44228	0,37421
49	0,58203	0,49952	0,43383	0,53763	0,45010	0,38182
50	0,58947	0,50747	0,44190	0,54588	0,45871	0,39033
51	0.59706	0.51565	0.45022	0,55428	0,46753	0,39910
52	0,60471	0,52392	0,45869	0.56347	0.47733	0,40898
53	0,61242	0.53227	0.46727	0,57286	0.48741	0.41922
54	0,62028	0,54085	0,47613	0,58258	0,49792	0,42998
55	0,62888	0,55037	0,48610	0,59264	0,50889	0,44130
56	0,63829	0,56090	0,49725	0.60346	0,52084	0,45379
57	0,64799	0,57185	0,50893	0,61469	0.53335	0,46696
58	0 65788	0,58308	0,52100	0.62623	0.54631	0,48073
59	0,66809	0,59477	0,53367	0,63723	0,55869	0,49390
60	0 67724	0,60524	0,54500	0,64864	0,57164	0,50780
61	0,68473	0,61374	0,55411	0,65803	0,58220	0,51902
62	0,69004	0,61959	0,56020	0,66520	0,59009	0,52721
63	0.69497	0,62498	0.56576	0,67226	0,59788	0,53530
64	0,69943	0.62980	0,57064	0,67920	0,60553	0.54322
65	0,70469	0,63559	0,57662	0,68819	0,61572	0,55410
66	0,71247	0,64448	0,58621	0,69938	0,62867	0.56823
67	0.72261	0.65636	0,59931	0,71201	0,64348	0,58460
68	0,73458	0,67056	0,61520	0,72517	0.65903	0,60194
69	0,74701	0,68543	0,63198	0,73828	0,67466	0,61948
70	0,75829	0,69899	0,64734	0.74988	0,68851	0,63506
71	0.76740	0,70995	0,65976	0,75927	0,69970	0,64763
72	0,77130	0,71446	0,66470	0,76590	0,70750	0,65630
73	0,77379	0,71723	0,66760	0,77186	0,71451	0,66406
74	0,77525	0,71870	0,66895	0,77693	0,72042	0,67055
75	0,77757	0,72120	0,67146	0,78281	0,72737	0,67827

Segue la Tavola precedente.

ETÀ	MASCHI			FEMMINE		
	3 per %	4 per %	5 per %	3 per %	4 per %	5 per %
76	0,78173	0.72598	0.67663	0,79059	0,73672	0,68884
77	0,78834	0,73384	0.68544	0,79862	0,74642	0,69990
78	0,79539	0.74229	0.69497	0,80677	0,75635	0,71127
79	0.80176	0,74991	0.70355	0,81444	0,76573	0,72208
80	0,80876	0,75836	0,71315	0,82124	0,77408	0,73170
81	0,81461	0,76540	0,72110	0.82695	0,78110	0,73985
82	0,81910	0.77073	0,72708	0,83080	0,78582	0.74530
83	0,82368	0,77617	0,73317	0,83174	0,78687	0,74641
84	0,82846	0,78189	0.73958	0.82813	0,78214	0,74062
85	0,83326	0.78762	0.74601	0,82213	0,77428	0,73101
86	0,83912	0,79470	0,75404	0,82079	0,77220	0.72810
87	0,84567	0,80267	0,76316	0,82448	0,77642	0,73262
88	0.85438	0,81344	0.77566	0.83118	0,78446	0,74167
89	0,86163	0,82238	0.78602	0,84233	0,79819	0,75755
90	0,87101	0,83409	0,79976	0,85357	0,81210	0,77374
91	0,88020	0.84562	0,81333	0,86431	0,82547	0,78936
92	0,88741	0,85467	0.82400	0,87484	0.83864	0.80481
93	0.89180	0,86012	0,83035	0,88477	0,85133	0.81978
94	0,89731	0.86701	0,83844	0,89358	0.86217	0,83256
95	0,89748	0,86699	0,83813	0.90016	0,87042	0,84224
96	0.89921	0,86889	0,84005	0,90823	0,88059	0,85428
97	0,91444	0,88832	0,86330	0,91280	0,88623	0,86080
98	0,93088	0.90945	0,88876	0,92623	0,90341	0,88140
99	0,94920	0,93318	0,91761	0,94695	0,93025	0,91400

Se in questo problema, invece del premio unico P, si fosse cercato il premio annuo R che l'assicurato deve pagare finchè vivrà alla compagnia d'assicurazione affinchè dopo la sua morte sia pagata a' suoi eredi la somma s, la soluzione non avrebbe presentato maggior difficoltà.

Nella nuova ipotesi, la speranza matematica degli eredi non è variata, poichè, come nel primo caso, hanno essi il diritto di conseguire la somma s alla morte dell' assicurato, in qualunque epoca questa avvenga. Quindi l'espressione analitica di tale speranza sarà sempre quella medesima che pel premio P si trovò alla pag. 556.

È però variato il modo di pagare il premio P, perchè, invece di sborsare questo premio nell'atto stesso dell'assicurazione, l'assicurato promette di pagare una somma annua durante la sua vita, o, in altri termini, invece di sborsare una somma certa, dà una rendita vitalizia. Ora, affinchè in questo nuovo modo di pagamento le condizioni della compagnia d'assicurazione non siano alterate, bi-

sogna che il valore attuale di questa rendita o premio annuo, che l'assicurato si obbliga di corrispondere, sia esattamente eguale al premio unico P; donde diviene evidente la maniera di stabilire l'equazione del problema

Il valore attuale del premio annuo R da corrispondersi dall'assicurato si deduce immediatamente dalla formula del vitalizio trovata alla pag. 541, osservando però che siccome nel vitalizio il pagamento della rendita si suppone fatto posticipato alla fine di ogni anno, mentre nelle assicurazioni si eseguisce anticipatamente al principio di ciascun anno, così, per applicare a questo secondo caso la formula della pag. 541, bisogna aumentarla del primo pagamento che si fa nell'atto dell'assicurazione: per conseguenza, aggiungendo al valore del vitalizio la rendita R che si paga presentemente, si avrà per l'espressione del valore attuale del premio annuo R

$$R\left[1+\frac{1}{(m)}\left(\frac{(m+1)}{1+r}+\frac{(m+2)}{(1+r)^2}+\frac{(m+3)}{(1+r)^3}\cdots\right)\right],$$

espressione che come abbiamo detto deve essere eguale a quella trovata per P alla pag. 556. Stabilita perciò quest'equazione, e risolutala per R, si avrà

$$R=\frac{\frac{s}{(m)}\left(\frac{(m)-(m+1)}{1+r}+\frac{(m+1)-(m+2)}{(1+r)^2}+\frac{(m+2)-(m+3)}{(1+r)^3}\cdots\cdots\right)}{1+\frac{1}{(m)}\left(\frac{(m+1)}{1+r}+\frac{(m+2)}{(1+r)^2}+\frac{(m+3)}{(1+r)^3}\cdots\cdots\right)}.$$

Da questa formula si scorge facilmente che se si volesse costruire pei premj annui una tavola simile a quella costruita pei premi unici, potrebbe questa ottenersi con una semplice divisione, mediante le due tavole già costruite alle pagg. 549 e 557. Infatti, supposto che la compagnia d'assicurazione debba pagare una lira alla morte dell'assicurato, nel qual caso $s=1$, il numeratore del valore di R diviene

$$\frac{1}{(m)}\left(\frac{(m)-(m+1)}{1+r}+\frac{(m+1)-(m+2)}{(1+r)^2}+\frac{(m+2)-(m+3)}{(1+r)^3}+\cdots\cdot\right),$$

ed esprime il valore del premio unico necessario per assicurare il pagamento di una lira alla morte di un individuo di m anni: ed ecco che così il numeratore di R ci vien dato dalla tavola dei premj unici a pag. 557. In quanto poi al denominatore è evidente che, tolta l'unità, il resto

$$\frac{1}{(m)}\left(\frac{(m+1)}{1+r}+\frac{(m+2)}{(1+r)^2}+\frac{(m+3)}{(1+r)^3}+\cdots\cdots\right)$$

esprime il valore di una rendita vitalizia di una lira da corrispondersi durante la vita di un individuo di m anni; e questo valore ci viene somministrato dalla tavola alla pag. 549. In questa guisa, dividendo ciascun termine della tavola dei premj unici pel termine corrispondente alla stessa età nella tavola della pag. 549, aumentato però di un'unità, si giungerà a formare la seguente

TAVOLA dei Premj annui da pagarsi dagl'individui delle sotto notate età, per assicurare il pagamento di una lira al termine dell'anno in cui avverrà la loro morte.

ETÀ	MASCHI			FEMMINE		
	3 PER %	4 PER %	5 PER %	3 PER %	4 PER %	5 PER %
0	0.02955	0,03124	0,03322	0,02429	0,02549	0.02699
1	0,02063	0,02078	0,02125	0,01826	0,01836	0,01880
2	0,01714	0,01664	0,01649	0,01543	0,01498	0,01489
3	0,01517	0,01428	0,01374	0,01346	0,01260	0,01211
4	0,01406	0,01292	0,01214	0,01238	0,01127	0,01053
5	0,01373	0,01247	0,01157	0,01174	0,01045	0,00952
6	0,01347	0,01210	0,01109	0,01154	0,01015	0,00913
7	0,01335	0,01189	0,01080	0,01160	0,01015	0,00907
8	0,01337	0,01185	0,01069	0,01180	0,01033	0,00922
9	0,01359	0,01203	0,01083	0,01206	0,01057	0,00944
10	0,01390	0,01232	0,01110	0,01238	0,01088	0,00974
11	0,01428	0,01269	0,01146	0,01274	0,01123	0,01009
12	0,01472	0,01312	0,01189	0,01312	0,01160	0,01045
13	0,01517	0.01358	0,01235	0,01348	0,01196	0,01080
14	0,01562	0,01402	0,01278	0,01387	0,01234	0,01118
15	0,01609	0,01450	0,01326	0,01424	0,01271	0,01154
16	0,01655	0,01495	0,01371	0,01461	0,01307	0,01189
17	0,01697	0,01536	0,01411	0,01498	0,01342	0,01223
18	0,01737	0,01575	0,01448	0,01533	0,01375	0,01255
19	0,01776	0,01612	0,01482	0,01566	0,01406	0,01284
20	0,01817	0,01650	0,01519	0,01604	0,01443	0,01318
21	0,01858	0,01690	0,01557	0,01646	0,01484	0,01359
22	0,01901	0,01731	0,01595	0,01690	0,01528	0,01401
23	0,01943	0,01770	0.01631	0,01737	0,01574	0,01447
24	0,01986	0,01810	0,01670	0,01783	0,01618	0,01491
25	0,02031	0,01853	0,01710	0,01828	0,01662	0,01533
26	0,02073	0,01892	0,01745	0,01861	0,01692	0,01560
27	0.02117	0,01932	0,01781	0,01896	0,01723	0,01588
28	0,02162	0,01974	0,01819	0,01931	0,01755	0,01616
29	0,02215	0,02023	0,01866	0,01968	0,01788	0,01645
30	0,02273	0,02079	0,01919	0,02006	0,01822	0,01675
31	0,02339	0,02144	0,01982	0,02056	0,01870	0,01720
32	0,02414	0,02219	0,02056	0,02108	0,01920	0,01768
33	0,02488	0,02292	0,02127	0,02163	0,01972	0,01817
34	0,02567	0,02369	0,02204	0,02220	0,02027	0,01870
35	0,02650	0,02454	0,02286	0,02280	0,02085	0,01926

Segue la Tavola precedente.

ETÀ	MASCHI			FEMMINE		
	3 PER %	4 PER %	5 PER %	3 PER %	4 PER %	5 PER %
36	0,02733	0,02534	0,02367	0,02339	0,02141	0,01979
37	0,02821	0,02622	0,02454	0,02401	0,02202	0,02036
38	0.02908	0,02708	0,02538	0,02466	0,02263	0 02095
39	0,03000	0,02799	0,02628	0,02534	0,02329	0,02158
40	0,03092	0,02889	0,02717	0,02601	0,02392	0,02217
41	0,03189	0,02986	0,02812	0,02670	0,02458	0,02280
42	0,03284	0,03079	0,02904	0,02744	0,02528	0,02347
43	0,03385	0,03179	0,03002	0,02822	0,02603	0,02418
44	0,03484	0,03277	0,03097	0,02909	0,02688	0,02499
45	0,03588	0,03379	0,03197	0,02996	0,02771	0,02579
46	0,03699	0,03487	0,03304	0,03086	0,02858	0,02663
47	0 03814	0,03601	0,03415	0,03182	0.02951	0,02752
48	0,03936	0,03722	0,03534	0,03284	0,03050	0,02847
49	0,04056	0,03839	0,03649	0,03386	0,03148	0,02941
50	0,04182	0,03963	0,03779	0,03501	0,03260	0,03049
51	0,04316	0,04095	0,03900	0,03621	0,03377	0,03163
52	0,04455	0,04233	0,04035	0,03759	0,03513	0,03295
53	0,04602	0,04377	0,04177	0,03906	0.03657	0.03437
54	0,04757	0,04531	0,04328	0,04065	0,03814	0,03592
55	0,04935	0,04708	0,04504	0,04237	0,03986	0,03761
56	0,05139	0,04913	0,04710	0,04432	0,04181	0,03956
57	0,05361	0,05137	0,04935	0,04646	0.04396	0,04171
58	0.05600	0,05379	0,05180	0,04880	0.04632	0,04408
59	0,05862	0,05645	0,05449	0,05116	0,04869	0,04647
60	0,06111	0,05897	0,05704	0,05377	0,05133	0,04913
61	0,06326	0,06111	0,05917	0,05604	0,05360	0,05139
62	0,06484	0,06265	0,06066	0,05786	0,05537	0,05310
63	0,06636	0,06410	0,06204	0,05974	0,05719	0,05485
64	0,06778	0,06543	0,06329	0,06166	0,05904	0,05663
65	0,06950	0,06708	0,06485	0,06428	0,06163	0,05918
66	0,07217	0,06973	0,06746	0,06776	0,06512	0,06267
67	0,07587	0.07346	0,07122	0,07201	0,06942	0.06701
68	0,08060	0,07829	0,07613	0,07685	0.07434	0,07201
69	0,08600	0,08381	0,08177	0,08216	0,07976	0.07752
70	0,09137	0,08931	0,08741	0.08732	0,08502	0,08287
71	0,09609	0,09414	0,09234	0,09187	0,08962	0,09752
72	0,09822	0,09624	0,09440	0,09529	0,09303	0,09093
73	0,09963	0,09756	0,09564	0,09854	0,09626	0,09413
74	0,10047	0,09827	0,09622	0,10144	0,09911	0 09692
75	0,10182	0,09949	0,09732	0,10498	0,10262	0,10039

Segue la Tavola precedente.

ETÀ	MASCHI			FEMMINE		
	3 PER %	4 PER %	5 PER %	3 PER %	4 PER %	5 PER %
76	0,10431	0,10190	0,09964	0,10996	0,10763	0,10542
77	0,10848	0,10605	0,10376	0,11550	0,11322	0,11105
78	0,11322	0,11078	0,10849	0,12160	0,11940	0,11731
79	0,11779	0,11533	0,11301	0,12783	0,12572	0,12372
80	0,12317	0,12071	0,11839	0,13381	0,13179	0,12988
81	0,12798	0,12548	0,12313	0,13918	0,13724	0,13542
82	0,13188	0,12930	0,12686	0,14301	0,14111	0,13934
83	0,13606	0,13338	0,13084	0,14398	0,14200	0,14016
84	0,14067	0,13788	0,13523	0,14034	0,13808	0,13597
85	0,14555	0,14264	0,13986	0,13462	0,13193	0,12941
86	0,15191	0,14888	0,14599	0,13339	0,13037	0,12752
87	0,15960	0,15645	0,15344	0,13681	0,13356	0,13048
88	0,17089	0,16770	0,16464	0,14340	0,13998	0,13672
89	0,18137	0,17808	0,17492	0,15560	0,15212	0,14879
90	0,19668	0,19337	0,19019	0,16977	0,16624	0,16284
91	0,21399	0,21068	0,20749	0,18552	0,18191	0,17845
92	0,22957	0,22620	0,22295	0,20359	0,19990	0,19635
93	0,24006	0,23650	0,23306	0,22403	0,22025	0,21660
94	0,25450	0,25074	0,24712	0,24455	0,24059	0,23678
95	0,25498	0,25071	0,24657	0,26260	0,25834	0,25422
96	0,25985	0,25490	0,25010	0,28825	0,28363	0,27916
97	0,31130	0,30593	0,30071	0,30490	0,29962	0,29447
98	0,39227	0,38628	0,38046	0,36571	0,35973	0,35390
99	0,54417	0,53719	0,53036	0,51987	0,77515	0,50613

VITE. (*Mec.*) Una delle sette macchine considerate come semplici. Questa consiste in un cilindro retto K (*Tav.* CXLV, *fig.* 3) e (*Tav.* CXX, *fig.* 7) sopra la superficie del quale si è vuotato una gola a forma di spirale. La parte saliente si chiama la *spira della vite*, e la distanza che regna verticalmente tra due punti della *spira* o la larghezza della gola prende il nome di *passo della vita*.

Quando la spira si termina in tagliente, come nella (*Tav.* CXX, *fig.* 7), la virtù dicesi a *spira angolare*. Questa costruzione, che dà molta forza alla base della spira è preferita per tutte le virtù di rinnioni, e generalmente per le viti in legno. Quando il taglio e delle spire presenta, come nella (*Tav.* CXLV, *fig.* 3), la forma di un parallelogrammo, la virtù si dice a *spira quadrata*. Si costruisce in questo modo le grandi viti in ferro che si eseguiscono al tornio.

Si chiama *dado* o *madravite* il pezzo MN nel quale si fa entrare la *vite*, e la cui concavità contiene una *scanalatura* vuota simile alla spira; quando la vite è entrata nel vuoto, la scanalatura è esattamente ripiena dalla spira, dimodochè

la vite non può prendere altro moto che di avanzarsi nel senso della sua lunghezza, girando sopra sè stessa.

Nell' uso di questa macchina, uno dei due pezzi è fissato e l' altro è mobile; così, secondo le circostanze, la vite è fissa ed è il dado o madrevite che cammina girando intorno del suo asse, ovvero il dado o madrevite è fisso ed è la vite che si muove. Questi due casi equivalgono al medesimo per le condizioni dell'equilibrio. Supponendo che la vite K sia fissa e che il dado o madrevite MN sia caricata di un peso P al quale deve fare equilibrio una potenza Q applicata all' estremità di un braccio di leva, si dimostra, in tutti i trattati di statica, perchè ci sia equilibrio, bisogna che *la potenza stia alla resistenza come il passo della vite sta alla circonferenza che la potenza tende a descrivere.* Questa macchina è dunque più vantaggiosa quanto il passo della vite ha meno altezza e quanto il punto d' applicazione della potenza è più lontano dall' asse.

La curva regolare che forma la spira sopra la superficie del cilindro fondamentale si chiama un *elice*.

La VITE SENZA FINE non differisce dalla vite ordinaria che per il motivo che essa non si muova in un dado o madrevite, e che la sua azione diventa mediante ciò continua. Questa è una macchina il cui cilindro gira sempre dalla stessa parte sopra dei perni B e C (*Tav.* LIV, *fig.* 3); la sua spira porta girando una ruota FD, di cui essa ingrana i denti, la quale porta al suo centro un asse cilindrico ove si avvolge una corda destinata ad elevare un peso. Una piccolissima forza applicata alla manovella AB può inalzare un peso grandissimo W.

Tutte le specie di vite sono macchine composte dalla *leva* e dal *piano inclinato*; così la loro teoria non è che una conseguenza di quella di quest' ultime.

VITE D' ARCHIMEDE. (*Mec.*) Macchina molto ingegnosa propria ad elevare l'acqua, inventata da Archimede. Essa si compone di un cilindro AB (*Tav.* LIV, *fig.* 7) che gira sopra due perni e intorno del quale si è avvoltato in spirale un canale vuoto CEHGFD. S' inclina questo cilindro all' orizzonte sotto un angolo di circa 45°, e si fa immergere nell' acqua l' orifizio C del canale. Se col mezzo di una manovella IK, o per mezzo di qualunque altro meccanismo si fa girare la *vite*, l' acqua sale nel canale, si porta successivamente di spira in spira e va a scaricarsi per l' altra estremità D del canale.

In questa macchina l' acqua sale con la stessa forza che tende a farla discendere; vale a dire, col suo proprio peso. Infatti, la particella d' acqua che è nella parte inferiore della vite, in E per esempio, non ci può rimanere quando si gira la vite, perchè la sua gravità l' obbliga di andare al punto seguente, che in questo momento si trova più basso del punto E, essendo passato sotto la vite, ma che nello stesso tempo si trova in un punto più elevato di quello ove era il punto E quando anco esso era per di sotto; dimodochè a ciascuno istante questa particella d'acqua si trova continuamente in punti più elevati, ed essa vi è realmente portata mediante la sua gravità. Ora ciò che si dice di questa particella d' acqua, possiamo dirlo di tutte le altre; così fin da quando l' acqua è giunta all' orifizio superiore D, essa deve continuamente sgorgare, fintantochè la vite gira e che la sua estremità inferiore s' immerge. Questa macchina è utilissima per elevare una grandissima quantità d' acqua con una piccole forza. Se ne sono serviti con un gran successo per vuotare dei laghi e degli stagni.

Quando si tratta di elevare l' acqua ad un'altezza considerabile, una sola vite non è sufficiente, perchè questa vite dovendo essere inclinata non può portare l' acqua ad una grande altezza senza diventare essa stessa lunghissima e mediante ciò assai pesante, e senza risicare di curvarsi e di perdere il suo equilibrio; ma allora possiamo, con una seconda vite, elevare l' acqua che una prima ha portato in un serbatojo, e così di seguito. Daniele Bernoulli ha dato nella sua Idro-

dinamica una sviluppata teoria della *vite d' Archimede* e degli effetti che essa può produrre. (*Vedi* ancora la *Nouvelle architecture hydraulique* del signor di Prony.)

VITELLIO o VITELLO, matematico, nato in Polonia nel secolo decimo terzo, dall' illustre famiglia di Ciolek, tradusse, secondo l' uso comune ai dotti del suo tempo, il suo nome di polacco in latino, ed assunse quello di *Vitellio*. Sotto il regno di Boleslao il *pudico*, dimorava presso Cracovia. Ivi ordinò i materiali che aveva raccolto ne' suoi viaggi, e massimamente le numerose esperienze che fatte aveva intorno all' ottica. L' opera non uscì alla luce che lungo tempo dopo la sua morte, col titolo: *Vitellionis perspectivae libri decem*, Norimberga, 1533, in-fol. A tale prima edizione dettero le loro cure G. Tanstetter e P. Appiano, ambedue professori di matematiche. Appiano dice nella sua prefazione: «Pomponio Gaurio scrisse con sufficiente esattezza sulla prospettiva; e fra gli anti« chi si ha Alhazen, Balneol, Giovanni da Pisa, Teodorico; ma nessuno di essi « trattò l' ottica e la prospettiva con tanta accuratezza e perfezione, quanto il « nostro Vitellio, nel quale i giovani allievi desiderosi d' imparare tale bella « scienza troveranno una scorta sicura ». La seconda edizione di quest' opera comparve col titolo di *Vitellionis mathematici doctissimi de optica, id est, de natura, ratione et projectione radiorum, visus, luminum, colorum atque formarum, quam vulgo prespectivam vocant, libri decem*, Norimberga, 1551, in-fol. Montucla e Brisson asseriscono che la gloria di avere scoperti ed annunziati all' Europa i primi elementi dell' ottica non appartenga a Vitellio, e che il dotto polacco non abbia fatto che tradurre in latino quello che due secoli prima di lui l' arabo Alhazen (*Vedi* ALHAZEN) aveva trovato e pubblicato in lingua araba. I due fisici francesi non avrebbero certamente avventurata tale opinione se avessero letti e confrontati tra loro Alhazen e Vitellio. Tale confronto sarebbe stato loro facilissimo, se si fossero dati la briga di cercare la terza edizione di Vitellio, che comprende ancora il trattato di Alhazen sull' ottica. Ecco il titolo di questa edizione: *Opticae thesaurus Alhazeni Arabis libri septem, nunc primum editi. Ejusdem liber de crepusculis et nubium accensionibus. Item Vitellionis Thuringo-Poloni libri decem, a Fr. Risnero*, Basilea, 1572. Risner dice nella sua dedica a Caterina de' Medici. « Ramus ed io cercavamo da lungo tempo Alha« zen. Finalmente avendone trovati due manoscritti, ho impiegato un anno per « pubblicarli. Tale dotto arabo trattò l' ottica in tutti i suoi particolari, ma è « prolisso e confuso. Ho accennato i teoremi che si trovano pure nell' ottica di « Vitellio, acciocchè il lettore possa ajutarsi con questi confronti in una materia « così difficile ».

Nella stessa prefazione, Risner soggiunge: « È facil cosa determinare il tempo « in cui visse Vitellio, essendo la sua opera dedicata al suo fratello Guglielmo di « Morbeta, che nel 1269 era gran penitenziere alla corte di Roma. Nell' anno « stesso, indirizzando al suo nipote Arnolfo un trattato di *Geomanzia*, di cui pos« siedo un manoscritto, Vitellio vi parla del suo fratello come di persona ancora « vivente ». I dotti matematici Erasmo Reinhold e Gaspero Peucer pongono Vitellio nel medesimo tempo. Quanto ai luoghi in cui visse, i dotti non sono d' accordo, gli uni facendolo originario di Polonia, gli altri di Turingia. Certo è che fu in Italia. Nella sua *Ottica*, lib. X, teorema 42, racconta egli appunto, parlando dei fenomeni ottici che osservansi in un'acqua chiara e profonda: *Quales aquas, in loco subterroneo in concovitate montis, qui est inter civitates Paduam et Vicentiam (qui locus dicitur Cubatus), nos vidimus lucidas, quasi ut aerem, ec.* Nello stesso libro, teorema 67, riferendo le esperienze che aveva fatto sull' iride, mentre era ai bagni di Viterbo, narra: *Invenimus et nos diebus aestivis circa horam vespertinam vel modicum ante, circa Viterbium in quodam praecipitio*

apud balneum (*quod dicitur Scopuli*) *aquam vehementer praecipitari*, *ec.* Dalla dedica che Vitellio fece a suo fratello pare che avessero dimorato insieme a Roma, poichè asserisce che per le vive istanze di questo fratello si applicò all' ottica, e deliberò di pubblicare i primi elementi di tale scienza. Sebbene sia vissuto in un secolo assai poco favorevole allo sviluppo delle scienze, aveva visitato le principali biblioteche d' Italia e delle altre dotte contrade; e le sue opere sono una prova della vastità delle sue cognizioni. Gli scritti che di lui abbiamo sono: *Sulla fisiologia*, *sull' ordine degli enti*, *sulle conclusioni elementari*, *sulla scienza dei moti celesti*, che non sono stati mai pubblicati, e i *Dieci libri sull' ottica* da noi indicati di sopra. Cita spesso Alhazen, ma attinge pure, siccome a prima sorgente, da autori greci, cui paragona fra loro con diligenza veramente ammirabile. Gli costò lunga fatica il raccogliere e l' ordinare gli assiomi, i teoremi e le ipotesi di Euclide e di Tolomeo, confermandole con passi tratti da Apollonio, da Teodosio, da Meoelso, da Teone, da Pappo, da Proclo e dagli altri filosofi greci.

Parlando di Vitellio, Risner non si fa lecito di decidere fra i Polacchi e i Tedeschi, i quali disputano a chi debba appartenere questo dotto. Però non può esservi intorno a ciò dubbio alcuno, secondo il seguente passo dello stesso Vitellio, lib. X, teor. 74: *Quoniam non est possibile solis vel lunae centra in horizonte existere nisi in oriente vel occidente*, *in nostra terra*, *scilicet Polonia*, *habitabili*, *quae est circa latitudinem* 50 *graduum*. Nelle sue osservazioni parla spesso di *Borek*, che è tuttavia un piccolo villaggio situato presso Cracovia, e precisamente nella latitudine indicata di 50 gradi. Nella sua dedica indirizzata a Guglielmo di Morbeta, Vitellio si chiama *Filius Thuringorum et Polonorum*, il che sembra indizio che sua madre fosse originaria di Germania.

Vitellio divide l' opera sua in dieci libri. « Nel primo, egli dice, mettiamo « innanzi gli assiomi necessarj, e che non si trovano negli *Elementi* di Euclide; « ve ne sono due dei quali abbiamo presa la dimostrazione da Apollonio Per- « geo. Nel secondo libro trattiamo dalla projezione dei raggi, che passando per « un solo mezzo diafano cadono sopra corpi di figure diverse, e vi aggiungia- « mo la projezione delle ombre. Nel terzo libro parleremo dell' organo della vista. « Nel quarto indicheremo gli errori e gl' inganni ai quali è esposto tale organo « quando vediamo attraverso ad un solo mezzo. Nel quinto esamineremo la vi- « sione che si fa col mezzo dei raggi reflessi di quei corpi levigati che chia- « miamo specchi, siano essi piani, sferici, piramidali, concavi o convessi. Come « faremo vedere, i prefati specchi sono tali o naturalmente o artificialmente; « ed ambe le specie sono soggette alle stesse regole; ma gli specchi naturali, os- « sia i corpi levigati di loro natura, avendo, come vedremo, molto maggiore « influenza sopra di noi, sono appunto perciò un oggetto più essenziale della « scienza ottica. Nel sesto, settimo ed ottavo libro, presenteremo i varj feno- « meni che accadono per l' azione di specchi o corpi levigati di diverse confor- « mazioni. Nel nono, trattando degli specchi a colonna o piramidali, o concavi, « o convessi, esamineremo gli effetti prodotti dall' azione di certi specchi irre- « golari che chiamansi *ustorj*, *comburentia*, perchè uniscono i raggi in un « medesimo fuoco. Nel decimo ed ultimo libro parleremo dei fenomeni ottici « che avvengono quando il raggio, prima di giungere all' occhio, passa per due « mezzi diafani di diversa natura, per esempio, l' aria e l' acqua, il che ci darà « occasione di spiegare la generazione dell' *iride* ». Nel primo libro, Vitellio, spiegando i principj della geometria e la generazione delle figure coniche, cita in appoggio delle sue dimostrazioni, i *Comenti* di Eutocio, gli *Scolj* di Teone, i *Lemmi* di Proclo, Archimede sulla *Sfera* e sul *Cilindro*, le *Matematiche* di Pappo, i *Teoremi d' ottica* di Euclide, i *Conici* d' Apollonio, i *Cilindri* di

Sereno e l' *Ottica* d' Alhazen. Nei nove ultimi libri, che trattano dell' ottica, cita in particolare Euclide, Tolomeo e Alhazen. Non cita verun autore, nel decimo libro, quando parla dell' iride, essendo tutta sua la dottrina che vi espone. Allorchè leggesi attualmente tale opera, e se ne considera la regolare ordinanza e la copia de' fatti, fa meraviglia che il decimoterzo secolo abbia potuto produrre tale lavoro.

VITTORE, VITTORINO o VITTORIO (Mariano), matematico, nato secondo alcuni autori nell' Aquitania, secondo altri a Limoges. Essendosi recato ad abitare a Roma, si congettura che vestisse l' abito ecclesiastico. L' epoca in cui si doveva celebrare la festa di Pasqua seguitava ad esser tra le chiese soggetto di continue difficoltà. Dietro le preghiere d' Ilario, arcidiacono di Roma, Vittore assunse di cercare i mezzi d' impedire il ritorno di tale disordine, e moltiplicando il ciclo lunare di diciannove anni con quello solare di ventotto, fece un nuovo canone pasquale che dal suo nome fu detto *vittorino*. Tale canone, che egli terminò nell' anno 457, fu ammesso nelle chiese d' occidente; ma fino dal secolo successivo, Vittore di Capua avendone dimostrato i gravissimi errori, la chiesa di Roma ne abbandonò l' uso, che si mantenne per più lungo tempo in Francia. Il canone di Vittore è stato pubblicato dal p. Egidio Boucher, gesuita, con una spiegazione e sotto questo titolo: *De doctrina temporum, sive commentarius in Victorii Aquitani et aliorum canones paschales*, Anversa, 1633 e 1634, in fol.

VIVIANI (Vincenzo), uno dei più grandi matematici del secolo XVII, nacque a Firenze il 5 Aprile 1622 da famiglia patrizia. Il p. Sebastiano da Pietrasanta, francescano, suo maestro di filosofia, asendogli detto non esservi miglior logica della geometria, si applicò subito a tale studio, e vi fece rapidi progressi. Galileo, secchio e cieco, gli svelò i più profondi misteri della scienza, e Viviani concepì in breve tanta stima pel suo maestro, che tenne sempre pel maggiore de' suoi titoli di gloria quello di essere stato l' ultimo allievo di Galileo. Dopo la morte di tale grand' uomo si pose sotto la direzione del celebre Torricelli, cui riguardò pel secondo suo maestro.

Non aveva il Viviani che soli 24 anni, allorchè immaginò di riparare alla perdita del trattato *De locis solidis* d' Aristeo il vecchio. Altra guida non avendo che un solo passo di Pappo Alessandrino, gli fu necessario d' indovinare ciò che Aristeo aveva detto o aveva potuto dire: per questa ragione intitolò la sua opera *Divinatio in Aristeum*. Domestiche faccende, delle malattie, e le varie commissioni che gli vennero affidate dal granduca di Toscana, non gli permisero allora di terminare sì bel lavoro. Ne' troppo brevi suoi ozj, attese il Viviani ad un' altra opera dello stesso genere. Apollonio Pergeo aveva raccolto in otto libri tutto quello che gli antichi geometri avevano scritto intorno alle sezioni coniche. Erano perduti gli ultimi quattro libri, ma si sapeva che nel quinto Apollonio trattava delle linee rette le più lunghe o le più corte che sotto determinate condizioni possono condursi nelle curve coniche, vale a dire dei quesiti che oggi forman parte della bella teoria de' massimi e de' minimi. Questo libro si propose il Viviani di rifare o restituire in mezzo alle continue distrazioni che lo tormentavano. Il suo lavoro era già molto avanzato, quando nell' anno 1656 il medico Borelli (*Vedi* Borelli) scoperse nei manoscritti della Biblioteca Laurenziana a Firenze una traduzione araba dell' opera di Apollonio. Il Borelli ottenne dal granduca il permesso di portare a Roma il manoscritto, e lo fece tradurre in latino dal dotto maronita Abramo Echellensis. Tale versione, terminata nel mese d' Ottobre 1658, fu stampata nell' anno susseguente. Ma il Viviani, non avendo voluto perdere il frutto delle sue ricerche, aveva avuto la precauzione di far constare che non aveva mai conosciuta l' esistenza del manoscritto arabo, e che d' altronde non conosceva la lingua araba: e quando la stampa delle due opere pose in grado

i geometri di paragonarle, si conobbe, dice Fontenelle, che il Viviani avèva più che indovinato, ed era ito più in là di Apollonio nel prefato argomento.

Un fatto così glorioso estese per tutta Europa la reputazione del Viviani. I principi della casa Medici furono solleciti a gara di colmare di benefizj il geometra che onorava co' suoi talenti la patria, e Colbert, dietro la proposizione di Chapelain, lo inserisse nella lista dei dotti stranieri, ai quali Luigi XIV faceva sentire i benefici effetti della sua munificenza. Il granduca Ferdinando lo aveva fatto successivamente suo geometra, maestro di matematica dei paggi, e professore nell'Accademia di Firenze: lo fece quindi suo primo ingegnere, e nel 1662 gli commise di regolare col Cassini, delegato del Papa, le contese relative al corso della Chiana. Il progetto che presentarono per antivenire le inondazioni di tal fiume non fu eseguito; ma i due grandi uomini, tratti da reciproca stima, si legarono d'inviolabile amicizia, e profittarono dell'occasione che gli aveva uniti per fare insieme delle osservazioni astronomiche, delle ricerche di storia naturale e fino d'antichità.

Nel 1666 il granduca dispensò il Viviani dal suo ufficio d'ingegnere, onde lasciarli comodo di terminare le opere nelle quali lavorava da lungo tempo. Senza perdere di vista la restituzione d'Aristeo, attendeva allora ad un trattato *Della resistenza dei solidi*. Avendo saputo che Alessandro Marchetti, il traduttore di Lucrezio, studiava intorno allo stesso soggetto, volle tentar di vincerlo in prestezza; ma altre occupazioni gl'impedirono di dare l'ultima mano all'opera. Quella del Marchetti uscì nel 1669, e divenne fra i due concorrenti il soggetto di una discussione nella quale il vantaggio fu del Viviani, più dotto geometra dell'emulo suo. Aveva presa la penna contro il Marchetti per assicurare al Galileo la proprietà di alcune delle sue scoperte. Parimente per la gloria del suo maestro pubblicò nel 1674 l'opera seguente: *Quinto libro degli elementi d'Euclide, ovvero la scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina di Galileo*. Vi aggiunse, col titolo di *Diporto geometrico*, la soluzione di una dozzina di problemi proposti da un anonimo di Leida, che egli risolvette col mezzo dell'analisi antica con molta maggior semplicità ed eleganza che non si sarebbe potuto fare mediante l'analisi algebrica. Tale opera è molto notabile, dice Montucla, per copia di rilevanti particolarità intorno alla persona e agli ultimi anni di Galileo, ed alla vita di Torricelli, come pure intorno alle opere loro condotte a fine o divisate (*Stor. delle Matem.* vol. II, pag. 93).

Alcuni problemi proposti da Comiers essendo caduti nel 1677 in mano al Viviani, ne pubblicò la soluzione col titolo: *Enodatio problematum universis geometris propositorum*, Firenze, in-4, con una dedica alla memoria di Chapelain, nella quale mostra rincrescimento di non aver trovata prima occasione di provargli la sua riconoscenza per tutto ciò che aveva fatto a suo vantaggio. Nella sua prefazione, manifesta molta repugnanza per tali maniere di scientifici enimmi, che d'ordinario non si propongono se non da quelli che sono certi di averne la chiave. Ciò non ostante, nell'anno 1692, fece inserire negli *Acta eruditorum lipsiensium*, col nome di *A. D. Pio Lisci*, *pupillo geometra* (anagramma di *Postremo Galilaei discipulo*), il problema della *Volta quadrabile*, di cui Leibnitz, Bernoulli, ed il marchese di L'Hôpital trovarono subito la soluzione in un'infinità di maniere: ma, secondo Montucla, la spiegazione datane dal Viviani supera in certi aspetti quelle de' suoi competitori (*Stor. delle Matem.* vol. II pag. 94).

Membro dell'Accademia del Cimento, di quella degli Arcadi, della Società Reale di Londra, fu il Viviani nel 1699 ammesso nell'Accademia delle Scienze di Parigi nella classe dei socj stranieri, e Luigi XIV gli fece offrire la carica di primo astronomo. Egli si scusò di accettarla per affezione alla patria, come aveva

già rifiutate le offerte di Casimiro re di Polonia: ma ciò non tolse che sentisse viva gratitudine pel principe che andava coi beneficj a cercarlo, sebbene non fosse nato suo suddito; e la palesò in ingegnosa foggia nell' iscrizione: *Aedes a Deo datae*, che fece porre sulla facciata del palazzo che aveva eretto coi doni di Luigi XIV. Era una bella allusione al primo nome del re, ed alla maniera con cui quella casa era stata acquistata. Il Viviani non aveva dimenticato il suo primo maestro nella fabbrica di questo edifizio: il busto in bronzo di Galileo è sulla porta, ed il suo elogio, o piuttosto tutta la storia della sua vita, in due grandissimi cartelli di marmo dall' una e dall' altra parte della porta medesima. Questo grande geometra impiegò il rimanente della sua vita nel compimento della *Divinazione* d' Aristeo, cui dedicò a Luigi XIV, e morì colmo di onori e di gloria a Firenze, il 22 Settembre 1703, in età di ottantadue anni. Fu seppellito in Santa Croce non lungi da Galileo. Un sepolcro marmoreo vi raccoglie unite dal 1735 in poi le spoglie venerabili del discepolo e del maestro.

Oltre le opere già citate, scrisse il Viviani: I *De maximis et minimis geometrica divinatio in quintum conicorum Apollonii Pergaei nunc desideratum*, Firenze, 1659, in-fol. II *Formazione e misura di tutti i cieli con la struttura e quadratura esatta dell' intero e delle parti di un nuovo cielo ammirabile, ed uno degli antichi delle volte regolari degli architetti*, ivi, 1692, in-4. Il Viviani si limita all' esposizione delle sue proposizioni e ne omette le dimostrazioni. Qualche anno dopo il p. Grandi si applicò a ricercarle, e le pubblicò col titolo: *Geometrica divinatio Vivianeorum problematum*; III *De locis solidis secundo divinatio geometrica in quinque libros injuria temporum amissos Aristaei senioris geometrae*, ivi, 1701, in-fol. È d' uopo convenire, dice Montucla, che si ridurrebbe questo volume a poche pagine, servendosi dell' analisi algebrica. L' autore vi aggiunse la pianta e la descrizione della sua casa; IV *I dodici libri degli elementi piani e solidi d' Euclide, tradotti, spiegati ed illustrati*, ivi, 1769, 2 vol., in-12; V Alcune *Lettere* nella *Vita* dell' Autore scritta dal Fabroni, e nei *Codici manoscritti* della libreria Nani. Si sa che il Viviani aveva composto col titolo di *Geometria moralis* un trattato nel quale applicava, per quanto si può, la geometria alla morale cristiana; ma non si trovò tra i suoi manoscritti. Per altre particolarità su questo geometra si possono consultare gli *Elogi* di Fontenelle, le *Memorie* di Niceron, il *Dizionario* di Chaufepié, e la *Storia della letteratura italiana* di Tiraboschi. Una medaglia coniata in suo onore si vede riportata nel *Museum Mazzuchellianum*, II, tav. 145.

VOLANTE. (*Mec.*) Nome generico che vien dato, nelle macchine, ad alcune parti che hanno un moto rapidissimo di rotazione.

Si chiama *volante regolatore* una ruota pesante che si fa muovere con rapidità, che si adatta all' albero girante di una macchina e che serve a mantenere l' uniformità del moto, quando il motore o la resistenza è di natura da provare delle variazioni momentanee di forza.

Le variazioni delle velocità di una macchina possono provenire da due specie di cause. 1.° Le azioni esercitate dal motore e dalla resistenza sono ora più grandi, ora più piccole che esse non dovrebbero essere per conservare un equilibrio dinamico costante. 2.° Una delle azioni è nel caso di superare progressivamente e sempre più l' altra; dimodochè la macchina tende ad arrestarsi o a prendere una velocità indefinitamente crescente.

L' uso dei *volanti* è solamente utile nel primo caso; nel secondo bisogna aver ricorso ai regolatori fondati sul principio del *pendolo conico*. (*Vedi* QUESTA PAROLA.)

Il Navier il cui nome dev' essere citato tutte le volte che si tratta della teoria

delle macchine, ha perfettamente spiegata la funzione del volanti nel seguente passaggio, estratto dalla sue nota sul Belidor.

« Nella maggior parte delle macchine, le variazioni nella velocità offrono degli inconvenienti, sia perchè la natura del lavoro che essa hanno da effettuare comporta una velocità costante al punto d'applicazione della resistenza, sia perchè a cagione dello spazio pel giuoco, che bisogna sempre lasciare negli ingranaggi, o in generale nei contatti dei diversi pezzi, è impossibile che la variazioni di velocità si facciano sempre rigorosamente per gradi insensibili, come ciò sarebbe necessario perchè esse non facessero menomamente perdere della quantità d'azione somministrata dal motore. Ciò non ostante succede continuamente che l'azione del motore sia più o meno ineguale, e spesso ancora che quest'azione, che per se stessa potrebbe essere uguale, diventa inaguale nel modo col quale si trasmette; e quantunque la geometria applicata alla composizione delle macchine somministri ordinariamente dei mezzi per rimediarvi, pure i mezzi che si possono impiegare a quest'effetto sono quasi sempre troppo complicati per essere adottati con vantaggio, soprattutto nelle grandi macchine dove si esercitano potenti sforzi. Ci si giunge molto meglio facendo le parti delle macchine, conformemente ai principii che abbiamo esposti, molto massiccie e di molta velocità, in modo da rendervi le variazioni di moto estremamente piccole e quasi insensibili.

« Ciò può eseguirsi in due maniere, tanto aumentando la massa e la velocità delle parti mobili essenziali alla macchina, il che potrebbe spesso portare dei grandi inconvenienti, quanto aggiungendo piuttosto alla macchina delle parti mobili unicamente destinate a regolarne il moto, e che si chiamano *volanti*. Le precedenti considerazioni convengono infatti specialmente alle macchine di rotazione, sopra l'asse delle quali succede raramente che il motore agisca in un modo perfettamente uniforme. Si montano sopra quest'asse le grandi ruote chiamate volanti, e si concepisce mediante quello che precede, che esse produrranno tanto maggiore effetto 1.° quanto il loro peso sarà più grande, e 2.° quanto la materia che gli forma sarà più raccolta vicino alla loro circonferenza esterna, poichè allora a velocità di rotazione uguale, la velocità effettiva delle loro parti sarà maggiore.

» Adattando così dei volanti sufficientemente grandi alle macchine, si giunge a rendere l'azione la più ineguale altrettanto regolare quanto si può desiderare. Ma non bisogna pensare che questi volanti possano per niente aumentare la quantità d'azione trasmessa dalla macchina. La loro vera funzione è di assorbire o di accumulare l'eccesso della quantità d'azione somministrata dal motore, nel momento in cui essa supera quella che la resistenza elide, per restituire quindi quest'eccesso nel momento in cui la quantità d'azione somministrata dal motore diventa al contrario più piccola di quella che è consumata al punto d'applicazione per vincere la resistenza. Possiamo osservare che, se il volante è destinato principalmente a regolare il moto, è conveniente situarlo vicino al punto d'applicazione della resistenza; e se pel contrario è destinato principalmente a regolare l'azione del motore, allora fa d'uopo situarlo vicino al punto d'applicazione di quest'ultimo. È inutile dire che se ci sono gli assi nei quali le velocità di rotazione siano diverse, si deve metterlo di preferenza sopra quello degli assi che si muove più presto. »

Si vede da ciò che sarebbe un grande errore, il credere che i volanti possano aumentare l'azione della forza motrice; essi assorbono sempre, al contrario una parte di questa forza, tanto più considerabile quanto il loro peso è maggiore, l'uso dei quali è mediante ciò un inconveniente. Consideriamo, infatti, un volante del peso di 5000 chilogrammi, che faccia 25 rivoluzioni per minuto, e supponiamo che il suo cardine abbia 15 centimetri di diametro, o 47 centimetri di circonferenza. La resistenza dovuta all'attrito sopra il bilico potendo valutarsi

mediamente a 0,16 (*Vedi* ATTRITI) della pressione, la forza motrice ha dunque da muovere

$$5000^{chil} \times 0,16 = 800 \text{ chilogrammi}$$

e il punto resistente descrivendo 47 centimetri in una rivoluzione, percorre in un minuto 25 volte 47 centimetri o $11^m,75$ vale a dire $0^m,196$ quasi in un secondo. Così la quantità d'azione consomata dal motore è quella che è capace di elevare un peso di 800 chilogrammi all'altezza di $0^m,196$ in un secondo, o, ciò che equivale al medesimo, quella che può elevare

$$800^{chil.} \times 0,196 = 158 \text{ chilogrammi}$$

ad un metro in un secondo: questa quantità d'azione è un poco più grande della forza di due cavalli-vapore, e ne resulta che in una macchina dove si facesse uso di un tale volante, ci sarebbe una forza di due cavalli-vapore almeno, consumata unicamente a farlo muovere.

L'azione regolatrice di un volante dipende evidentemente dalla quantità di moto da cui esso è animato, siccome questa quantità di moto dipende essa stessa da due elementi, la massa del volante e la sua velocità; è meglio, quando ciò è possibile, dare una grande velocità al volante che aumentare la sua massa, poichè aumentando quest'ultima si aumenta la resistenza dell'attrito. È evidente, d'altra parte, che la più gran parte della massa del volante dev'essere riportata alla sua circonferenza, perchè questa massa ha in questo modo, il più gran braccio di leva possibile rapporto alla grandezza della ruota.

Il problema di determinare la grandezze e la massa del volante in un caso dato di macchina, esige considerazioni teoriche e particolarità di calcolo per le quali ci manca il posto: rimanderemo alle *note* sul *Belidor*, ove questa questione è stata trattata dal Navier con tutta la possibile chiarezza. (*Vedi archit. hydraul.* del Belidor, *avec les notes* del Navier, tomo I pagina 391.)

VOLTE (*Archi di Ponte*) — *Vedi* PONTE.

VOLTA CELESTE. (*Ast.*) Questo nome vien dato alla superficie concava che il cielo ci presenta e sopra la quale sembrano situati tutti gli Astri.

L'estremo allontanamento dei corpi celesti non permettendoci di conoscere le differenze delle loro distanze alla terra, i raggi visuali condotti dal nostro occhio a ciascuno di questi corpi ci sembrano tutti uguali e il cielo ci comparisce come una superficie sferica che si appoggia sul piano dell'orizzonte. Se la densità della terra non c'impedisse di vedere la parte opposta del cielo, questo cielo tutto intero ci comparirebbe come un'immensa sfera della quale noi occuperemmo il centro. Fintanto che restiamo nello stesso punto della superficie della terra, vediamo ciascun giorno levarsi e tramontare le medesime stelle; solamente il sole, col suo moto proprio apparente, non ci permette di vedere che quelle che si trovano nell'emisfero opposto a quello in cui esso trovasi; ma nel tempo della durata di una delle sue rivoluzioni, non rivediamo giammai che le stelle che abbiamo digià vedute, e l'aspetto generale del cielo rimane costantemente lo stesso. Se al contrario cangiamo luogo avanzandoci verso il Nord, per esempio, scopriamo nuove stelle, nel mentre che cerchiamo di vedere verso il mezzogiorno alcune di di quelle che vi si trovavano avanti. Lo stesso fenomeno si presenta in senso contrario andando dal Nord al Sud; dimodochè cangiando di luogo sulla terra e camminando così dal Sud al Nord o dal Nord al Sud, l'aspetto generale del cielo trovasi cangiato. Queste apparenze indicano nella maniera la più evidente la forma rotonda della terra, rotondità che è ancora manifesta mediante molti altri fenomeni. (*Vedi* TERRA.)

VOLUME. (*Geom.*) È quello spazio che viene occupato da un corpo. In aumento a quanto ne è stato detto alle parole SOLIDO e CUBATURA; crediamo utile l'aggiungere quanto segue.

1. Misurare un parallelepipedo rettangolo P, significa trovare il suo rapporto con un dato parallelepipedo rettangolo P' preso per unità.

Ma dalla Geometria elementare si sa, che: *due parallelepipedi* P *e* P' *stanno tra loro come i prodotti delle loro basi per le loro altezze, o come i prodotti delle loro tre dimensioni*; talchè chiamando H l'altezza del parallelepipedo P, a e b le due dimensioni della base B. Ugualmente chiamando H' l'altezza del parallelepipedo P', a' e b' le due dimensioni della base B' si ha

$$P : P' :: B \times H : B' \times H' \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$P : P' :: a \times b \times H : a' \times b' \times H' \ldots\ldots (2)$$

Ora la proporzione (2) fa conoscere che per ottenere questo rapporto bisogna valutare a, b, H, a', b', H' con una stessa unità lineare, e dividere il prodotto dei tre primi numeri per il prodotto dei tre altri.

Il calcolo si rende molto più semplice prendendo per unità di volume P', il cubo il cui lato è l'unità lineare; poichè allora i numeri che rappresentano a', b', H' si riducono all'unità e la proporzione (2) diventa:

$$P : P' :: a \times b \times H : 1;$$

donde si vede che *la misura del parallelepipedo rettangolo è uguale al prodotto delle sue tre dimensioni.*

Osserviamo che il prodotto $a \times b$ indica quante volte la base B del parallelepipedo P contiene il quadrato fatto sopra l'unità lineare.

La misura del parallelepipedo rettangolo è dunque ancora uguale al prodotto della sua base per la sua altezza (prendendo per unità di superficie il quadrato fatto sopra l'unità di lunghezza, e per unità di volume il cubo costruito sopra questa medesima unità.)

2. *La solidità di un parallelepipedo, ed in generale il volume di un prisma qualunque è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

Infatti 1.° un parallelepipedo qualunque è equivalente a un parallelepipedo rettangolo della medesima altezza, e di base equivalente. Ora la solidità di quest' ultimo (n.° 1) è uguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; dunque la solidità di un parallelepipedo qualunque è parimente uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

2.° Ogni prisma triangolare è la metà del parallelepipedo costruito in modo, che abbia la medesima altezza e una base doppia. Ora la solidità di quest' ultimo è uguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; dunque quella del prisma triangolare è uguale al prodotto della sua base, metà di quella del parallelepipedo, moltiplicata per la sua altezza.

3.° Un prisma qualunque può esser diviso in tanti prismi triangolari della medesima altezza quanti triangoli si possono formare nel poligono, che gli serve di base. Ma la solidità di ogni prisma triangolare è uguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; e poichè l'altezza è la medesima per tutti, ne segue che la somma di tutti i prismi parziali sarà uguale alla somma di tutti i triangoli, che servon loro di basi, moltiplicata per l'altezza comune. Dunque la solidità di un prisma poligono qualunque è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

3. *Il volume di una piramide qualunque è uguale al terzo del prodotto della sua base per la sua altezza.*

Infatti dalla geometria si sa che: *il volume di qualunque piramide è equi-*

valente al terzo di un prisma della medesima base e della medesima altezza; e di sopra abbiamo stabilito che qualunque prisma ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza, così anco il volume di una piramide qualunque ha per misura il terzo del prodotto della sua base per la sua altezza.

Si ebiami dunque B la base della piramide, H la sua altezza, il suo volume V sarà espresso da

$$V = \frac{1}{3} B \times H.$$

4. *Se una piramide è tagliata da un piano parallelo alla sua base, il volume del tronco che resta togliendo la piccola piramide, è uguale alla somma di tre piramidi, che avessero per altezza comune l' altezza del tronco, e le cui basi fossero la base inferiore del tronco, la sua base superiore, ed una media proporzionale fra queste due basi.*

Sia SABCDE (*Tav.* CCLII, *fig.* 1) una piramide tagliata dal piano *abc* parallelo alla base; sia TFGH una piramide triangolare, di cui la base, e l'altezza siano uguali o equivalenti a quelle della piramide SABCDE. Possiamo supporre le due basi situate sopra un medesimo piano; ed allora il piano *abd* prolungato determinerà nella piramide triangolare una sezione *fgh* situata alla medesima altezza al di sopra del piano comune delle basi; dal che resulta che la sezione *fgh* stà alla sezione *abd* come la base FGH stà alla base ABD (*Vedi* sopra di ciò qualunque trattato di Geometria elementare); e poichè le basi sono equivalenti, le sezioni lo saranno pure. Le piramidi S*abcde*, T*fgh* sono dunque equivalenti, perchè hanno la medesima altezza, e basi equivalenti. Le piramidi intere SABCDE, TFGH sono equivalenti per la medesima ragione; dunque i tronchi ABD*dab*, FGH*hfg* sono equivalenti; e per conseguenza basterà dimostrare, la proposizione enunciata pel solo caso del tronco di piramide triangolare.

Sia FGH*hfg* (*Tav.* CCLII, *fig.* 2.) un tronco di piramide triangolare a basi parallele per i tre punti F, *g*, H conducente il piano F*g*H, che toglierà dal tronco la piramide triangolare *g*FGH. Questa piramide ha per base la base inferiore FGH del tronco; dessa ha pure per altezza l'altezza del tronco, poichè il vertice *g* è nel piano della base superiore *fgh*.

Dopo aver tolto questa piramide resterà la piramide quadrangolare *gfh*HF, il cui vertice è *g*, e la base *fh*HF. Per i tre punti *f*, *g*, H conducete il piano *fg*H, che dividerà la piramide quadrangolare in due piramidi triangolari *g*F*f*H, *gfh*H. Quest'ultima ha per base la base superiore *fgh* del tronco, e per altezza l' altezza del tronco, poichè il suo vertice H appartiene alla base inferiore; così abbiamo già due delle tre piramidi, che debbono comporre il tronco.

Resta a considerare la terza *g*F*f*H: ora, se si conduca *g*K parallela a *f*F, e s'immagini una nuova piramide *f*FHK, il cui vertice è K, e la base F*f*H, queste due piramidi avranno la medesima base F*f*H; desse avranno pure la medesima altezza, poichè i vertici *g* e K sono situati sopra una linea *g*K parallela a F*f*, e per conseguenza parallela al piano della base; dunque queste piramidi sono equivalenti. Ma la piramide *f*FKH può considerarsi come se avesse il suo vertice in *f*, e così essa avrà la medesima altezza del tronco; quanto poi alla sua base FKH, dico che è media proporzionale fra le basi FGH, *fgh*. Infatti i triangoli FKH, *fgh* hanno un angolo uguale F = *f* ed un lato uguale FK = *fg*, si ha dunque

$$FHK : fgh :: FH : fh.$$

Si ha pure

$$FGH : FHK :: FG : FK = fg$$

Ma i triangoli simili FGH, fgh danno

$$FG : fg :: FH : fh;$$

dunque

$$FGH : FHK :: FHK : fgh;$$

e così la base FHK è media proporzionale tra le due basi FGH, fgh. Dunque un tronco di piramide triangolare a basi parallele equivale a tre piramidi, che hanno per altezza comune l'altezza del tronco, e le cui basi sono la base inferiore del tronco, la sua base superiore, ed una media proporzionale tra queste due basi.

Siano A e B le basi di un tronco di piramide, e H la sua altezza: si ha dunque pel volume V del tronco

$$V = \frac{1}{3} H \left(A + B + \sqrt{A.B}\right).$$

5. *Se si taglia un prisma triangolare, di cui* ABC (*Tav.* CCLII, *fig.* 3) *è la base con un piano* DES *inclinato a questa base, il solido* ABCDES, *che resulta da questa sezione, sarà uguale alla somma di tre piramidi, i vertici delle quali sono* D, E, S, *e la base comune* ABC.

Per i tre punti S, A, C si faccia passare il piano SAC, che toglierà dal prisma troncato ABCDES la piramide triangolare SABC: questa piramide ha per base ABC, e per vertice il punto S.

Dopo aver tolta questa piramide, resterà la piramide quadrangolare SACDE, di cui S è il vertice, ed ACDE la base. Per i tre punti S, E, C conducete parimente un piano SEC, che dividerà la piramide quadrangolare in due piramidi triangolari SACE, SCDE.

La piramide SAEC, che ha per base il triangolo AEC, e per vertice il punto S, è equivalente ad una piramide EABC che avesse per base AEC, e per vertice il punto B. Imperocchè queste due piramidi hanno la medesima base; desse hanno ancora la medesima altezza, poichè la linea BS, essendo parallela a ciascuna delle linee AE, CD, è parallela al loro piano ACE; dunque la piramide SAEC è equivalente alla piramide EABC, la quale può considerarsi come se avesse per base ABC, e per vertice il punto E.

La terza piramide SCDE può cangiarsi primieramente in ASCD; poichè queste due piramidi hanno la medesima base SCD; desse hanno ancora la medesima altezza, perchè AE è parallela al piano SCD; dunque la piramide SCDE è equivalente ad ASCD. In seguito la piramide ASCD può esser cambiata in ABCD, perchè queste due piramidi hanno la base comune SCD: esse hanno ancora la medesima altezza, poichè i loro vertici S, e B sono situati sopra una parallela al piano della base. Dunque la piramide SCDE, equivalente ad ASCD, è ancora equivalente ad ABCD: ora questa piramide può essere considerata come se avesse per base ABC, e per vertice il punto D.

Dunque finalmente il prisma troncato ABCDES è uguale alla somma di tre piramidi che hanno per base comune ABC, e i di cui vertici sono respettivamente i punti D, E, S.

Corollario. Se le costole AE, BS, CD sono perpendicolari al piano della base, desse saranno nello stesso tempo le altezze delle tre piramidi, che compongono insieme il prisma troncato; dimodochè la solidità del prisma troncato sarà allora espressa da

$$V=\frac{1}{3}ABC\times AE+\frac{1}{3}ABC\times BS+\frac{1}{3}ABC\times CD;$$

quantità che riducesi a

$$V=\frac{1}{3}ABC\times(AE+BS+CD).$$

6. *La solidità d' un cilindro è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

Inscriviamo e circoscriviamo (*Tav.* CCLII, *fig.* 4) alla base del cilindro due poligoni regolari simili, e si costruiscano i prismi retti aventi per basi questi poligoni, e la medesima altezza del cilindro.

Siano b e B le basi di questi prismi; v e V, i loro volumi, H l'altezza del cilindro.

Il volume del cilindro è evidentemente compreso tra i volumi di questi prismi, di più, se si duplicano indefinitamente il numero dei lati delle loro basi, questi prismi anderanno continuamente avvicinandosi al cilindro, poichè i prismi circoscritti diminuiscono, nel mentre che i prismi inscritti aumentano; finalmente avremo stabilito che questi prismi hanno per limite comune il volume del cilindro, quando si giunga a dimostrare che la differenza tra un prisma circoscritto e il prisma inscritto corrispondente, può diventare minore di qualunque quantità data. Ora, si ha (n°. 2)

$$V=B\times H\;.\;.\;.\;.\;.\;(1),$$
$$v=b\times H\;.\;.\;.\;.\;(2);$$

donde, sottraendo

$$V-v=(B-b)\times H.$$

Ora, $B-b$ rappresentando la differenza che passa tra la superficie del poligono inscritto e quella del poligono circoscritto alla base del cilindro, e siccome dalla Geometria elementare si sa che a misura che cresce il numero dei lati di questi poligoni la differenza diminuisce, e finalmente riducesi a zero, e che l'altra parte il fattore H è costante; dunque la differenza $V-v$ può diventare minore di qualunque grandezza assegnabile.

Premesso ciò, dall'uguaglianza (1) tra le quantità variabili V e $B\times H$, si conclude l' uguaglianza dei loro limiti, dunque finalmente

$$\text{Volume Cilindrico}=\text{Circolo}\times H.$$

Scolio. Si chiami C il volume di un Cilindro, R il raggio della base, H la sua altezza; la superficie della base sarà πR^2, e la solidità del cilindro sarà $\pi R^2\times H$, ossia

$$C=\pi R^2H.$$

7. *La solidità di un cono è uguale al prodotto della sua base per il terzo della sua altezza.*

S' inscrivano e si circoscrivano (*Tav.* CCLII, *fig.* 1) alla base del cono due poligoni regolari simili, e prendiamoli per basi di piramidi aventi per vertice il punto S.

I volumi di queste piramidi comprendono tra loro il volume del cono; e se si duplica indefinitamente il numero dei lati delle loro basi, conservando lo

stesso vertice, i volumi delle piramidi inscritte e circoscritte avranno per limite comune il volume del cono (nel rimanente uguale dimostrazione che pel cilindro.)

Siano dunque H l'altezza del cono, V il volume di una piramide circoscritta, B la superficie della sua base, avremo

$$V = B \times \frac{H}{3} \ldots (1);$$

e prendendo i limiti dai due membri di quest' uguaglianza

$$\text{vol. cono} = \text{circolo} \times \frac{H}{3}.$$

Corollario. Un cono è dunque il terzo di un cilindro della medesima base e della medesima altezza.

Scolio. Rappresenti V' il volume di un cono, R il raggio della base, H la sua altezza; la solidità del cono sarà $\pi R^2 \times \frac{1}{3} H$, ossia

$$V' = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

8. *Il cono troncato* ADEB (*Tav.* CCLIII, *fig.* 2) *in cui* OA, *e* DP, *sono i raggi delle basi, e* PO *l'altezza, ha per misura* $\frac{1}{3} \pi . OP (AO^2 + DP^2 + AO \times DP)$.

Sia TFGH una piramide triangolare della medesima altezza del cono SAB, e la di cui base FGH sia equivalente alla base del cono. Si può supporre che queste due basi siano situate sopra un medesimo piano; allora i vertici S e T saranno a distanze uguali dal piano delle basi, ed il piano EPD prolungato farà nella piramide la sezione IKL. Ora dico che questa sezione IKL è equivalente alla base DE; poichè le basi AB, DE stanno fra loro come i quadrati dei raggi AO, DP o come i quadrati delle altezze SO, SP; i triangoli FGH, IKL stanno fra loro come i quadrati di queste medesime altezze; dunque i circoli AB, DE stanno fra loro come i triangoli FGH, IKL. Ma, per supposizione, il triangolo FGH è equivalente al circolo AB; dunque il triangolo IKL è equivalente al circolo DE.

Ora, la base AB moltiplicata per $\frac{1}{3}$ SO è la solidità del cono SAB, e la base FGH moltiplicata per $\frac{1}{3}$ SO è la misura della piramide TFGH; dunque a motivo delle basi equivalenti, la solidità della piramide è uguale a quella del cono. Per una simil ragione la piramide TIKL è equivalente al cono SDE; dunque il tronco di cono ADEB è equivalente al tronco di piramide FGHIKL. Ma la base FGH, equivalente al circolo, il di cui raggio è AO, ha per misura $\pi \times \overline{AO}^2$; parimente la base $IKL = \pi \times \overline{DP}^2$; e la media proporzionale fra $\pi \times \overline{AO}^2$ e $\pi \times \overline{DP}^2$ è $\pi \times AO \times DP$; dunque la solidità del tronco di piramide, o quella

del tronco di cono, ha per misura

$$\frac{1}{3}\,OP \times \left(\pi \times \overline{AO}^2 + \pi \times \overline{DP}^2 + \pi \times AO \times DP\right),$$

che è lo stesso che

$$\frac{1}{3}\pi \times OP \times \left(\overline{AO}^2 + \overline{DP}^2 + AO \times DP\right).$$

9. *Un settore sferico ha per misura la zona che gli serve di base moltiplicata per il terzo del raggio.*

Sia AOB (*Tav.* CCLIII, *fig.* 3) il settore circolare che, con la sua rivoluzione intorno di AO, descrive il settore sferico.

Inseriviamo e circoscriviamo all'arco AB due porzioni di poligoni regolari simili BCA, DEF. Il volume del settore sferico è evidentemente compreso tra i volumi V, v, generati dai settori poligonali DEFO, BCAO; di più, se il numero dei lati delle porzioni di poligoni regolari andasse constantemente raddoppiando, i volumi V, v, anderebbero avvicinandosi al settore sferico, e si potrebbero spingere le operazioni tanto lungi, perchè la differenza tra ciascuno dei volumi V e v, e il settore sferico fosse minore di qualunque quantità asseguabile. Infatti da tutti i trattati di geometria elementare si sa che

$$V = \text{superf. DEF} \times \frac{1}{3}\,OI \;\ldots\; (1),$$

$$v = \text{superf. ABC} \times \frac{1}{3}\,OH \;\ldots\; (2).$$

Donde

$$V - v = \left(\text{superf. DEF.OI} - \text{superf. ABC. OH}\right).$$

Ora, OH tende indefinitamente verso OI, quando si moltiplica all'infinito il numero dei lati, e la differenza

$$\text{superf. DEF} - \text{superf. ABC}$$

ha evidentemente per limite zero; dunque la differenza $V - v$ può rendersi tanto piccola quanto si vorrà; dunque il settore sferico che è sempre compreso tra V e v è il loro limite comune.

Da ciò si conclude prendendo i limiti dai due membri dell'uguaglianza (1).

$$\text{Sett. sfer.} = \text{zona AB} \times \frac{1}{3}\,OI.$$

Se il settore sferico fosse generato dal settore FCH (*Tav.* CCLIII, *fig.* 4) girando intorno del diametro DE, si avrebbe

$$\text{sett. FCH} = \text{sett. DCH} - \text{sett. DCF}.$$

Ora

$$\text{sett. DCH} = \text{zona DH} \times \frac{1}{3}\,CD,$$

$$\text{sett. DCF} = \text{zona DF} \times \frac{1}{3}\,CD.$$

Dunque

$$\text{Sett. FCH} = \frac{1}{3}\text{CD}\left(\text{zona DH} - \text{zona DF}\right).$$

$$= \frac{1}{3}\text{CD} \times \text{zona FH}.$$

Scolio. I. Se il settore circolare che descrive il settore sferico diventasse uguale al semi-circolo, il volume generato sarebbe quello della sfera; ma allora la zona che serve di base al settore sferico sarebbe la superficie della sfera; donde si vede che il volume di una sfera ha per misura la sua superficie moltiplicata per il terzo del raggio.

Scolio II. Siano R il raggio della sfera, e H l'altezza della zona che serve di base al settore sferico; la zona ha per misura $2\,\pi\,R.H$; dunque il settore sferico ha per misura $2\pi RH.\frac{1}{3}R$ ossia $\frac{2}{3}\,\pi\,R^2.H$.

Nel caso in cui il settore sferico diventi uguale alla sfera si ha $H = 2R$; dunque la misura del volume della sfera è $\frac{2}{3}\,\pi\,R^2.\,2R$ ovvero $\frac{4}{3}\,\pi\,R^3$.

Se si chiami D il diametro della sfera, si ha $R = \frac{D}{2}$, donde $R^3 = \frac{D^3}{8}$; la solidità della sfera si esprimerà dunque ancora per $\frac{4}{3}\pi.\frac{D^3}{8}$ ossia per $\frac{1}{6}\pi.D^3$.

10. Cinque soli sono i corpi *regolari* che esistono in natura, cioè, l'*esaedro* o il cubo, che è composto di sei quadrati uguali; il *tetraedro*, di quattro triangoli equilateri; l'*ottaedro*, di otto; il *dodecaedro*, di dodici pentagoni; e l'*icosaedro*, di venti triangoli equilateri.

Si è dato il metodo per trovare la solidità del cubo alla parola Solido. Ora essendo il *tetraedro* una piramide; l'*ottaedro* una doppia piramide; essendo l'*icosaedro* composto di venti piramidi triangolari, ed il *dodecaedro* un solido compreso sotto dodici piramidi di cinque angoli, le cui basi sono nella superficie dell'icosaedro e del dodecaedro, e i vertici al centro; si può trovare la solidità di questi corpi colla regola che abbiamo esposta sopra per la *piramide*.

Termineremo quest'articolo col dare la *proporzione della sfera*, *e dei cinque corpi regolari inscrittivi*; *supponendo il diametro della sfera* $= 2a$, *ed il rapporto della periferia al diametro* $= \pi$.

La periferia di un circolo massimo è . . . . $= 2\,\pi\,a$

Superficie del circolo massimo . . . . $= \pi\,a^2$

Superficie della sfera . . . . $= 4\pi\,a^2$

Solidità della sfera . . . . $= \frac{4}{3}\,\pi\,a^3$

Lato del tetraedro . . . . $= \frac{3}{2}\,a$

Superficie del tetraedro . . . . $= \frac{9}{4}a^2\sqrt{3}$

Solidità del tetraedro . . . . $=\frac{3}{8}a^3\sqrt{3}$

Lato dell'esaedro . . . . $=\frac{1}{3}a^3\sqrt{10}$

Superficie dell'esaedro . . . . $=\frac{20}{3}a^2$

Solidità dell'esaedro . . . . $=\frac{40}{27}a^3$

Lato dell'ottaedro . . . . $=\frac{1}{4}a\sqrt{21}$

Superficie dell'ottaedro . . . . $=\frac{21}{8}a^2\sqrt{3}$

Solidità dell'ottaedro . . . . $=\frac{21}{32}a^3\sqrt{3}$

Lato del dodecaedro . . . . . . $=\frac{1}{6}a\sqrt{\frac{11\sqrt{5}}{2}}\sqrt{\sqrt{5}-1}$

Superficie del dodecaedro . . . . . $=\frac{55}{12}a\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}\sqrt{1+\sqrt{5}}$

Solidità del dodecaedro . . . . . $=\frac{275}{216}a^3\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}\sqrt{1+\sqrt{5}}.$

Lato dell'icosaedro . . . . $=\frac{1}{10}a\sqrt{57}$

Superficie dell'icosaedro . . . . $=\frac{57}{20}a^2\sqrt{3}$

Solidità dell'icosaedro . . . . $=\frac{171}{200}a^3\sqrt{3}.$

W

WALES (GUGLIELMO), astronomo inglese, nato verso il 1734 da oscura famiglia, passò i primi anni della sua gioventù in una ristrettezza cui non meritavano il suo sapere e i suoi lavori. Ne uscì alla fine mercè la sua perseveranza, ed incominciò a farsi conoscere come cooperatore del giornale intitolato, *Ladies diary*, operetta utilissima, la quale contribuì a formare parecchi matematici. L'estensione delle sue cognizioni e la sagacità di cui vi diede prova attirarono su di lui lo sguardo di molti dotti, per raccomandazione dei quali il governo gli com-

mise di andare alla baja di Hudson, per esaminare il passaggio di Venere sul disco del sole. Il modo col quale disimpegnò tale incarico gli fece grande reputazione. Ritornato in Inghilterra (1770), comunicò alla Società Reale un eccellente giornale di osservazioni raccolte nella baja, che venne stampato nelle *Transazioni filosofiche*. Due anni dopo, fu scelto per accompagnare il celebre Cook nel suo viaggio intorno al mondo, 1772-74, in qualità di astronomo della spedizione: accompagnò pure questo navigatore nella stessa qualità negli anni 1776-79. La Società Reale lo annoverò tra suoi membri quasi subito dopo il di lui ritorno; e morto che fu Daniele Harris, professore di matematiche nell' Ospitale del Cristo, ebbe insieme con questa cattedra il titolo di segretario dell' ufizio delle longitudini, e tenne onorevolmente questi due impieghi fino alla sua morte, avvenuta nel 1798.

Oltre i suoi articoli, per la più parte sotto falso nome, inseriti nel *Ladies diory*, e il giornale di osservazioni di sopra citato, gli scritti principali di Wales sono: I *Osservazioni generali fatte nella baja di Hudson*, Londra, 1772, in-4; II *Osservazioni sul viaggio del capitano Cook*, Londra, 1777; III *Osservazioni astronomiche fatte durante il corso di un viaggio al polo australe e intorno al mondo dal 1772 al 1775* (in società con G. Bayly), Londra, 1777, in-4, con carte e figure. Tale opera è molto stimata per l' esattezza delle osservazioni astronomiche, e per l' introduzione che è reputata un capolavoro. Vi si può aggiungere un opuscolo intitolato: *Dilucidazioni intorno al Capo della Circoncisione per dimostrare che il capitano Cook cercò questo Capo sotto il suo vero meridiano.* Tale opuscolo è scritto contro Lemonnier, il quale nelle *Memorie* dell' Accademia delle Scienze di Parigi aveva inserite alcune osservazioni per far vedere che il navigatore inglese aveva errato nella ricerca della terra della Circoncisione; IV *Trattato delle longitudini*, 1794.

WALINGFORD (Riccardo), matematico inglese del secolo decimoquarto, nato nella città dello stesso suo nome sul Tamigi, manifestò fino dalla fanciullezza attitudine straordinaria a tutti i rami di cognizioni che al suo tempo si coltivavano, e vi fece in breve rapidi progressi. Entrò nell' ordine dei benedettini, trattovi specialmente dagl' incoraggimenti dell' abate di Saint-Albans, che lo dispensò perfino dalle ordinarie occupazioni dei monaci, affinchè potesse con maggior libertà attendere a' suoi studj. E Walingford profittò sì bene dell' agio concessoli, che salì in riputazione di primario astronomo del suo tempo. Divenuto in seguito abate del monastero di Saint-Albans, non tralasciò gli studj suoi prediletti. Costruì il bell' orologio che fu collocato sulla facciata di quel monastero. In tale antico capolavoro dell' astronomia e dell' arte degli orologi, vedevasi il sole, la luna, i pianeti e le stelle muoversi con rapidità proporzionata a quella che pare che abbiano ne' cieli. Fu detto che l' abate di Saint-Albans era dunque stato il primo inventore degli orologi a ruote; ma è certo che questa ingegnosa macchina era nota fino dal secolo ottavo. Le opere di questo dotto abate che si conservano manoscritte sono: I *Canones o Albion*. È la recapitolazione di tutti i principj matematici ed astronomici che allora si conoscevano; II *De judiciis astronomicis*; III *De rebus astronomicis*; IV *De diometris*; V *De eclipsibus solis et lunae*; VI *De rectangulo*; VII *Exafrenon*; VIII *De rebus arithmeticis*; IX *De computo*; X *De chorda et arcu*.

WALKER (Giorgio), matematico inglese, nato nel 1734 a Newcastle, e morto a Londra nel 1807. Era membro della Società Reale, ed ha pubblicato diverse memorie nelle *Transazioni filosofiche*: oltre le quali si hanno di lui: I *Dottrina della sfera*, Londra, 1777, in-4: è un trattato perfetto su tale materia, ed un vero modello di dimostrazione geometrica, II La prima parte di un *Trattato delle sezioni coniche*.

WALLIS (Giovanni), celebre matematico inglese, nato il 23 Novembre 1616 ad Ashford, studiò dapprima nella città nativa, indi passò nel collegio di Felsted (contea di Essex), e infine andò all' università di Cambridge, ove si applicò con frutto grande alla filosofia e agli studj teologici, ed acquistò una profonda cognizione del latino, del greco e dell' ebraico. Fece pure rapidi progressi nelle scienze matematiche; ma allora fu questa per lui più una solitaria ricreazione che un' occupazione pubblica e dichiarata. Ammesso negli ordini ecclesiastici, vi coprì varie cariche. Durante il suo soggiorno a Londra, si rese distinto in una straordinaria occasione, per un' arte che parecchi geometri hanno conosciuta e perfezionata, quella cioè di scoprire il senso delle lettere scritte in cifre. Un dispaccio di tal sorta era stato intercettato; fu comunicato a Wallis, che giunse a leggerlo con sorprendente facilità. Questo fu il suo primo titolo alla fama: altri però ne aveva acquistati d' ordine assai superiore, i quali lo fecero annoverare tra i più insigni matematici di Europa. Dilettavasi dello studio continuo dei quesiti più difficili e nuovi di geometria e di fisica, e tenne su questo soggetto un esteso carteggio coi più abili promotori di tali scienze, sì in Inghilterra, che sul continente.

Chiamato a Londra a esercitare delle funzioni ecclesiastiche, ottenne pure la cattedra *Saviliana* di geometria nella università di Oxford; nella qual carica diede prove luminose de' suoi talenti e pose il suggello alla propria reputazione. La sua corrispondenza di lettere coi più celebri dotti, le importanti ed originali sue scoperte nelle teorie matematiche, le sue risposte ai quesiti di Pascal, ed a quelli che furono proposti dall' illustre geometra francese Fermat, segnarono già da lungo tempo la sede di Wallis nella storia delle scienze che richiedono i maggiori sforzi della mente umana. Estese, e per così dire creò di nuovo, la teoria degl' indivisibili di Cavalieri. La sua aritmetica degl' infiniti precedette, e, potrebbe dirsi, suggerì le scoperte analitiche di Newton. Di tutti i precursori di quest' uomo sommo, Wallis è quegli le cui matematiche invenzioni erano più necessarie al calcolo delle serie infinite e delle flussioni, o, il che è lo stesso, all' analisi differenziale di Newton: sennonchè ricordando tale origine della più feconda scoperta dei moderni, dobbiamo eccettuare la geometria di Cartesio, e specialmente la sua teoria delle curve, senza la quale sarebbe stato impossibile che le scienze matematiche s' innalzassero all' interpetrazione dei più difficili fenomeni naturali. Non si potrebbe ammirare di troppo la sagacia e lo spirito inventivo che rifulgono nelle ricerche di Wallis; ma egli inserì nelle principali sue opere dei ragguagli sulla storia delle matematiche, e in tale aspetto è lungi dal meritare gli stessi elogi. La sua storia dell' algebra è imperfettissima: pare che abbia ignorati i documenti che attestano alcuni dei principali fatti; ed altri sono giudicati ne' suoi scritti con troppa fretta e con parzialità. Nessuno in Inghilterra fu sinora più di lui bramoso di attribuire a' suoi compatriotti le più belle scoperte. Sembra che la gloria di Cartesio gli fosse sopra ogni altra cosa importuna; e s' ingegnò di trovare negli scritti di Harriot uno dei primarj teoremi di cui le scienze vanno debitrici al geometra francese. Harriot si attenne alle teorie algebriche di Francesco Viète, ed in un punto rilevante le perfezionò. Ma la scoperta di Cartesio deriva da un concetto originale, di cui non occorre traccia alcuna nel libro d' Harriot. Profonde ricerche hanno provato in questi ultimi tempi che quel teorema di Cartesio è il più importante elemento dell' analisi algebrica.

Non ostante che i nemici di questo grande geometra lo accusassero di aver servito con troppo zelo il protettore, interpretando le lettere scritte in cifre ai partigiani della casa Stuarda, tuttavia alla restaurazione di Carlo II non solo fu confermato nella cattedra Saviliana di geometria e nell' ufficio di custode degli

archivi dell' università di Oxford, ma conferita pure gli venne un'altra carica ecclesiastica. Essendo stata in quel tempo solennemente istituita la Società Reale di Londra, Wallis fu nominato uno dei primi membri di tale associazione, che si è resa immortalmente benemerita delle scienze e dello stato, Preparato aveva, mercè le sue ricerche e le sue conferenze coi più abili uomini dell' Inghilterra, la creazione di questo grande istituto; e dedicò il rimanente della sua vita ad utili e memorandi lavori. La storia delle scienze deve ricordare pure che Wallis fu uno dei creatori di un' arte preziosa per l' umanità, quella cioè dell' insegnamento dei sordo-muti. Parecchi di tali sventurati, giunsero, mercè le sue cure, ad intendere la lingua inglese, a scriverla ed anche a pronunziarla sufficientemente. Fu indotto a tale ricerca da un sentimento di benevolenza che era in lui naturale, e diretto dagli studj filologici della sua gioventù. Wallis morì a Londra il 28 Ottobre 1703, in età di ottantotto anni.

La maggior parte delle opere di Wallis erano state raccolte, sei anni prima ch' ei morisse, dai direttori della stamperia di Oxford, col titolo: *Joannis Wallis S. T. D., geometriae professoris Saviliani in celeberrima academia Oxoniensi, opera mathematica*, Oxford, 1697-99, 3 vol. in-fol. Vi si aggiunse poscia un quarto volume che conteneva i suoi scritti non relativi alle matematiche. I quattro volumi sono dedicati al re Guglielmo III. Fra le opere matematiche si distingue: 1.° il trattato intitolato: *Mathesis universalis, seu opus arithmeticum philologice et mathematice traditum, arithmeticam numerosam et speciosam, aliaque continens*; — 2.° *Dissertatio epistolica D. Wallisii ad D. Boyle de fluxu et refluxu maris* (pubblicata dapprima nel 1668); — 3.° il trattato intitolato *De motu* (1669), finito nel 1671, e pubblicato allora col titolo di *Mechanica, sive de motu tractatus geometricus*; — 4.° un dialogo *De proportionibus* (1663) contro Meibomio, il quale aveva impugnata la definizione d'Euclide, nel quinto libro de' suoi Elementi; tale scritto è dedicato al lord Broonker; — 5.° *Trattato delle sezioni coniche*; — 6.° *Trattato delle sezioni angolari*; — 7.° *Trattato storico e pratico dell'algebra* (pubblicato la prima volta in inglese, 1684), dalla sua origine fino alla invenzione dell' *Aritmetica degl' infiniti*. Vi aggiunse poscia un supplemento per arrivare fino al metodo infinitesimale di Leibnitz, e al calcolo delle flussioni di Newton; — 8.° *Aritmetica degl' infiniti*; — 9.° *Claudii Ptolemaei opus harmonicum*, greco latino, con note (1680), ed il Comento di Porfirio sugli Armonici; — 10.° l' *Arenarius et dimensio circuli* d' Archimede, con supplementi e col comento di Eutocio (1673); — 11.° un Frammento di Pappo, *Pappi libri secundi collectionum mathematicarum hactenus desiderati fragmentum*, pubblicato per la prima volta nel 1649; — 12.° il *Trattato d' Aristarco di Samo sulla grandezza del sole e della luna*. Tutte le prefate edizioni sono buone e contengono preziose note che non poterono essere scritte che da un sì profondo matematico, come se ne ha un esempio nella nota all' ode 19.ª del libro II d' Orazio. Finalmente, in seguito a tutte queste opere, vi è una moltitudine di lettere sui più importanti e variati argomenti.

Agli scritti che abbiamo indicati, è d' uopo aggiungere parecchie opere polemiche contro Hobbes. La prima, *Elenchus geometriae Hobbianae*, fu pubblicata in occasione dell' opera *Elementorum philosophiae sectio prima, de corpore*, in cui il metafisico di Malmesbury volle trattare il quesito della quadratura del circolo. Hobbes tradusse l' *Elenchus* in inglese, e lo pubblicò con una risposta cui intitolò: *Sei lezioni ai professori di matematica di Oxford*, 1656, in-4. Indi sorse una viva discussione in cui non furono risparmiate le ingiurie, e ne conseguitarono le seguenti opere: — *Correzione legittima ad Hobbes, ec.*, 1656, in-8, di Wallis; — Στιγμαὶ *ossia Prove di assurdi in geometria, di rustichezza in fatto di lingua, ec.*, 1657, in-4, di Hobbes; — *Hobbiani puncti dispunctio*,

1657, di Wallis; — *Exominatio et Emendatio mathematicorum hodiernorum in sex dialogis*, 1661, di Hobbes; — ed *Hobbius Heautontimorumenos*, 1662, in-8, di Wallis. Tali diversi scritti, nei quali quest' ultimo ebbe sempre una superiorità grande in confronto del suo avversario, pochissimo versato nelle scienze matematiche, non vennero raccolti nell' edizione di tutte le sue opere: « Non voglio, diceva, turbare le ceneri dei morti, sebbene sia debito il confutare i sofismi dei vivi ». Intorno a ciò si può consultare un *Conto-reso* nell' opera d' Israeli intitolata: *Piati degli autori*.

WARD (Set), dotto vescovo inglese, nato nel 1617 a Buntingford nell' Hertfordshire, e morto nel 1689, è autore di parecchie opere sull' astronomia e sopra differenti parti delle matematiche, le quali ottennero gran fama nel tempo in cui furono pubblicate, ma che i progressi della scienza hanno reso oggi meno importanti. Per giudizio dei suoi compatriotti, la sua reputazione come astronomo si appoggia principalmente sopra *la sua celebre approssimazione del luogo vero di un pianeta*: ma Montucla crede che non possa veramente ritenersi come l' inventore dell' ipotesi chiamata, *ellittica semplice*. Su questo punto però non possiamo che rimandare il lettore alla *Storia delle Matematiche*, tom. II, pag. 339. Ecco i titoli delle opere di Ward: I *De cometis, ubi de cometarum natura disseritur, nova cometarum theoria et novissimae cometae historia propanitur*; *praelectio Oxonii habita*, Oxford, 1653, in-4. In seguito e tale opera è stampato un opuscolo intitolato: *Inquisitio in Ismaelis Bullialdi astronomiae philolaicae fundamenta*, Oxford, 1653, in-4; II *Idea trigonometriae demonstratoe in usum juventutis Oxoniensis*, Oxford, 1654, in-4; III *Astronomia geometrica, ubi methodus proponitur qua primariorum planetarum astronomia, sive elliptica, sive circularis, possit geometrice obsolvi*, Londra, 1656, in-8.

WARGENTIN (Pietro Guglielmo), nato a Stockholm il 22 Settembre 1717, morì nell' osservatorio di tale città il 13 Dicembre 1783. Fu segretario dell' Accademia delle Scienze di Svezia, ufficio da lui sostenuto per trentaquattro anni con molto zelo. L' astronomia a lui deve una scoperta importante, quella delle equazioni empiriche dei satelliti di Giove, 1746. Non fu condotto a tale scoperta che dall' istinto del suo ingegno, non essendovi peranche nessun metodo generale per tal sorta di ricerche. Sino dal 1729, in età di dodici anni, osservò con molta sagacità un ecclisse della luna. Celsio in seguito lo indusse ad occuparsi della teoria dei satelliti di Giove, e fece stampare le di lui prime Tavole nelle *Memorie* dell' Accademia di Upsal. Lalande le pubblicò del pari nel 1771 nella seconda edizione della sua *Astronomia*. Wargentin scoperse la cometa del 1742, e si rese poscia illustre per altri meriti in tal genere. Pubblicò parecchie memorie sulla popolazione della Svezia nella *Raccolta* dell' Accademia di Stockholm. Aveva unito i resultati di tutti i suoi lavori di tal fatta in una grand' opera che non ebbe il tempo di pubblicare. Il suo disinteresse non gli aveva permesso di occuparsi della sua fortuna, ma l' amicizia de' suoi confratelli riparò ad ogni cosa. L' Accademia gli accordò una gratificazione sui fondi di cui essa disponeva, e sollecitò dal governo una pensione pe' suoi figli. Tale società gli fece coniare una medaglia, onore che essa tributa soltanto ai di lei membri più illustri. Oltre le memorie inserite nella *Raccolta* dell' Accademia di Svezia, si hanno di lui: *Tabulae novae pro supputandis eclipsibus tertii satellitis Jovis*, Londra, 1779. Tali effemeridi sono destinate per uso della marineria inglese. Wargentin era membro delle accademie di Parigi, di Pietroburgo, di Upsal, di Gottinga, e di Copenhagen.

WARING (Eduardo), nato nel 1734 da un ricco appaltatore di Shrewsbury, manifestò di buon'ora una inclinazione vivissima per le scienze. Terminò i suoi

studj con grandissima lode, ed aveva riportato il grado di baccelliere nell'università (1757), allorquando la cattedra di matematiche del collegio di Lucas, tanto illustrata dalle lezioni di Newton, rimase vacante nel 1760. I talenti primatieci dei quali Waring aveva dato prova, la repotazione e la stima che godeva sino d'allora presso i dotti, tutto concorse a farlo dichiarare dalla voce pubblica come l'uomo più capace di sostenere degnamente tale incombenza; ed un ordine del re supplì in breve ai gradi che mancavano al professore. La spiegazione delle curve algebriche era stata già spinta molto avanti da Barrow e da Newton, entrambi di lui predecessori, del pari che da Maclaurin, Bernoulli, Cramer, Clairaut, Eulero ed altri celebri matematici: Waring, infaticabile nelle sue ricerche, seguì la via che era stata tracciata da' suoi predecessori, e spinse più oltre le sue scoperte. Oltre un gran numero di problemi d'algebra e di geometria, di teoremi, di dissertazioni sopra la forza centripeta, sopra le equazioni, ec., che egli pubblicò in inglese nella raccolta delle *Transazioni filosofiche* dal 1763 al 1791, è autore altresì delle opere seguenti, scritte in latino: I *Meditazioni algebriche*, Cambridge, 1770, in-4; ristampata nel 1776 e 1782; II *Meditazioni analitiche*, Cambridge, 1776 e 1785, in-4; III *Miscellanee analitiche sopra le equazioni algebriche e le proprietà delle curve*, Cambridge, 1762, in-4. Quell'ultima opera fu vivamente impugnata da un opuscolo anonimo, al quale l'autore non disdegnò di rispondere: tale *Difesa* è scritta in inglese; IV *Proprietà delle curve algebriche*, Cambridge, 1772, in-4, è l'opera la più stimata di tutte quelle che ha pubblicato, ed è divisa in quattro capitoli. Il primo contiene la descrizione di parecchie proprietà fino allora sconosciute nelle curve algebriche. Il secondo tratta di una specie di curve generate dalla rotazione di curve algebriche sopra una linea qualunque o retta o curva; insegna il modo di rettificarle, di stabilirne la quadratura, di determinarne i raggi, e di risolvere col loro mezzo un'infinità di problemi. Nel terzo capitolo l'autore spiega la natura e le proprietà dei solidi generati dalla rotazione delle curve algebriche sopra i loro assi; vi descrive in seguito diverse nuove proprietà di tali solidi, formati dalla circonvoluzione delle sezioni coniche. Il quarto ed ultimo capitolo comprende differenti figure di linee rette descritte in curve ovali, e delineate intorno a tali curve o solidi: parecchi esempj servono per determinare il *maximum* ed il *minimum* di tali figure, del pari che la mutua loro proporzione. L'opera termina con un supplemento che abbraccia alcune nuove scoperte relative alle sezioni coniche. Waring divenne del pari valente nella medicina, ma non scrisse nulla su tale scienza. Questo dotto, la cui vita trascorse quasi tutta onorevolmente nell'insegnare, e che si procacciò tanta stima colla sua modestia e colla dolcezza del suo conversare, non meno che colle sue vaste cognizioni, morì nel 1798, universalmente compianto da' suoi numerosi allievi e da tutti i cultori delle scienze.

WEGA (*Astron.*). Nome arabo della bella stella di prima grandezza che si vede nella costellazione della Lira.

WEIDLER (Giovanni Federico), astronomo, nato il 23 Aprile 1691 a Gross-Neuhausen, in Turingia, fece i suoi studj in Germania, in Olanda, in Francia e in Inghilterra. A Parigi fu accolto da Tournemine, Hardouin, Montfaucon, Fontenelle, Cassini e altri dotti, coi quali dopo mantenne corrispondenza di lettere. Eletto, nel 1715, professore supplente di matematiche, successe, nel 1721, nella cattedra di matematiche superiori al celebre Wolf, che era stato chiamato all'Università di Halla. Weidler morì a Wittemberg, il 30 Novembre 1755, essendo allora membro della Società Reale di Londra e della Accademia di Berlino. Fra le di lui opere, che sono in gran numero, citeremo: I *Institutiones mathematicae, sub finem accedunt tabulae logarithmorum*, Wittemberg, 1718, in-8; ristampate nel 1759, e per la sesta volta a Lipsia, 1784, 2 vol. in-8; II *Explicatio*

Jovilabii Cassiniani, Wittemberg, 1727, in-4; III *Tractatus de machinis hydraulicis toto terrarum orbe maximis, Martiensi, Londinensi et aliis rarioribus*, ivi, 1728, in-4; e ristampato, 1733; IV *Commentatio de aurora boreali, die 26 novembris 1729*, ivi, 1730, in-4; V *Historia astronomiae*, ivi, 1741, in-4; VI *Institutiones geometriae subterraneae*, ivi, 1751, 2.ª ediz.; VII *Institutiones astronomiae*, ivi, 1754, in-4.

WHISTON (Guglielmo), astronomo, geometra e fisico, nato a Norton nella contea di Leicester nel 1667, e morto nel 1752. Questo dotto mostrò fino dalla sua giovinezza una inclinazione per la teologia e per la filosofia, in cui ricevè la prima istruzione da suo padre, pastore della chiesa protestante. Soltanto in età di diciassette anni frequentò le scuole di Cambridge, ove prese a studiare con passione straordinaria le matematiche, non dedicandovi meno di otto ore al giorno. Rapidissimi furono i suoi progressi, e nel 1693 fu fatto maestro in arti e scelto dal dotto arcivescovo Tillotson per precettore di suo nipote. Indi a poco, il vescovo di Norwich lo fece suo cappellano. Allora (1696) pubblicò la prima sua opera intitolata: *Nuova teoria della terra, dalla creazione fino alla consumazione di tutte le cose*, nella quale prese a dimostrare che la creazione del mondo in sei giorni, il diluvio universale e la conflagrazione generale, come insegna la sacra scrittura sono perfettamente d'accordo colla ragione e colla filosofia. Tale opera, che ebbe in breve tempo sei edizioni, attirò sull'autore gli sguardi del pubblico ed assicurò la sua reputazione; e, ciò che è più notabile, ottenne il suffragio di Locke e di Newton. Quest'ultimo, che allora professava nell'università di Cambridge, lo scelse per suo aggiunto, lasciandogli tutti gli onorarj dell'impiego, e poco dopo, nel 1701, successe a tale grand'uomo. Negli anni seguenti, Whiston pubblicò con sorprendente rapidità un gran numero di scritti di vario genere, di cui non citeremo che quelli relativi alle matematiche: *Nuova edizione di Euclide, con una scelta di teoremi di Archimede, e di corollarj pratici* (in latino), Cambridge, 1703; ed ivi, 1710, 2.ª ediz. Tale opera fu poscia tradotta in inglese sotto gli occhi dell'autore, e stampata a Londra; — *Corso d'astronomia* (*Praelectiones astronomicae*) 1707; — *Aritmetica universale di Newton*, 1707. Noi non seguiremo ora Whiston nelle sue discussioni teologiche, e ci limiteremo a dire che dopo essere stato vivamente perseguitato per le sue opinioni religiose, morì povero e stimato da tutti quelli che lo avevano conosciuto.

WOLF (Cristiano), nato a Breslaw in Slesia l'anno 1679, è divenuto celebre nella storia della scienza come sommo fisico e come sommo matematico. Oltre la sua grande opera in 5 volumi in-4, di cui parleremo qui sotto, pubblicò nel 1693 una dissertazione intitolata: *De philosophia practica universali*, scritto che attirò su di lui gli sguardi dei dotti, e gli meritò l'onore di essere associato al lavoro dei compilatori del giornale scientifico che si pubblicava a Lipsia col titolo di *Acta eruditorum*. Nel 1706 pubblicò la sua *Aerometria*, opera molto stimata, e nella quale l'autore spiegò le profonde sue cognizioni nelle matematiche e nella fisica. Nel 1709 diede in luce una dissertazione *sul freddo*, che gli procurò il vantaggio di essere accolto nella Società Reale di Londra. Nel 1711 pubblicò le sue *Tavole dei seni e delle tangenti*. Nel 1723 comparvero i suoi *Saggi di fisica sperimentale*, e nel 1724 furono stampate le sue *Horae successivae*. Ma tutte queste opere, per quanto pregevolissime in se stesse, spariscono per così dire, messe in confronto col suo *Corso di matematiche*. In quest'opera ha avuto in mira (ed ha perfettamente raggiunto lo scopo propostosi) di mettere in grado un giovine, di sufficiente intelligenza, ma senza alcuna cognizione di geometria, di divenire matematico senza bisogno di maestro e coll'unico soccorso del suo libro. Nel primo tomo egli espone gli elementi di aritmetica, di geometria, di trigonometria, e di analisi ordinaria e sublime. Il secondo tomo contiene la meccanica

generale e particolare, l'ereometria e l'idraulica. L'ottica, la diottrica, la catottrica e l'astronomia formano il terzo volume. Nel quarto dà gli elementi dell'idrografia, della cronologia, della gnomonica e dell'architettura civile e militare. Ciò che contiene di principale il quinto volume è la storia dei matematici comparsi prima di lui. Wolf, colla candidezza e sincerità che gli ere naturale, ha confessato di essersi molto giovato dei corsi di matematiche che prima di lui avevano pubblicato i gesuiti Schott e De Chales, e giunge fino a dire che in questo genere nulla fino allora era stato dato in luce che valesse il corso del p. De Chales, *Cursuum mathemoticorum qui hoctenus lucem publicam adspexerunt absolutissimus est.* Wolf fu professore di matematiche a Marbourg. Ed era socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Parigi e dell'Istituto di Bologna, quando morì nel 1754, in età di 75 anni.

WREN (Cristoforo), dotto matematico inglese, nato nel 1632 e morto nel 1723, si è reso celebre nella storia della scienza per le sue scoperte, pei suoi lavori, e per l'universalità de' suoi talenti. Tutti i diversi rami della scienza sono stati l'oggetto de' suoi studj: geometra, a un tempo, astronomo, meccanico e architetto, deve essere annoverato tra gli uomini che più potentemente hanno contribuito ai progressi della scienza e al lustro della loro patria. Lo spazio ci manca anco per dare un semplice elenco dei numerosi suoi lavori; ci limiteremo perciò a rammentare che fu il primo a trovare la rettificazione assoluta della cicloide, e che ebbe l'onore di concorrere con Huygens e con Wallis alla scoperta delle leggi dell'urto dei corpi. Come astronomo, ha rettificato o inventato un gran numero di strumenti, e pubblicato una serie di osservazioni sopra Saturno, una teoria della librazione della luna, e dei saggi per determinare la parallasse delle stelle fisse. Come architetto, basta ricordare che fu il costruttore della chiesa di San Paolo a Londra. Ha lasciato numerosi scritti, la maggior parte dei quali si leggono nelle *Transazioni filosofiche* dal suo tempo.

WRIGHT (Odoardo), uno dei matematici più distinti dell'Inghilterra, nacque a Garveston, nella contea di Norfolk, verso il 1560, e morì a Londra nel 1618 o 1620. Poche notizie biografiche si hanno sopra di lui. L'opera sua principale è: *Correzioni degli errori che si commettono nella navigazione*, 1599. Tale trattato, a giusta ragione celebre, distinguevasi per le idee le più avvedute, le più nette, e le più giuste intorno alla divisione del meridiano, sulla maniera di costruirne le tavole, e sugli usi ai quali si può applicare tale divisione nella navigazione. L'autore ne pubblicò nel 1610 una seconda edizione accresciuta. Fra i numerosi miglioramenti che quest'ultima contiene, convien mettere nel primo ordine l'indicazione del metodo da tenersi per determinare la grandezza della terra, e delle riflessioni sulla necessità di prender per base dell'unità di misura una lunghezza in relazione col meridiano terrestre. Si osservano altresì in tale opera delle tavole di latitudine corrispondenti alle divisioni del meridiano, divisioni di cui il calcolo era spinto fino ai minuti; uno strumento mediante il quale le variazioni della bussola, l'altezza del sole e il tempo del giorno erano determinati in pari tempo in ciascun luogo, purchè la latitudine ne fosse conosciuta; la correzione degli errori dovuti all'eccentricità dell'occhio nelle osservazioni coll'alidada; la correzione di tutte le tavole del tramonto e della posizione delle stelle e del sole, dietro le osservazioni fatte da lui con un quadrante di sei piedi; e finalmente un quadrante per prendere le altezze in mare.

X

XIMENES (Leonardo), celebre geometra ed astronomo, nacque il 27 Dicembre 1716, a Trapani, in Sicilia, da nobile famiglia originaria di Spagna. Fino dalla sua più tenera infanzia dimostrò sorprendenti disposizioni per lo studio, e in pari tempo una grande avversione per le vanità del mondo. Di quindici anni entrò nella regola di Sant' Ignazio: ma dopo aver terminato il suo noviziato, ed insegnato per alcun tempo la rettorica e la filosofia, chiese a' suoi superiori il permesso di passare in Italia, onde perfezionare le sue cognizioni ed acquistarne delle nuove. Incaricato dapprima d' insegnare belle lettere a Firenze e a Siena, andò in seguito a fare il corso di teologia a Roma. E lo aveva appena terminato, quando il marchese Vincenzio Riccardi di Firenze, avendo chiesto al provinciale de' gesuiti un soggetto per insegnare le matematiche a'suoi figli, gli fu dato Ximenes. In tale nuova incumbenza, seppe approfittare de' suoi ozj per dedicarsi con ardore allo studio delle scienze; ed assistito dai consigli di alcuni suoi confratelli, fece rapidi progressi nella geometria e nelle alte matematiche. Alcuni opuscoli da lui pubblicati verso lo stesso tempo avendolo fatto conoscere nella maniera la più favorevole, ottenne, unitamente al titolo di matematico del granduca, la cattedra di geometria. Le rovine cagionate dallo straripamento del Po e del Reno, soggetto continuo di contrasti tra i diversi stati della Bassa Italia, diedero in breve al p. Ximenes occasione di rendersi segnalato pe' suoi talenti in idraulica. Fu scelto dal granduca per accomodare le difficoltà insorte tra la Toscana e la repubblica di Lucca, della quale il commissario fu il p. Boscovich; e disimpegnò tale incarico con grande zelo: i mezzi da lui suggeriti per antivenire nuovi straripamenti furono stimati tanto superiori a tutti quelli che si erano adoperati sino allora, che indi innanzi non si agitò nell' Italia nessuna questione d' idraulica senza assoggettarla a lui. Non vi fu in Italia un solo stato che non avesse avuto ricorso ai lumi del p. Ximenes, e che non si fosse dato vanto di avere seguito i suoi consigli. Venne consultato dalla corte di Roma sui mezzi di asciugare le paludi Pontine, e di regolare il corso dei fiumi nel Bolognese; dai Veneziani, in occasione dei guasti fatti dalla Brenta; dai Lucchesi, sul lago di Sesto o di Bientina; dai Genovesi, per acquedotti da costruire, strade da fare e altri oggetti di rilievo. Ma i lavori da lui fatti eseguire in Toscana bastano per assicurarli una fama immortale. Troppo lungo sarebbe il rammentare qui tutte le piante disegnate e tutti i progetti inventati dal p. Ximenes, tutti i lavori intrapresi sotto la sua direzione e condotti a termine per ordine del granduca Pietro Leopoldo. Basterà citare la Valle della Chiana, la Maremma di Siena, e la strada di Pistoja. Gli ostacoli innumerevoli da lui incontrati nell' esecuzione di tali belle opere non valsero che a dar prova del potere e del trionfo dell' arte. Il solo ponte di Sestajone, costruito sopra orribili precipizj, eguaglia i più superbi monumenti da' Greci e de' Romani.

Quantunque intento quasi senza posa ai lavori di cui si è parlato, il p. Ximenes trovò peraltro il tempo di fare una quantità d' osservazioni astronomiche di rilievo, e di pubblicare un numero grande di opere stimatissime. Era frequentemente consultato dai dotti, del pari che dagli accademici che si erano affrettati

di aggregarselo; e tale era la sua attività quasi incredibile, che non lasciò mai nessuna lettera senza risposta. Impiegò gli stipendj che riceveva da'suoi diversi impieghi, e le rendite del suo patrimonio, ad ornare la città di Firenze d'uno dei più bei monumenti che essa possieda per le scienze. È desso l'osservatorio di San Giovannino delle Scuole Pie, famoso specialmente pel suo gran quadrante murale, e per lo gnomone di Paolo Toscanelli, che il p. Ximenes vi ristabilì: vi aggiunse una biblioteca scelta ed un numero grande di strumenti di matematiche. Finalmente, dopo una vita di cui tutto il corso era stato impiegato nella pratica delle virtù cristiane, e nell'esercizio dei più nobili talenti, morì di apoplessia in Firenze, il 3 Maggio 1786, in età di settanta anni. Col suo testamento fondò due cattedre, una di astronomia e l'altra d'idraulica, che dovevano essere sostenute da due religiosi delle Scuole Pie, ai quali lascia la sua biblioteca e il suo gabinetto. Lasciò tutti i suoi manoscritti al senatore G. B. Nelli, che possedeva già quelli di Galileo e di parecchi altri dotti dei quali la Toscana a buon diritto si onora. A molta dottrina accoppiava il p. Ximenes l'abilità di adattare le sue scoperte alle intelligenze le più volgari: sempre chiaro, preciso e metodico, parlava con eloquenza, e si cattivava l'attenzione de'suoi uditori. I suoi grandi lavori gli assicurano un posto tra i più grandi uomini dell'Italia nel secolo decimottavo. Era socio corrispondente delle accademie delle scienze di Parigi e di Pietroburgo, e membro attivo di quelle di Verona e di Siena.

Le opere del p. Ximenes sono: I. *Osservazione dell'aurora boreale del dì 3 Febbraio 1750, a cui si aggiunge la soluzione di un nuovo problema per calcolarne le distanze, secondo l'ipotesi del Mayer, ec. — Osservazione dell'aurora boreale comparsa la notte del 26 Agosto 1756.* Queste due osservazioni sono state pubblicate nella prima decade de' *Symbol. letterar.* del Gori; II *Notizia de'tempi, de' principali fenomeni del cielo nuovomente calcolati, ec.*, Firenze, 1751, in-8. Tale opera, fatta col metodo delle *Efemeridi*, è stata continuata per gli anni 1752 e 1753; III *Primi elementi della geometria piano*, Venezia, 1751, in-8; IV *Dissertazione meccanica di due stromenti che possono servire alla giusta stima del viaggio marittimo, e della velocità delle acque e de'venti*, Firenze, 1752; V *Dissertatio de maris aestu, ac praesertim de viribus lunae solisque mare moventibus*, ivi, 1755, in-4; VI *Del vecchio e nuovo gnomone fiorentino, e delle osservazioni astronomiche, ec., fatte nel verificarne la costruzione, libri quattro*, ivi, 1757, in-4, con fig. Tale opera, preceduta da una storia dell'astronomia in Toscana, e piena di osservazioni curiose sull'astronomia, sulla fisica e sull'architettura, procacciò a Ximenes una grande reputazione; VII *Osservazione del passaggio di Venere sul disco solare, accaduto la mattina del 6 Giugno 1761*, ivi, in-4; VIII *Dissertazione intorno alle osservazioni solstiziali del 1775*, Livorno, 1776, in-4. In tale opera ha corretto e perfezionato il suo trattato *Del vecchio e nuovo gnomone, ec.*, al quale deve essere unita. » L'autore, dice Lalande, trova la diminuzione secolare dell'obliquità della eclittica di circa 35″, invece di 50″, come vien supposto dalla maggior parte degli astronomi, e il suo resultato parmi che sia più verosimile » (*Bibliog. astronom.* pag. 551); IX *Nuove sperienze idrauliche fatte ne'canali e ne'fiumi per verificare le principali leggi e fenomeni delle acque correnti*, Siena, 1780, in-4. Tale opera è stimatissima; X *Ristretto dell'osservazione dell'ecclissi solare del dì 17 Ottobre 1781*, Roma, in-4; inserito ancora nel *Giornale dei dotti*, marzo 1782; XI *Teoria e pratica delle resistenze de'solidi ne'loro attriti*, Pisa e Firenze, 1782, 2 vol. in-4; XII *Raccolta di perizie ed opuscoli idraulici, ec.*, Firenze, 1781-86, 2 vol. in-4. Tale grande opera, corredata di un numero grande di tavole, doveva formare sei volumi, dei quali l'ultimo avrebbe contenuto un dizionario idraulico; ma la morte tolse all'autore di

poter condurre a termine tale disegno. Si trovano ancora altri opuscoli e dissertazioni del p. Ximenes nei giornali scientifici del tempo, e nelle *Memorie* delle accademie delle quali era membro, e principalmente di Verona e di Siena. Le opere che si possono consultare su tale grande matematico sono: 1.° il suo *Elogio* dell'abate Luigi Brenna, nel *Giornale di Pisa*, LXIV; 2.° un altro *Elogio* di Paleani, nelle *Memorie della Società Italiana*, Verona, 1790; ristampato separatamente, Bologna, 1791; 3.° *Il Nuovo Dizionario storico di Bassano*; 4.° finalmente il *Supplem. Bibl. soc. Jesu*, del p. Caballero, 284-86.

Z

ZAMBERTI (Bartolommeo), uno dei più antichi traduttori di Euclide, fu veneziano, e fioriva nel principio del secolo decimosesto. Alla traduzione degli *Elementi* del geometra greco, aggiunse, quella dei *Comenti* di Teone e d'Ipsicleo, e dei frammenti tratti da Pappo. Tale raccolta fu pubblicata a Venezia, 1505, in fol.; ristampata a Parigi da Enrico Stefano, 1516, e a Basilea da Ervagio, 1537, nella stessa forma. Oronzio Fineo, matematico francese, prese la versione di Zamberti per base del suo lavoro sulla geometria di Euclide, e vi aggiunse il suo comento sui sei primi libri, Parigi, 1536, in-fol. La versione di Zamberti, sebbene lasci molto a desiderare, ha il merito di avere aperta e facilitata grandemente la via ai traduttori posteriori; e, se si pone mente al tempo in cui fu fatta, deve piuttosto far maraviglia che non sia riuscita più difettosa (Montucla, *Storia delle Matematiche*).

ZANOTTI (Eustachio), distinto astronomo italiano, nato a Bologna il 27 Novembre 1709. Fino dall'infanzia mostrò disposizioni straordinarie per le scienze esatte. Terminati che ebbe gli studi delle umane lettere sotto i gesuiti, Francesco Maria Zanotti, suo zio, e professore di filosofia nell'università di Bologna, lo ammaestrò nelle matematiche, ed imparò poscia da Eustachio Manfredi (*Vedi* Manfredi) gli elementi dell'astronomia. I suoi progressi furono sì rapidi, che all'età di venti anni fu fatto supplente di quell'illustre maestro. Ottenne nel 1738 la cattedra di meccanica nel ginnasio della sua patria, da cui non aveva mai voluto allontanarsi, rifiutando le offerte vantaggiose dell'università di Padova. Successe a Manfredi nella cattedra d'astronomia, e fu uno degli astronomi che ripeterono in Europa le osservazioni che La Caille era andato a fare al capo di Buona Speranza per determinare la parallasse della luna (*Vedi* Caille). Nel 1776, assunse di fare alla celebre meridiana di San Petronio le riparazioni di cui aveva bisogno. L'anno seguente, successe a suo zio nella carica di presidente dell'Istituto. I principi e i diversi stati d'Italia ricorsero frequentemente alla sua dottrina. Morì il 15 Maggio 1782, sommamente compianto pe' suoi talenti e per le sue doti morali. Fu membro della Società Reale di Londra e delle accademie di Berlino e di Cassel. Oltre a parecchie *Memorie* nella Raccolta dell'Istituto di Bologna, e alle *Osservazioni* sulle comete del 1739, 1741, 1744 e 1769, abbiamo di lui: I *Ephemerides motuum coelestium ex anno 1751 ad annum 1786, ad meridianum Bononiae supputatae, cum introductione et tabulis astronomicis Eustachii Manfredi*, Bologna, 5 tomi in 3 vol. in-4; II *Trattato teorico-pratico di prospettiva*, ivi, 1766, in-4; III *La meridiana del tempio di San Pe-*

tronio rinnovata l'anno 1776, ivi, 1779, in-fol. Per altre notizie su questo dotto può ricorrersi all'*Elogio* che ne ha scritto Fabroni nel tomo III delle *Memorie della Società Italiana di Verona*.

ZENIT (*Astron.*). Punto del cielo che corrisponde verticalmente al di sopra del nostro capo.

Se s'immagina una linea perpendicolare all'orizzonte nel luogo che occupa un osservatore, il punto in cui questa linea prolungata indefinitamente andrà ad incontrare la volta celeste sarà lo *zenit* del luogo, e se questa stessa linea si suppone prolungata al di sotto dell'orizzonte, il punto opposto nel quale il cielo sarà incontrato da tale prolungamento sarà il *nadir* dello stesso luogo. Donde si scorge evidentemente che questa retta può esser considerata come l'*asse* dell'orizzonte, e lo *zenit* e il *nadir* come i suoi *poli* (*Vedi* Armillare); e si vede egualmente che un osservatore, ad ogni passo che fa, cangia il suo zenit e il suo nadir, nel modo medesimo che cangia di orizzonte.

Se la terra fosse esattamente sferica, il nostro zenit sarebbe il nadir de' nostri antipodi, e il nostro nadir sarebbe il loro zenit: ma siccome essa non ha rigorosamente questa figura, sebbene ne differisca di poco, così la linea perpendicolare in un punto della sua superficie, che come abbiamo detto determina lo zenit e il nadir di quel punto, non passa pel suo centro, e non incontra perpendicolarmente la superficie dell'emisfero opposto. Perciò i nostri antipodi, che si trovano in un punto diametralmente opposto a quello in cui siamo noi, non hanno il loro zenit e il loro nadir nella perpendicolare che determina lo zenit e il nadir del luogo occupato da noi. Sotto l'equatore però ed ai poli, dove la perpendicolare alla superficie della terra passa pel centro e incontra perpendicolarmente la superficie dell'emisfero opposto, lo zenit di un luogo si confonde col nadir degli antipodi, e viceversa.

La distanza di un astro dallo zenit è il complemento della sua altezza al di sopra dell'orizzonte, poichè, siccome lo zenit è distante di 90° dall'orizzonte, se si toglie da 90° la distanza di un astro dall'orizzonte, il resto sarà la distanza dell'astro dello zenit.

Tutti i circoli verticali o azimut passano per lo zenit, che oltre essere il polo dell'orizzonte lo è pure degli almicantarat o circoli paralleli all'orizzonte.

La parola zenit è araba, e viene da *semt* che significa *punto*.

ZEPPA (*Mecc.*). *Vedi* Conio, Cuneo, Bietta.

ZODIACALE. Luce zodiacale (*Astron.*). Aureola luminosa che si scorge nel cielo in certi tempi dell'anno dopo il tramonto del sole o prima del suo levare: la sua forma è quella di una lenticchia molto schiacciata, posta obliquamente sull'orizzonte, e la cui punta si estende molto lungi nel cielo (*Tav.* XXXII, *fig.* 4). Fu osservata la prima volta da Cassini il 18 Marzo 1683.

Questa luce, biancastra come quella della via lattea, accompagna sempre il sole, e negli ecclissi totali si vede essa intorno al suo disco come una chioma luminosa. È costantemente diretta nel senso dell'equatore solare, ed è questo il motivo per cui non è visibile in tutte le stagioni, perchè quest'equatore è diversamente inclinato sull'orizzonte, secondo le diverse posizioni del sole sull'ecclittica. A Parigi, il tempo più opportuno per vederla è negli ultimi giorni di Febbrajo o nei primi del Marzo, quando è per terminare il crepuscolo della sera, vale a dire verso le ore 7 e un quarto della sera, e quando il punto equinoziale è sempre sull'orizzonte: allora, se il cielo è bello e se la luna non è sull'orizzonte, si vede la luce zodiacale diretta lungo l'ecclittica fin verso la stella *Aldebaran*, facendo col suo asse un angolo di 64 gradi coll'orizzonte. Se l'osservazione si facesse la mattina nella stessa stagione, sarebbe assai più difficile il vedere questa luce, perchè il suo asse non farebbe più che un angolo di 26 gradi coll'orizzonte. La

Caille, nel suo viaggio in Affrica, ha osservato che la luce zodiacale è costantemente visibile nella zona torrida, dove essa s'innalza perpendicolarmente sull' orizzonte.

Secondo Mairan, la luce zodiacale non è altro che l' atmosfera stessa del sole, cioè un fluido o materia rara e tenue, luminosa di per sè stessa, o illuminata dai raggi del sole, la quale, mentre circonda quest' astro, è estremamente allungata nel senso del suo equatore. Secondo altri fisici, è un anello luminoso che circonda il sole, come l' anello di Saturno circonda questo pianeta. Le ipotesi più moderne riferiscono questo fenomeno al genere di quelli prodotti dalla elettricità.

L' epiteto di *zodiacale* è stato dato a questa luce, perchè è sempre contenuta nella zona celeste chiamata *zodiaco*.

ZODIACO (*Astron.*). Zona celeste di circa 18 gradi di larghezza, che fa l' intero giro del cielo. È divisa in due parti eguali dall' ecclittica, e comprende tutti i punti del cielo nei quali possono apparire gli antichi pianeti, poichè la latitudine di questi differenti astri, sia vera, sia apparente, non oltrepassa giammai i 9 gradi.

L' origine dello zodiaco risale ai primi tempi dell' astronomia: subitochè si riconobbe il cammino apparente del sole sulla sfera celeste, e si fissò la posizione di questo cammino rapporto ai gruppi di stelle che esso attraversa, si scoprì ben presto che tutti i pianeti allora conosciuti non si allontanavano mai, nei loro diversi movimenti, che di una piccolissima distanza a destra o a sinistra di questo cammino, e la zona nella quale avevano luogo tutti questi movimenti ricevè il nome di *zodiaco*, da ζωον, *animale*, perchè i gruppi di stelle o *costellazioni* che la compongono erano stati rappresentati con figure di animali.

L' *ecclittica*, ossia il cammino annuo del sole, essendo stata divisa in dodici porzioni eguali, chiamate *segni*, si erano pure divise le stelle dello zodiaco in dodici *costellazioni* corrispondenti; cosicchè i segni e le loro costellazioni portavano il medesimo nome, e così, per mezzo della semplice osservazione delle stelle delle costellazioni, diveniva facilissimo il riconoscere il passaggio del sole nei differenti segni, passaggio che regola l' ordine delle stagioni. I nomi dei segni e delle respettive costellazioni sono: l' *Ariete*, il *Toro*, i *Gemelli*, il *Cancro*, il *Leone*, la *Vergine*, la *Libbra*, lo *Scorpione*, il *Sagittario*, il *Capricorno*, l' *Aquario*, e i *Pesci*. Ma dall' epoca in cui furono fatte queste divisioni, lo stato del cielo è cangiato moltissimo. L' equinozio di primavera, punto in cui l' ecclittica taglia l' equatore, e che è stato preso per origine dei segni, ha retrogradato sull' ecclittica per l' effetto della precessione degli equinozj (*Vedi* Precessione), e gli stessi gruppi di stelle non corrispondono più alle divisioni dell' ecclittica, il cui punto di partenza è sempre l' equinozio variabile di primavera. L' astronomia moderna ha conservato le antiche divisioni ed anco i nomi dei dodici segni; ma non bisogna confondere i dodici segni dello zodiaco colle dodici costellazioni dello stesso nome che loro corrispondevano 2254 anni addietro, poichè adesso, per esempio, la *costellazione* dell' *Ariete* si trova nel *segno* dei *Pesci*, la *costellazione* del *Toro* si trova nel *segno* dell' *Ariete*, e così di seguito. *Vedi* Armillare, n.° 15.

Per accennare questa essenzialissima distinzione dei segni dalle costellazioni che portano i medesimi nomi, si suole da alcuni indicare col nome di *zodiaco razionale* il complesso dei dodici *segni*, o porzioni eguali dello zodiaco, ognuno dei quali è diviso in 30 gradi, cominciando dal punto equinoziale, e col nome di *zodiaco visibile* o *sensibile* il complesso delle dodici costellazioni che hanno retrogradato. In astronomia, quando si dice che il sole o un astro qualunque è nel tale o tale altro segno dello zodiaco, non s' intende di dire che si trova nella costellazione che porta il medesimo nome, ma in quel segno dello zodiaco che ha conservato il nome di detta costellazione.

L'origine dei nomi che portano le dodici costellazioni è della più remota antichità, e si possono vedere le ipotesi ingegnose che in questo proposito ha fatto Pluche nella sua *Storia del cielo*.

Macrobio, cercando le ragioni della denominazione data ai segni del Cancro e del Capricorno, aveva detto che la prima veniva dal gambero che cammina a ritroso, perchè il sole, giunto al Cancro, torna indietro e discende obliquamente; e che la seconda veniva dai capretti che pascolando arrivano alle eminenze, perchè il sole, arrivato al Capricorno, comincia a risalire verso di noi. Su questo piano di analogia, Pluche formò delle congetture sulla denominazione degli altri segni, e sostenne che gli autori dello zodiaco avevano realmente voluto indicare la stagione degli agnelli coll'Ariete, all'equinozio di primavera; l'eguaglianza dei giorni e delle notti colla Bilancia o Libbra, all'equinozio d'autunno; il tempo della messe colla Vergine che tiene in mano la spiga; il tempo delle piogge d'inverno coll'Aquario; e così del resto.

Dupuis, nella sua memoria *sull'origine delle costellazioni*, ha preso a dimostrare la concordanza tra lo zodiaco egiziano e quello dei Greci; e spiega come le denominazioni del primo contengano la storia del calendario dell'Egitto.

Se, dice egli, si ritorna colla mente all'epoca in cui il Capricorno, dal quale si cominciavano a contare i segni, denotava il solstizio d'estate, siccome quest'animale cerca sempre le emiuenze, si diede il suo nome al segno il più elevato.

L'Aquario e i Pesci indicavano l'inondazione, come la indicava ancora la coda di pesce che si dava al Capricorno.

L'Ariete denotava il tempo in cui le acque ritirate davano luogo alle mandre che s'inviavano nei pascoli.

Il Toro annunziava la stagione del lavoro e delle semente. I Gemelli, o i due Capretti, indicavano le nuove produzioni, la fecondità e l'infanzia della natura. Il Cancro era nel solstizio d'inverno, donde il sole sembrava ritornare verso l'Egitto.

Il Leone era nel luogo ove il sole sembrava riprendere la sua forza. La Vergine colla sua spiga esprimeva il tempo delle messi, che si fanno in Egitto un mese prima dell'equinozio di primavera, che era indicato colla Libbra.

Lo Scorpione era il simbolo dei venti tanto dannosi e pestilenziali che dall'Etiopia soffiano vapori malefici. Finalmente il Sagittario era l'emblema dei venti etesii, che precedevano il solstizio d'estate e il traboccamento del Nilo, e forse anche alludeva al tempo della caccia e della guerra, che era naturale di cominciare quando bisognava partire dalla campagna a motivo dell'inondazione.

Per infinite altre particolarità sugli zodiaci dei Chinesi, dei Persiani, degl'Indiani, degli Egiziani, dei Greci, ec., e sulle concordanze e differenze tra i medesimi, fa d'uopo ricorrere alla erudita opera del medesimo Dupuis sull'*Origine dei culti*. Noi termineremo quest'articolo col far vedere come nella mitologia dei Greci concordano perfettamente i dodici segni dello zodiaco colle dodici fatiche d'Ercole, quando in specie vi si uniscono le costellazioni estrazodiacali che si approssimano ai segni o loro corrispondono.

1.° La vittoria di Ercole sul leone di Nemea è l'ingresso del sole nel Leone, che era il segno solstiziale, 2500 anni avanti l'era volgare.

2.° Il trionfo sull'idra di Lerna è contrassegnato dal tramonto eliaco delle stelle della costellazione dell'Idra, che avviene nel mese seguente, quando il sole è nella Vergine.

3.° La disfatta dei Centauri e la presa del Cinghiale d'Erimanto è il tramonto eliaco della costellazione del Centauro, che avviene quando il sole è nella Libbra: il tramonto del Centauro è seguito da quello del Sagittario che è pure un centauro, e dal levare dell'Orsa maggiore chiamata anche Cinghiale.

4.° Il trionfo sulla cerva dalle corna d'oro si riferisce a Cassiopea, chiamata pure la Cerva, la quale tramonta quando si leva lo Scorpione.

5.° La fuga delle Stinfalidi vien rappresentata dal levare dell'Aquila, dell'Avvoltojo e del Cigno, che ha luogo quando il sole è nel Sagittario.

6.° Le stalle d'Augia nettate dal fiume Alfeo sono espresse dall'ingresso del sole nel Capricorno, che è bagnato sul davanti dalle acque dell'Aquario.

7.° La presa del Toro di Creta e dell'Avvoltojo di Prometeo è il tramonto del Centauro e dell'Avvoltojo, che sparivano la mattina, quando il sole entrava nell'Aquario.

8.° Ercole che doma i cavalli di Diomede è il levare eliaco di Pegaso e del Cavallo minore, che ha luogo quando il sole è nei Pesci.

9.° La disfatta delle amazzoni è il tramontare di Andromeda, di Cassiopea e delle Plejadi, che si osserva quando il sole è nell'Ariete.

10.° La conquista dei buoi di Gerione è l'ingresso del sole nel Toro, ossia il levare dell'Orsa maggiore.

11.° Il trionfo d'Ercole sul cane Cerbero è il tramonto eliaco di Procione, che si vede quando il sole percorre i Gemelli.

12.° Finalmente la duodecima impresa di Ercole che corrisponde al Cancro è il secondo viaggio in Esperia, per la conquista dei pomi d'oro delle Esperidi, ed è espresso dal levare di Cefeo, che è dipinto come un pastore che guarda una mandra, ed è situato sul Dragone chiamato *Custos Hesperidum*, levare che ha luogo quando il sole tramonta percorrendo il Cancro.

ZODIACO (Asse dello) (*Astron.*). Linea retta che passa pel centro del sole e termina ai poli dello zodiaco.

ZODIACO delle Comete. Cassini diede questo nome ad una gran fascia celeste, che la maggior parte delle comete fino allora vedute non aveva par anche oltrepassata. Questa fascia era assai più larga dello zodiaco dei pianeti, e conteneva le costellazioni di Antinoo, di Pegaso, di Andromeda, del Toro, d'Orione, del Cane maggiore, dell'Idra, del Centauro, dello Scorpione e del Sagittario. Ma è stato in seguito riconosciuto che non vi è zodiaco per le comete, essendo questi corpi indifferentemente sparsi nella immensa estensione dei cieli.

ZONA (*Geom.*). Porzione della superficie di una sfera compresa tra due circoli paralleli.

ZONA (*Astron. Geograf.*). Tutta la superficie della terra è divisa da quattro circoli paralleli in cinque fasce circolari che si dicono *zone terrestri*, cioè una *zona torrida*, due *zone temperate*, e due *zone glaciali*. La zona torrida si estende fino a 23° 28′ dall'una e dall'altra parte dell'equatore, che perciò la divide in due parti eguali: essa ha così un'estensione di 46° 56′, e comprende tutti i paesi che sono situati tra i due tropici, e nei quali si può avere il sole allo zenit. Le zone temperate sono due fasce terminate ciascuna da un tropico e da un circolo polare: una di queste zone è nell'emisfero boreale, l'altra nell'australe; la prima si estende dal tropico del Cancro fino al circolo polare artico, la seconda dal tropico del Capricorno fino al circolo polare antartico. Ognuna di esse ha un estensione di 43° 4′, e comprende i paesi che non hanno mai il sole al loro zenit, ma che lo vedono tutti i giorni. Le zone glaciali sono segmenti della superficie terrestre: una di queste zone è situata al nord, l'altra al sud: la prima si estende dal circolo polare artico al polo boreale, e la seconda dal circolo polare antartico al polo australe.

Zone glaciali. In queste zone hanno luogo le lunghe estati e i lunghi inverni. Al solstizio d'estate di ciascuna zona, il sole sta sull'orizzonte ventiquattro ore pei punti situati sul circolo polare, e sei mesi interi pel polo. In ogni altra parte della zona, la sua presenza sull'orizzonte ha una durata più o meno lunga, secondo

che il luogo dell' osservatore è più o meno vicino al polo. Parimente, al solstizio d' inverno, l' assenza del sole è di un giorno intero pel circolo polare, e di sei mesi pel polo corrispondente: le notti in ciascon ponto della zona sono più o meno lunghe secondo che i luoghi sono più o meno prossimi al polo.

Zona temperate. In queste zone, il sole giunge ad essere perpendicolare nel giorno del solstizio d' estate pei punti situati sulla linea dei tropici che dividono queste zone dalla zona torrida. In ogni altro puoto non arriva mai ad essere perpendicolare, ed è tanto più inclinato alla superficie della terra, quanto più uno si allontana dai tropici e si approssima ai circoli polari. I giorni e le notti vi sono diseguali, e questa diseguaglianza aumenta colla latitudine. Agli equinozj, i giorni e le notti sono di dodici ore; ai solstizj poi giungono alla massima loro lunghezza, che è di ventiquattro ore, pei luoghi situati sui circoli polari.

Zona torrida. In ciascun punto di questa zona il sole diviene perpendicolare due volte l' anno. Siccome è continuamente arsa dai raggi del sole, che percuotono verticalmente la sua superficie, le è stato dato il nome di *zona torrida*. In questa zona è piccola la differenza nella durata dei giorni e delle notti; la temperatura giornaliera ne è quasi continuamente uniforme, e, a parlar propriamente, non vi si conosce la stagione dell' inverno.

ZOOLICO. Motore zoolico (*Mec.*) (da ζῶον, *animale*). Nome che vien dato ad un motore animato. Si chiama ancora *macchina zoolica* qualunque macchina messa in moto da uomini o da animali.

Fine dell' Ottavo ed Ultimo Volume.

TAVOLA DI LETTURA

Perchè un Dizionario di una scienza qualunque possa tener luogo di libro elementare e di trattato metodico in cui apprender si possa la scienza medesima, occorre che allo studioso venga additato l' ordine nel quale deve egli leggerne gli articoli. Per servire a questo oggetto importantissimo, fu promesso nel primo tomo di questo Dizionario che sarebbe stata data in fine una ben disposta tavola di lettura; ed è per soddisfare ad una simile promessa che ora ci facciamo a indicare l' ordine nel quale dovranno studiarsi i principali articoli, onde giungere a possedere, senza bisogno di maestro, i diversi rami della scienza che sono trattati in quest'Opera.

L'ordine più conveniente di studiare le diverse parti delle matematiche è il seguente:

ARITMETICA.
ALGEBRA.
GEOMETRIA ELEMENTARE.
TRIGONOMETRIA RETTILINEA.
GEOMETRIA ANALITICA.
CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE.
MECCANICA DE' SOLIDI.
IDRAULICA.
OTTICA.
ASTRONOMIA.

Gli articoli poi relativi a ciascuna di queste parti dovranno leggersi nell' ordine segnente:

ARITMETICA.

Aritmetica.
Numerazione.
Binario.
Addizione.
Sottrazione.
Complemento.
Moltiplicazione.
Divisione.
Scala.
Frazione.
Decimale.
Periodico.
Aliquoto.
Primo.
Estrazione
Rapporto.
Proporzione.
Tre (Regola del)
Interesse.
Alligazione.
Compagnia (Regola di)
Falsa Posizione (Regola di)

ALGEBRA.

Algebra.
Abbreviazione.
Addizione.
Sottrazione.
Moltiplicazione.

Divisione.
Frazione.
Comun divisore.
Radice.
Elevazione alle potenze
Progressione.
Logaritmo.
Binomio.
Eqoazione.
Eliminazione.
Cubico.
Caso irriducibile.
Quadratico.
Biquadratico.
Trasformazione.
Abbassamento.
Congruenza.
Approssimazione.
Coefficiente.
Estrazione delle radici.
Immaginario.
Fattoriale.
Funzioni simmetriche.
Serie.
Ricorrente.
Ritorno delle serie.
Convergente.
Sommatorio.
Interpolazione.
Indeterminato.
Continue (Frazioni.)
Combinazione.
Permutazione.
Probabilità.
Assicurazione.
Annnità.
Vitalizio.

GEOMETRIA ELEMENTARE.

Geometria.
Dimensione.
Perpendicolare.
Parallele.
Angolo.
Triangolo.
Proporzionale.
Compasso di proporzione.
Superficie.
Area.
Poligono.
Regolare.
Decagono.
Dodecagono.
Circolo.
Tangente.
Contatto.
Piano.
Solido.
Poliedro.
Prisma.
Cilindro.
Volume.
Piramide.
Cono.
Sfera.
Descrittiva.
Trasversale.
Prospettiva.
Scale di pendenza.

TRIGONOMETRIA RETTILINEA

Trigonometria rettilinea.
Arco.
Seno.
Agrimensura.
Livellazione.
Altimetria.
Levare di pianta.
Poligonometria.
Projezione.

GEOMETRIA ANALITICA.

Applicazione dell'algebra alla geometria.
Conico.
Costruzione.
Curva.
Discussione.
Parabola.
Ellisse.
Iperbola.
Trasformazione.
Polare.
Cicloide;
Quadratrice.
Epicicloide.
Spirale.
Asintoto.
Fuoco.
Centro.
Raggio.
Vettore.
Diametro.
Taugenti (Metodo delle).
Corde di Contatto.
Punti siogolari.

Piano tangente.
Trigonometria sferica.

Calcolo differenziale e Integrale.

Analisi.
Limite.
Funzione.
Differenza.
Differenziale.
Integrale.
Massimi.
Curvatura.
Rettificazione.
Quadratura.
Cubatura.
Costante.
Derivazione.
Variazione.
Centrobarico.
Accesso.
Brachistocrona.
Catenaria.
Evoluta.
Funzioni generatrici.
Trascendenti ellittiche.
Parziale.

Meccanica de' Solidi.

Meccanica.
Azione.
Statica.
Potenza.
Forza.
Momento.
Equilibrio.
Gravità.
Peso.
Massa.
Densità.
Centro.
Risultante.
Macchina.
Composizione delle macchine.
Leva.
Carrucola.
Puleggia.
Argano.
Inclinato.
Noria.
Verricello.
Vite.
Bilancia.

Ruota.
Ingranaggio.
Dinamica.
Elasticità.
Resistenza.
Spinta delle terre.
Moto.
Quantità di moto.
Comunicazione del moto.
Accelerato.
Velocità virtuale.
Pendolo.
Urto.
Percussione.
Tautocrono.
Trajettoria.
Gravitazione.
Attrazione.
Pressione.
Attrito.
Effetto utile.

Idraulica.

Fluido.
Idrostatica.
Idrodinamica.
Idraolica.
Contrazione della vena fluida.
Aria.
Pneumatica.
Sgorgo dei fluidi.
Tromba.
Colonna d' acqua.
Corrente d' acqua.
Fontana artificiale.

Ottica.

Ottica.
Luce.
Catottrica.
Aberrazione.
Diottrica.
Refrazione.
Diffrazione.
Lente.
Camera oscura.
Canocchiale.
Telescopio.
Amplificazione.
Acromatico.
Arco-baleno

Astronomia.

Astronomia.
Polo.
Armillare.
Ascensione retta.
Declinazione.
Stella.
Costellaziooe.
Catalogo delle stelle.
Pianeta.
Cometa.
Ecclittica.
Obliquità dell'Ellittica.
Amplitudine.
Anomalia.
Longitudine.
Latitudine.
Azimut.
Equioozio.
Precessione.
Centrale.
Distanza.
Aberrazione.
Equazione.
Perturbazione.
Afelio.
Eccentricità.
Deviazione.
Abbassamento dell' orizzonte.
Parallasse.
Anno.
Calendario.
Terra.
Figura della Terra.
Ecclisse.
Gnomonica.
Altezze corrispondenti.
Passaggio.
Luna.
Nutazione.
Occultazione.